Complemente de Fizică I
Cursul 2

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul I. Transformări de coordonate

- I.1. Transformări Galilei.
- **I.2. Spațiul E_3 al vectorilor tridimensionali.**
- I.3. Transformări generale de coordonate.

I.2. Spațiul E_3 al vectorilor tridimensionali.
I.2.1. Definiții.

- E_3 e un spațiu liniar 3D definit pe corpul $\mathbb{R}$ în care s-a introdus un produs scalar.
- E_3 e înzestrat cu 3 operații:
  1. Operația internă de adunare sau compunere a vectorilor care:
     - este asociativă: $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$;
     - admite un element neutru $\mathbf{0}$: $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$, $\forall \boldsymbol{a} \in E_3$.
     - asociază fiecărui vector $\boldsymbol{a}$ inversul $-\boldsymbol{a}$ a.î.: $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) \equiv \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.
  2. Înmulțirea cu scalari $\alpha, \beta, \lambda, \dots$ din $\mathbb{R}$:
     - Distributivitate: $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$.
     - Asociativitate: $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$.
     - Element nul: $0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.
  3. Produsul scalar $\cdot : E_3 \times E_3 \to \mathbb{R}$ care:
     - este simetric (abelian): $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$.
     - este liniar în ambii termeni: $\boldsymbol{c} \cdot (\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = (\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$.
     - $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$ cu egalitate pentru vectorul nul $\boldsymbol{a} = 0$.
- Fiecărui vector $\boldsymbol{a}$ i se poate asocia norma $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$, respectiv versorul $\boldsymbol{u}_a = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ cu $\boldsymbol{u}_a^2 = 1$.

I.2.2. Descompunerea ortogonală a spațiului E_3.

- O bază în E_3 este formată din 3 vectori arbitrari, cu condiția ca aceștia să fie liniar independenți.
- Este convenabilă utilizarea unei descompuneri ortogonale în raport cu o bază formată din vectori ortogonali:

$$E_3 = E_1(\boldsymbol{e}_1) \oplus E_1(\boldsymbol{e}_2) \oplus E_1(\boldsymbol{e}_3), \qquad \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases}, \quad (1)$$

  unde $\boldsymbol{e}_i$ sunt versori ortogonali iar δ_{ij} este *simbolul Kronecker*.
- Fiecare vector $\boldsymbol{e}_i$ generează un subspațiu unidimensional al lui E_3: $E_1(\boldsymbol{e}_i) = \{\lambda \boldsymbol{e}_i | \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Orice vector $\boldsymbol{x} \in E_3$ se poate descompune în raport cu $\{\boldsymbol{e}_i\}$:

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + x_3 \boldsymbol{e}_3 \equiv \sum_{i=1}^{3} x^i \boldsymbol{e}_i = x^i \boldsymbol{e}_i, \quad (2)$$

  unde în partea dreaptă am introdus convenția de sumare implicită a lui Einstein după indicii care se repetă.

I.2.3. Componentele vectorilor.

- Mărimile scalare x_i $(i = 1, 2, 3)$ se numesc componentele vectorului $\boldsymbol{x}$ în raport cu baza $\{\boldsymbol{e}_i\}$.
- Componentele x_i se obțin luând produsul scalar dintre $\boldsymbol{x}$ și $\boldsymbol{e}_i$:

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i \cdot (x^j \boldsymbol{e}_j) = x^j (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) = x^j \delta_{ij} = x_i, \tag{3}$$

  unde ultima relație reprezintă o proprietate a simbolului Kronecker.
- Componentele lui $\boldsymbol{e}_i$ sunt δ_{ij}:

$$e_{i;j} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}, \qquad e_{i;j} \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i. \tag{4}$$

- Produsul scalar a doi vectori este

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a^i \boldsymbol{e}_i) \cdot (b^j \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} a^i b^j = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3. \tag{5}$$

- Componentele unui versor $\boldsymbol{u}$ sunt cosinușii directori $\cos\theta_i$:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_i = \cos\theta_i, \qquad \boldsymbol{u} = \cos\theta_i \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{u}^2 = \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1. \tag{6}$$

I.2.4. Produsul vectorial.

- În spațiul tridimensional E_3 se definește produsul scalar a doi vectori $\times : E_3 \times E_3 \to E_3$ cu proprietățile:
  - antisimetrie: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$;
  - liniaritate în ambii termeni:
    $(\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c} \times (\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}) = \alpha \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \beta \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.
- Regulile de calcul a produsului vectorial $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, respectiv a produsului mixt $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ sunt:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

- Componenta i a produsului vectorial $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ se poate scrie compact folosind simbolul Levi-Civitta ε_{ijk}:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{e}_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (i,j,k) \text{ este o permutare pară a lui } (1,2,3) \\ -1, & (i,j,k) \text{ este o permutare impară a lui } (1,2,3) \\ 0, & \text{ când } i = j,\ j = k \text{ sau } k = i. \end{cases} \tag{9}$$

I.2.5. Forme multiliniare și tensori.

- O formă liniară $F : E_3 \to \mathbb{R}$ este o aplicație liniară cu proprietatea:

$$F(\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}) = \alpha F(\boldsymbol{a}) + \beta F(\boldsymbol{b}). \tag{10}$$

- Numerele reale $F_i = F(\boldsymbol{e}_i)$ reprezintă coeficienții lui F în baza $\{\boldsymbol{e}_i\}$.
- Formei liniare F i se poate asocia un vector $\boldsymbol{F} = F_i \boldsymbol{e}_i \in E_3$ iar

$$F(\boldsymbol{x}) = F(x^i \boldsymbol{e}_i) = x^i F(\boldsymbol{e}_i) = x^i F_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{F}. \tag{11}$$

- Tensorii de rangul 2 sunt formele bilinare $T : E_3 \times E_3 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) =& \alpha T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \beta T(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \\ T(\boldsymbol{a}, \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c}) =& \beta T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \gamma T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}). \end{aligned} \tag{12}$$

- Definind coeficienții formei bilinare $T_{ij} = T(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, rezultă $T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = T_{ij} a^i b^j$.

Probleme.

1. Să se arate că $a^j\delta_{ij} = a_i$ înlocuind pe rând i cu 1, 2 și 3.
2. Să se arate că $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta ik$.
3. Să se arate că $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ij\ell} = 2\delta_{k\ell}$.
4. Să se arate că $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{i\ell m} = \delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell}$.
5. Să se arate că $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{c}$.
6. Să se demonstreze identitatea Jacobi:
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0.$$
7. Să se arate că $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$.