Astrofizică stelară
Cursul 13

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

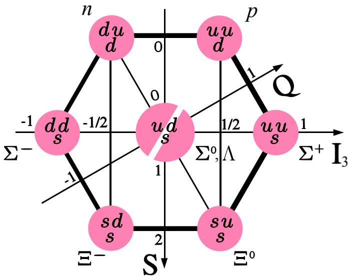
Conținutul cursului

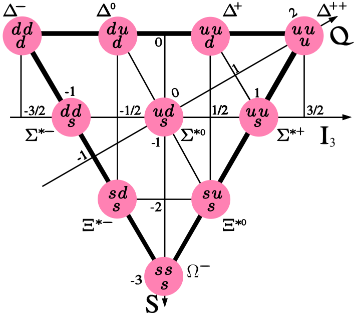
Capitolul V. Stele compacte.

- V.1. Ecuația Lane-Emden.
- V.2. Ecuația Tolman-Oppenheimer-Volkoff.
- V.3. Masa maximă a stelelor neutronice.
- V.4. Teoria nucleară de câmp.
- **V.5. Echilibrul β în stelele neutronice.**

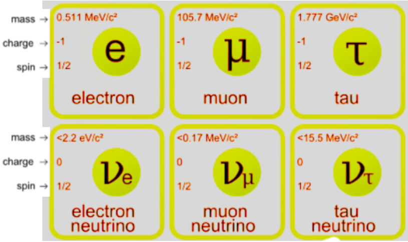
V.5. Echilibrul β în stelele neutronice.

V.5.1. Materia stelelor neutronice.





- Deoarece ν și γ pot părăsi interiorul stelelor neutronice (SN), materia neutronică poate atinge starea de minimă energie prin orice proces electroslab.
- La n_b mare, poate fi energetic favorabilă înlocuirea n sau p cu alți membri ai octetului sau decupletului barionic.



V.5.2. Lagrangianul modelului.

- O extensie minimală a modelului σ-ω-ρ constă în adăugarea câmpurilor fermionice corespunzătoare tuturor barionilor luați în considerare, precum și a leptonilor:

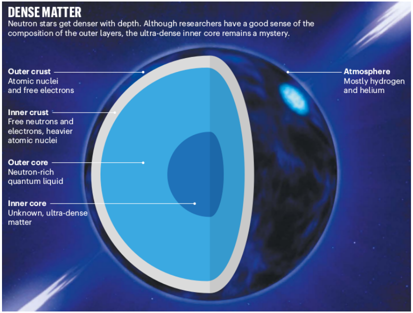
$$\mathcal{L} = \sum_B \overline{\psi}_B \left(\frac{i}{2}\gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^B_\mu - m_{B;*} \right) \psi_B + \sum_\ell \overline{\psi}_\ell \left(\frac{i}{2}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m_\ell \right) \psi_\ell$$
$$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{3} m_{\rm n} b (g_{{\rm n};\sigma}\sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_{{\rm n};\sigma}\sigma)^4$$
$$- \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{4}\boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu . \quad (1)$$

- Barionii sunt grupați pe categorii în funcție de sarcina strange a acestora, în timp ce leptonii ℓ sunt e^- sau μ^-.[1]

	mc^2 (MeV)	I_3	q	s
N : p	939	$1/2$	1	0
n		$-1/2$	0	0
Λ	1116	0	0	-1
Σ : Σ^+	1190	1	1	-1
Σ^0		0	0	-1
Σ^-		-1	-1	-1

[1] $m_e c^2 = 0,511$ MeV, $m_\mu c^2 = 105,7$ MeV.

- În absența măsurătorilor experimentale asupra materiei nucleare conținând hiperoni, constantele noi de cuplaj $g_{B;\sigma}$, $g_{B;\omega}$ și $g_{B;\rho}$ rămân parametri liberi.
- $\mathcal{L}$ poate fi extins cu termeni mai complecși [e.g., cuplajul dintre ω_μ și $\boldsymbol{\rho}_\mu$; autointeracțiuni pentru ω_μ; mezonii σ_* și ϕ_μ, fără autointeracțiuni).



Sursa: A. Mann, Nature (2020) **579** 20..

- O caracterizare mai precisă a crustei stelei neutronice trebuie să ia în calcul că la $n_b \lesssim 2n_0$, materia nucleară începe să semene cu cea de pe Terra, separându-se în nuclee cu A tot mai mic, în exterior cel mai probabil fiind Fe.
- În tranziția de la faza de nuclee individuale la faza de amestec de nucleoni, materia nucleară poate forma faze ordonate cunoscute sub numele de *pasta nucleară* (*nuclear pasta*).

V.5.3. Aproximația câmpului mediu.

- La fel ca în cazul modelului σ-ω original, presupunem că fluctuațiile cuantice ale mezonilor pot fi ignorate comparativ cu valorile lor medii:

$$m_\sigma^2 \sigma = -\, b m_{\rm n} g_\sigma (g_\sigma \sigma)^2 - c g_\sigma (g_\sigma \sigma)^3 + \sum_B g_{\sigma;B} n_{s;B},$$

$$\omega_0 = \sum_B \frac{g_{\omega;B}}{m_\omega^2} n_B, \qquad \rho_{3;0} = \sum_B \frac{g_{\rho;B}}{m_\rho^2} I_{3;B} n_B, \tag{2}$$

  unde B reprezintă fiecare dintre speciile fermionice luate în considerare.
- Câmpurile fermionice sunt cuantificate în modul standard iar valorile lor medii sunt calculate în aproximația temperaturii nule:

$$n_B = \frac{p_{f;B}^3}{3\pi^2}, \qquad n_{s;B} = \frac{m_{B;*}}{\pi^2} \int_0^{p_{f;B}} \frac{p^2 dp}{E_p^{B;*}} = \frac{m_{B;*}}{2\pi^2} \left(E_f^B p_f^B + m_{B;*}^2 \ln \frac{m_{B;*}}{E_f^B + p_f^B} \right). \tag{3}$$

- În principiu, se poate introduce câte un potențial chimic μ_B (și deci densitate n_B și $p_{f;B}$) pentru fiecare specie de particule.

- Densitatea de energie și presiunea sunt

$$
\begin{aligned}
\epsilon =& \frac{1}{2}(m_\sigma^2\sigma^2 + m_\omega^2\omega_0^2 + m_\rho^2\rho_{3;0}^2) + \frac{1}{3}bm_{\mathrm{n}}(g_\sigma\sigma)^3 + \frac{1}{4}c(g_\sigma\sigma)^4 \\
&+ \frac{1}{\pi^2}\sum_B \int_0^{p_{f;B}} dp\, p^2 E_p^{B;*} + \frac{1}{\pi^2}\sum_\ell \int_0^{p_{f;\ell}} dp\, p^2 E_p^\ell, \\
P =& \frac{1}{2}(-m_\sigma^2\sigma^2 + m_\omega^2\omega_0^2 + m_\rho^2\rho_{3;0}^2) - \frac{1}{3}bm_{\mathrm{n}}(g_\sigma\sigma)^3 - \frac{1}{4}c(g_\sigma\sigma)^4 \\
&+ \frac{1}{3\pi^2}\sum_B \int_0^{p_{f;B}} \frac{dp\, p^4}{E_p^{\mathrm{b};*}} + \frac{1}{3\pi^2}\sum_\ell \int_0^{p_{f;\ell}} \frac{dp\, p^4}{E_p^\ell}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

- Pentru ca $\partial P/\partial\epsilon \to 1$, contribuția datorată mezonilor ω_μ și $\boldsymbol{\rho}_\mu$ trebuie să fie dominantă.
- Adiția noilor grade de libertate fermionice are ca efect reducerea c_s^2 datorită scăderii importanței relative a lui $m_\omega^2\omega_0^2$ față de contribuțiile fermionice.

V.5.4. Echilibrul β.

- Pe lângă constantele de cuplaj dintre mezoni și barioni, mai trebuie specificate valorile nivelelor Fermi (p_f sau E_f) pentru fiecare specie fermionică.
- Acestea pot fi determinate unic ca funcție de $p_{f;\mathrm{n}}$, invocând două principii simple.
- Primul principiu se referă la **neutralitatea de sarcină**:

$$\sum_B Q_B n_B - \sum_\ell n_\ell = 0. \tag{5}$$

- Al doilea principiu se referă la **echilibrul** β, realizând starea de energie minimă în raport cu transmutările fermionilor între generații conform legilor de dezintegrare electroslabă (β).
- Să luăm ca exemplu canalul $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$.
- Antineutrinul părăsește steaua, nefiind luat în considerare.
- Minimizarea lui ϵ în raport cu această reacție impune ca

$$d\epsilon = \frac{\partial \epsilon}{\partial n_\mathrm{n}} dn_\mathrm{n} + \frac{\partial \epsilon}{\partial n_p} dn_p + \frac{\partial \epsilon}{\partial n_e} dn_e = 0, \tag{6}$$

unde $dn_\mathrm{n} = -dn_p = -dn_e$.

- Presupunând că $\epsilon \equiv \epsilon(n_B, n_\ell; \sigma)$, unde $\sigma \equiv \sigma(n_B)$, se poate arăta că (prob. 5l, cursul 12):
$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} = 0. \tag{7}$$
- Ținând cont că ω_0 și $\rho_{3;0}$ depind de n_B, rezultă:
$$\frac{\partial \epsilon}{\partial n_B} = E_f^B + g_{\omega;B}\omega_0 + I_B g_{\rho;B}\rho_{3;0} = \mu_B, \qquad \frac{\partial \epsilon}{\partial n_\ell} = E_{f;\ell} = \mu_\ell. \tag{8}$$
- Considerând doar barioni simplu încărcați pozitiv (p, Σ^+, ...) sau negativ (Σ^-, ...), echilibrul β impune:[2]
$$\mu_{B^0} = \mu_{\rm n}, \quad \mu_{B^+} = \mu_{\rm n} - \mu_e, \quad \mu_{B^-} = \mu_{\rm n} + \mu_e, \quad \mu_\ell = \mu_e. \tag{9}$$
- Impunând neutralitatea de sarcină, rezultă
$$\sum_{B^+} n_{B^+} - \sum_{B^-} n_{B^-} - \sum_\ell n_\ell = 0. \tag{10}$$
- În baza relațiilor de mai sus, se pot determina unic valorile potențialelor chimice în funcție de sarcina barionică totală, $n_{\rm b} = \sum_B n_B$.

[2] Există și barioni dublu încărcați, e.g. Δ^{++} compus din uuu.

V.5.5. Modelul $npe\mu$.

- Cel mai simplu model care satisface condițiile de echilibru β și de neutralitate de sarcină este modelul $npe\mu$, în care se iau în considerare barionii n și p, precum și leptonii e^- și μ^-.
- În aproximația câmpului mediu, rezultă:

$$g_\sigma \sigma = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}\left[-b m_{\mathrm{b}}(g_\sigma\sigma)^2 - c(g_\sigma\sigma)^3 + g_\sigma(n_{s;p} + n_{s;\mathrm{n}})\right], \qquad n_{s;B} = \frac{m_*}{\pi^2}\int_0^{p_{f;B}} \frac{dp\, p^2}{E_p^*},$$

$$g_\omega \omega_0 = \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}(n_p + n_{\mathrm{n}}), \quad g_\rho \rho_{3;0} = \frac{g_\rho^2}{2m_\rho^2}(n_p - n_{\mathrm{n}}), \quad n_B = \frac{p_{f;B}^3}{3\pi^2}, \quad m_* = m_{\mathrm{b}} - g_\sigma \sigma,$$

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{1}{2}(m_\sigma^2\sigma^2 + m_\omega^2\omega_0^2 + m_\rho^2\rho_{3;0}^2) + \frac{1}{3}b m_{\mathrm{b}}(g_\sigma\sigma)^3 + \frac{1}{4}c(g_\sigma\sigma)^4 \\
&+ \frac{1}{\pi^2}\sum_B \int_0^{p_{f;B}} dp\, p^2 E_p^{B;*} + \frac{1}{\pi^2}\sum_\ell \int_0^{p_{f;\ell}} dp\, p^2 E_p^\ell, \\
P &= \frac{1}{2}(-m_\sigma^2\sigma^2 + m_\omega^2\omega_0^2 + m_\rho^2\rho_{3;0}^2) - \frac{1}{3}b m_{\mathrm{n}}(g_\sigma\sigma)^3 - \frac{1}{4}c(g_\sigma\sigma)^4 \\
&+ \frac{1}{3\pi^2}\sum_B \int_0^{p_{f;B}} \frac{dp\, p^4}{E_p^{B;*}} + \frac{1}{3\pi^2}\sum_\ell \int_0^{p_{f;\ell}} \frac{dp\, p^4}{E_p^\ell}.
\end{aligned} \tag{11}$$

- Echilibrul β implică:

$$E_f^e = E_f^\mu, \qquad E_f^n = E_f^p + E_f^e + g_\rho \rho_{3;0} \tag{12}$$

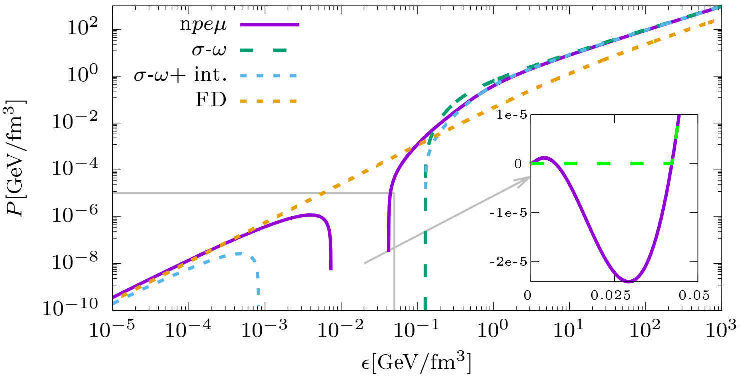
- Conservarea sarcinii impune $n_p = n_e + n_\mu$.

Fixarea valorii constantelor.

- Constantele trebuie fixate în condițiile materiei nucleare simetrice la saturație ($n_\mathrm{n} = n_p = n_0/2$, unde $n_0 = 0,138\ \mathrm{fm}^{-3}$), făcând abstracție de prezența leptonilor ($p_f^e = p_f^\mu = 0$).
- Considerând $m_\mathrm{b} = 938,92\ \mathrm{MeV}$ și energia de legătură $a_\mathrm{v} \simeq 15,75\ \mathrm{MeV}$, rezultă $\epsilon_0 = 127,397\ \mathrm{MeV}$.
- Pentru garantarea stabilității mecanice, presiunea trebuie să se anuleze, $P = 0$.
- Considerăm (în baza măsurătorilor experimentale) că $m_* = 0,75 m_\mathrm{b}$ la saturație, deci $g_\sigma \sigma = 234,73\ \mathrm{MeV}$.
- Impunând $K = 234\ \mathrm{MeV}$ și $a_\mathrm{as} = 94,78\ \mathrm{MeV}$, rezultă:

$$\frac{g_\sigma \hbar}{m_\sigma c} = 3,439\ \mathrm{fm}, \qquad \frac{g_\omega \hbar}{m_\omega c} = 2,541\ \mathrm{fm}, \qquad \frac{g_\rho \hbar}{m_\rho c} = 1,689\ \mathrm{fm},$$
$$b = 0,00585, \qquad c = -0,00410. \tag{13}$$

Ecuația de stare.



- La ϵ mare, modelul $\mathrm{n}pe\mu$ are comportament similar cu cel al modelului σ-ω cu autointeracțiuni scalare.
- Spre deosebire de modelul σ-ω, P scade sub valoarea 0 pentru $n_{\mathrm{b}} = 0,325 n_0$.
- Pentru $n_{\mathrm{b}} < 0,057 n_0$, P devine din nou pozitiv.

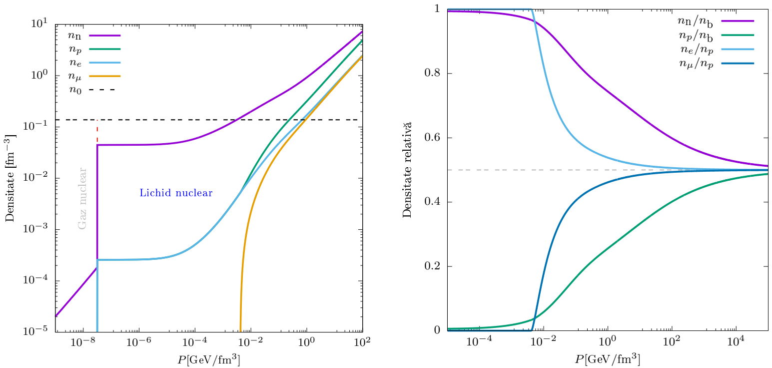
Construcția Maxwell.

- Pe porțiunea unde P descrește în raport cu ϵ, viteza sunetului devine imaginară ($c_s^2 = \partial P/\partial\epsilon < 0$), iar ϵ (precum și $n_{\rm b}$, etc) devin funcții multivaluate de P.
- Această aparentă patologie a ec. de stare poate semnaliza tranziția dinspre o stare densă (lichid nuclear) înspre o stare rarefiată (atmosfera nucleară).
- Prezența celei de-a doua faze nu e complet justificată în cadrul modelului $\mathrm{n}pe\mu$, însă e de așteptat ca tranzițiile de fază să fie prezente în interiorul SN.
- Tranziția de fază se modelează prin înlocuirea segmentului oscilatoriu cu o linie dreaptă $P = {\rm const}$, care se traduce în interiorul SN printr-un salt brusc al celorlalți parametri (ϵ, $n_{\rm b}$, etc).
- Valoarea presiunii la care are loc această tranziție de fază se găsește utilizând construcția Maxwell,

$$\int_{n_1}^{n_2} dn_{\rm b}\,\frac{P}{n_{\rm b}^2} - P_{\rm ph}\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right) = 0, \tag{14}$$

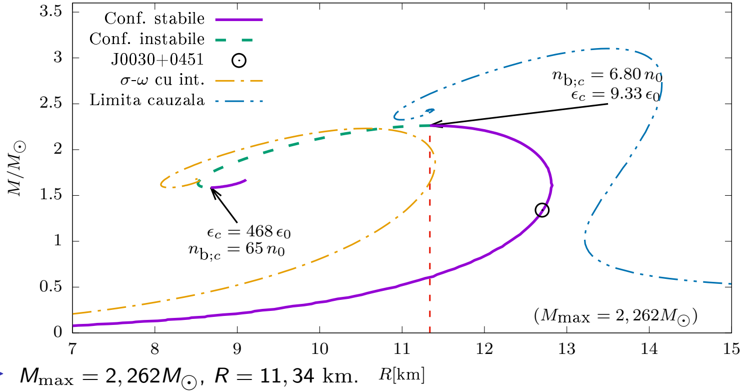
  unde n_1 și n_2 sunt valorile densității barionice pentru $P = P_{\rm ph}$ la stânga, respectiv la dreapta porțiunii nefizice.
- În cazul de față, avem $P_{\rm ph} = 3,178 \times 10^{-8}\ {\rm GeV/fm^3} = 5,08 \times 10^{27}\ {\rm Pa}$, în timp ce $n_1 = 0,00133\ n_0$ și $n_2 = 0,325\ n_0$.

Componența materiei.

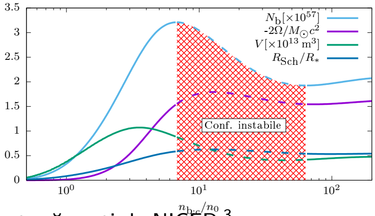


- Pentru $P < P_{\mathrm{ph}}$, gazul nuclear este compus preponderent din n.
- Muonii apar când $n_\mathrm{b} \gtrsim 0,157\ \mathrm{fm}^{-3} = 1,14 n_0$.

Diagrama M-R.



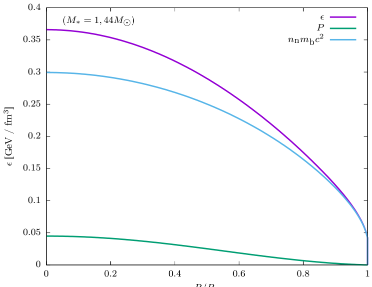
- $M_{\max} = 2,262 M_\odot$, $R = 11,34$ km.
- Secvența stelară seamănă cu cea coresp. modelului σ-ω cu autoint. scalare, razele fiind mai mari în modelul $\mathrm{n}pe\mu$.
- Toți parametrii stelei (energia de leg. grav. Ω, vol. propriu V, nr. tot. de barioni N_{b} și rap. dintre r. Sch. și r. stelei R_{Sch}/R_* se plafonează.

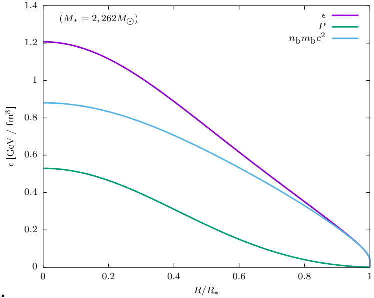


- Parametrii pulsarului J0030+0451 au fost măsurați de NICER.[3]

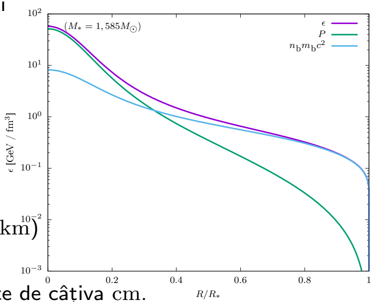
[3] M. C. Miller *et al.*, Astrophys. J. Lett. **887** (2019) 1, L24.

Structura stelelor neutronice în modelul $\mathrm{n}pe\mu$.



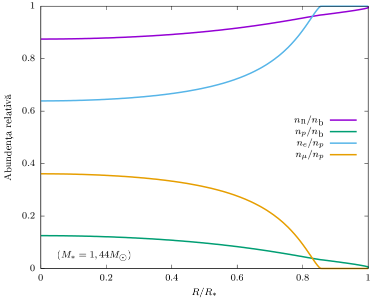


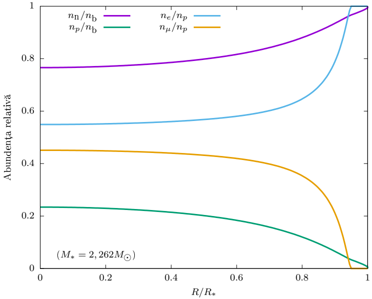
- Pentru $M = 1,44 M_\odot$, $n_{\mathrm{b;c}} = 2,64 n_0$ și $\epsilon_c = 2,87\epsilon_0$, în timp ce constituenții rămân nerelativiști ($c_s^2 < c^2/3$).
- În centrul stelei cu $M_* = 2,262 M_\odot$, $n_{\mathrm{b;c}} = 6,80 n_0$ și $\epsilon_c = 9,48\epsilon_0$ iar contribuția mezonilor de interacțiune devine importantă ($3P_c > \epsilon_c$).
- În centrul primei stele din insula de stabilitate ($M = 1,585 M_\odot$, $R = 8,67$ km) avem $\epsilon_c = 158\epsilon_0$ și $n_{\mathrm{b};c} = 69 n_0$.



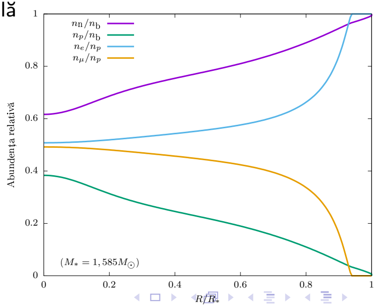
- Grosimea atmosferei de gaz nuclear este de câțiva cm.

Abundența elementelor.





- Compoziția stelelor de pe ramura stabilă este puternic asimetrică, neutronii constituind $\gtrsim 75\%$ din barioni chiar și în nucleu.
- Toate stelele considerate conțin și μ^-, densitatea relativă a acestuia scăzând către regiunile periferice.
- Aproape de suprafața stelei, $n_\mu = 0$ pe o regiune extinsă.



Probleme

1. Într-un sistem termodinamic, energia internă totală U poate fi văzută ca o proprietate extensivă a sistemului care depinde funcțional de volumul sistemului V, entropia totală S și numărul total de particule $\boldsymbol{N} \equiv (N_1, N_2, \dots)$, toate acestea fiind proprietăți extensive.

   a) Pornind de la legea întâi a termodinamicii, $dU = -PdV + TdS + \boldsymbol{\mu} \cdot d\boldsymbol{N}$, să se arate că

   $$P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,\boldsymbol{N}}, \quad T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,\boldsymbol{N}}, \quad \mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial N_i}\right)_{S,V,N_{j\neq i}}. \tag{15}$$

   b) Folosind relația de aditivitate $U(\lambda V, \lambda S, \lambda \boldsymbol{N}) = \lambda U(V, S, \boldsymbol{N})$, să se demonstreze ecuația lui Euler, $U = -PV + TS + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{N}$.

   c) În limita termodinamică ($V \to \infty$), să se găsească expresia densității de energie $\epsilon = U/V$ în funcție de densitățile de entropie $s = S/V$ și de particule $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{N}/V$. [R: $\epsilon = -P + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{n} + sT$]

   d) Folosind legea întâi a termodinamicii, să se arate că $d\epsilon = Tds + \boldsymbol{\mu} \cdot d\boldsymbol{n}$ și să se găsească condiția de minimizare a energiei interne când $T = 0$. [R: $\boldsymbol{\mu} \cdot d\boldsymbol{n} = 0$]

Probleme

2. Considerând potențialele chimice μ_B, μ_λ și μ_Q asociate sarcinilor fundamentale barionică, leptonică și electrică, putem scrie în general $\mu_i = B_i\mu_B + \lambda_i\mu_\lambda + Q_i\mu_Q$.
   a) Deoarece neutrinii pot părăsi sistemul, potențialul chimic al acestora este $\mu_\nu = 0$. Să se arate că $\mu_\lambda = 0$.
   b) Să se scrie condiția de neutralitate electrică a sistemului și să se interpreteze ca o condiție asupra potențialului chimic μ_Q. [R: $n_Q = \sum_i n_i Q_i = \partial P/\partial\mu_Q = 0$]
   c) Să se găsească relațiile dintre potențialele chimice μ_n, μ_p, μ_e și μ_μ care apar în modelul $\mathrm{n}pe\mu$. [R: $\mu_\mathrm{n} = \mu_B = \mu_p + \mu_e$, $\mu_e = \mu_\mu = -\mu_Q$]
   d) Să se scrie condiția de neutralitate de sarcină ca o relație între μ_B și μ_Q.

$$\left[\text{R:}\quad [(\mu_B + \mu_Q - g_\omega\omega_0 - \tfrac{1}{2}g_\rho\rho_{3;0})^2 - m_*^2]^{3/2} = (\mu_Q^2 - m_e^2)^{3/2} + (\mu_Q^2 - m_\mu^2)^{3/2}.\right]$$

3. Să se obțină relația dintre potențialele chimice ale speciilor de particule care apar în următoarele reacții impunând echilibrul β.
   a) $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$. [R: $\mu_\mathrm{n} = \mu_p + \mu_e$]
   b) $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. [R: $\mu_\mu = \mu_e$]
   c) $\Lambda^0 \to \mathrm{n} + \pi^0$ și $\pi^0 \to 2\gamma$. [R: $\mu_\Lambda = \mu_\mathrm{n}$]
   d) $n + N + \mu^- \to N + \Sigma^- + 2\gamma + \nu_\mu$. [R: $\mu_{\Sigma^-} = \mu_n + \mu_e$]

Probleme

4. Descompunem $\epsilon = \epsilon_{\rm mez} + \epsilon_{\rm bar} + \epsilon_{\rm lep}$, unde

$$\epsilon_{\rm mez} = \frac{1}{2}(m_\sigma^2 \sigma^2 + m_\omega^2 \omega_0^2 + m_\rho^2 \rho_{3;0}^2) + \frac{1}{3} b m_{\rm n} (g_\sigma \sigma)^3 + \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4,$$

$$\epsilon_{\rm bar} = \frac{1}{\pi^2} \sum_B \int_0^{p_{f;B}} dp\, p^2 E_p^{B;*}, \qquad \epsilon_{\rm lep} = \frac{1}{\pi^2} \sum_\ell \int_0^{p_{f;\ell}} dp\, p^2 E_p^\ell,$$

și considerăm o relație analoagă pentru presiune.

a) Să se arate că $\epsilon_{\rm mez} + P_{\rm mez} = m_\omega^2 \omega_0^2 + m_\rho^2 \rho_{3;0}^2$.

b) Să se arate că $\epsilon_{\rm bar} + P_{\rm bar} = \sum_B \frac{1}{3\pi^2} E_f^B p_{f;B}^3$ și să se găsească relația analoagă pentru $\epsilon_{\rm lep} + P_{\rm lep}$.

c) Ținând cont că $\mu_B = E_f^B + g_{\omega;B}\omega_0 + I_B g_{\rho;B} \rho_{3;0}$ și $\mu_\ell = E_{f;\ell}$, precum și de relațiile $\omega_0 = \sum_B \frac{g_{\omega;B}}{m_\omega^2} n_B$ respectiv $\rho_{3;0} = \sum_B \frac{g_{\rho;B}}{m_\rho^2} I_{3;B} n_B$, unde $n_B = p_{f;B}^3 / 3\pi^2$, să se demonstreze relația Euler,

$$\epsilon + P - \sum_B \mu_B n_B - \sum_\ell \mu_\ell n_\ell = 0.$$