

Astrofizică stelară

Cursul 12

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Conținutul cursului

Capitolul V. Modele politrope.

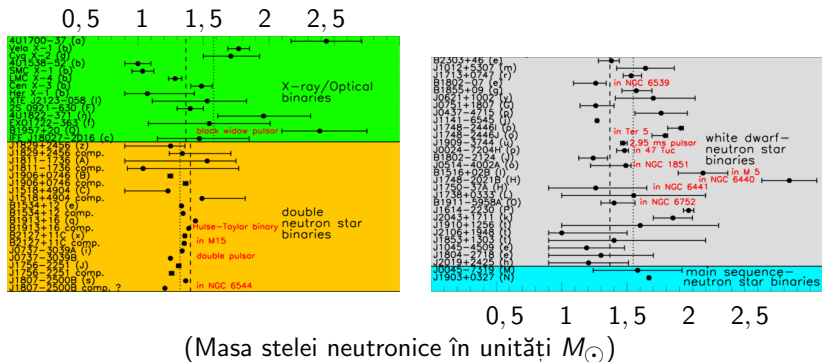
- ▶ V.1. Ecuația Lane-Emden.
- ▶ V.2. Ecuația Tolman-Oppenheimer-Volkoff.
- ▶ **V.3. Masa maximă a stelelor neutronice.**
- ▶ **V.4. Teoria nucleară de câmp.**
- ▶ V.5. Echilibrul β în stelele neutronice.

V.3. Masa maximă a stelelor neutronice.

V.3.1. Observabile și necunoscute.

- ▶ Piticele albe (PA) și stelele neutronice (SN) sunt stele alcătuite din materie degenerată, în sensul că $E_F \gg k_B T$ în majoritatea regiunii interioare a stelei.
- ▶ Spre deosebire de PA, care prezintă variații ce depind de compoziția lor chimică (pe bază de C, O, Mg, etc), SN prezintă principal o singură varietate, deoarece materia nucleară ce compune SN este practic făurită în interiorul acestora, fiind independentă de compoziția chimică inițială a stelei din care s-au născut.
- ▶ Deoarece condițiile extreme care se găsesc în interiorul SN nu pot fi reproduse în laboratoarele terestre, proprietățile materiei din interiorul acestora (ec. de stare) trebuie descrise cu modele teoretice.
- ▶ Pentru a fi realiste, aceste modele trebuie să reproducă caracteristicile observate în laborator.
- ▶ Observațiile astronomice prezintă observabile importante cu ajutorul cărora pot fi selectate modelele pentru materia nucleară densă, cum ar fi masa maximă, relația masă-rază și coeficienții de deformabilitate Love.

V.3.2. Masa stelelor neutronice cunoscute până în 2012.¹

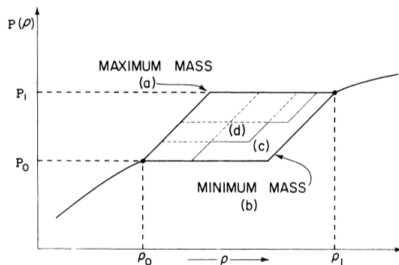


- ▶ Observațiile astronomice par să indice că majoritatea SN au mase în jurul valorii de $1,5M_{\odot}$, însă unele SN par să aibă mase $\lesssim 3M_{\odot}$.
- ▶ Întrebare: Cum se poate estima valoarea maximă a masei unei SN?

¹J. M. Lattimer, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **62**, 485 (2012).

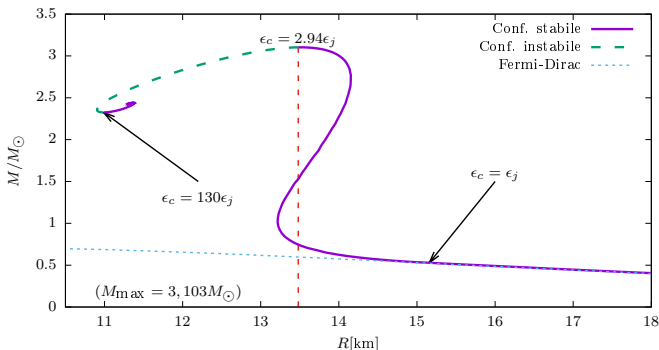
V.3.3. Restricții de cauzalitate.

- ▶ În cursul trecut am văzut că pentru materia incompresibilă ($\rho = \text{const}$) și pentru cea ultrarelativistă ($3P = \rho c^2$), M_* nu e restricționată.
- ▶ Ambele modele au deficiențe care fac predicțiile acestora să fie nerealiste.
- ▶ În vecinătatea suprafeței stelei (în *crusta* stelei), ρ scade sub densitatea de saturație $\rho_{\text{nucl}} \Rightarrow$ neutronii devin nerelativiști.
- ▶ În fluidul relativist, viteza sunetului satisface $c_s^2 = \partial P / \partial \rho$, valoarea acesteia trebuind să respecte condiția de cauzalitate, $c_s < c$.
- ▶ În cazul materiei incompresibile, $c_s \rightarrow \infty$ și deci modelul devine acauzal.
- ▶ Pentru $\rho \lesssim 2\rho_{\text{nucl}}$, putem considera că SN e alcătuită din materie barionică obișnuită (elemente din tabelul periodic), supuse însă unor condiții extreme de presiune și de câmp magnetic.



- ▶ Ecuațiile de stare realiste trebuie să satisfacă condiția de cauzalitate, $u = \frac{1}{c^2}(\partial P/\partial \rho) \leq 1$, precum și condiția de stabilitate, $u > 0$.
- ▶ În principiu, $P(\rho)$ se cunoaște pentru $\rho < \rho_0$ (în domeniul accesibil laboratoarelor).
- ▶ Presupunând că $P(\rho)$ se cunoaște și pentru $\rho > \rho_1$, Clifford E. Rhoades și Remo Ruffini au arătat în 1974² în baza unui calcul variațional că M_* are valori extreme pentru $u = 0$ sau 1, maximum fiind atins pentru configurația (a) din figură.
- ▶ În continuare, vom considera că ec. de stare este cunoscută pentru $\rho < \rho_0 = 2\rho_{\text{nuc1}}$, iar $\rho_1 \rightarrow \infty$.

²C. E. Rhoades, R. Ruffini, Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 324–327.



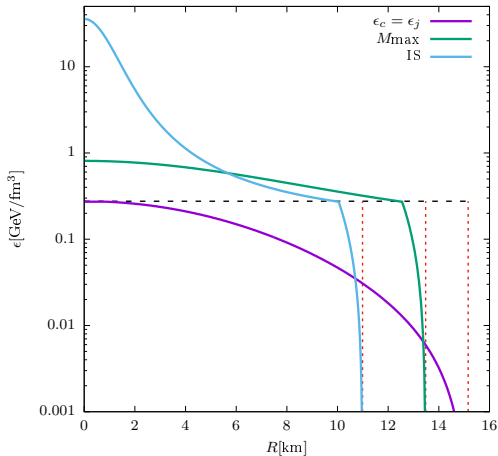
- Pentru obținerea unei estimări a masei maxime, considerăm ec. de stare:

$$\epsilon(P) = \begin{cases} \epsilon_{\text{FD}}(P), & \epsilon < \epsilon_j, \\ P - P_j + \epsilon_j, & \rho > 2\rho_{\text{nucl}}, \end{cases}$$

unde $P_j = 8,74 \text{ MeV/fm}^3$ și $\epsilon_j = 272 \text{ MeV/fm}^3$ definind joncțiunea cu modelul gazului FD ideal degenerat (vezi problema 7, curs 11) corespund densității $n_j = 2n_0 = 0,276 \text{ fm}^{-3}$ ($p_{\text{FC}} = 397 \text{ MeV}$).

- În acest model pentru crustă, $M_{\text{max}} = 3,10 M_{\odot}$. Modele mai realiste, bazate pe ec. Harrison-Wheeler sau BPS ³ dau $M_{\text{max}} = 3,2 M_{\odot}$, respectiv $3,14 M_{\odot}$.

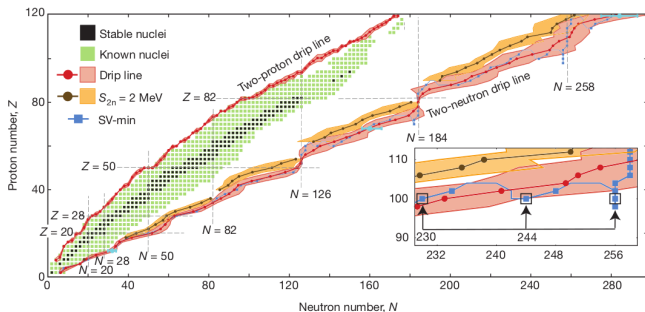
³G. Baym, C. Pethick, P. Sutherland, *Astrophys. J.* **170** (1971) 299.



- Pentru stelele cu $M \simeq M_{\text{max}}$, regiunea crustei (unde $\epsilon < \epsilon_j$) este relativ mică, având dimensiuni tipice de $\lesssim 1 \text{ km}$.

V.4. Teoria nucleară de câmp.

V.4.1. Valea de stabilitate nucleară.⁴



- ▶ Nucleele reprezentând stări legate ale ansamblurilor de Z protoni și $N = A - Z$ neutroni sunt cuprinse între liniile de stabilitate (*drip*).
- ▶ La stânga (Z mare) și la dreapta (N mare) liniilor de drip, ansamblul de nucleoni nu formează o stare legată, nucleonii în exces (p respectiv n) fiind “scurși” prin “picurare” (*drip*).
- ▶ Până în anul 2012, se cunoșteau peste 3000 de nuclee a 118 elemente.
- ▶ Cele 288 de nuclee stabile formează *linia de stabilitate* β .
- ▶ $\sim 4000 \pm 500$ nuclee sunt necunoscute, majoritatea fiind bogate în n .

⁴J. Erler *et al.*, The limits of the nuclear landscape, Nature **486** (2012) 509.

V.4.2. Modelul picăturii de lichid.

- ▶ Forța nucleară manifestată între nucleoni are un caracter *saturat* (nucleonii interacționează cu un număr redus de vecini), fiind repulsivă la distanțe mici, atractivă la distanțe medii și neglijabilă la distanțe mari.
- ▶ Energia de legătură $\Delta E = -c^2 \Delta M$ ($\Delta M = M(A, Z) - Zm_p - Nm_n$) poate fi modelată prin formula semiempirică:

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_v + E_s + E_c + E_{as} + E_\delta, \\ E_v &= a_v A, \quad E_s = -a_s A^{2/3}, \quad E_c = -a_c Z^2 / A^{1/3}, \\ E_{as} &= -a_{as} (Z - A/2)^2 / A, \quad E_\delta = [(-1)^Z + (-1)^N] a_\delta / 2\sqrt{A}, \quad (1)\end{aligned}$$

unde constantele a_* sunt determinate prin fitare:

$$\begin{aligned}a_v &= 15,75 \text{ MeV}, & a_s &= 17,80 \text{ MeV}, & a_c &= 0,711 \text{ MeV}, \\ a_{as} &= 94,78 \text{ MeV}, & a_\delta &= 11,18 \text{ MeV}.\end{aligned}$$

V.4.3. Parametrii de referință ai ec. de stare.

- ▶ Pentru caracterizarea materiei nucleare din interiorul SN, ne interesează limita unui sistem infinit, omogen și izotrop.
- ▶ Datorită termenului $\sim a_{\text{as}}$, SN nu poate fi compusă doar din n.
- ▶ Pentru menținerea $Q_{\text{tot}} = 0$, p vor fi neutralizați de e^- , a.î. termenul $\sim a_c$ poate fi neglijat.
- ▶ Când $Z = N$, energia de legătură pentru $A \rightarrow \infty$ este

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\Delta E}{A} = a_v \simeq 15,75 \text{ MeV}.$$

- ▶ Știind că $R(A) = r_0 A^{1/3}$ ($r_0 \simeq 1,2 \text{ fm}$), rezultă

$$\epsilon_0 = \lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ Z=N}} \frac{(Nm_n + Zm_p)c^2 - \Delta E}{4\pi R^3/3} = \frac{mc^2 - a_v}{4\pi r_0^3/3} \simeq 127,54 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3},$$

unde $mc^2 = \frac{1}{2}(m_p + m_n)c^2 \simeq 938,92 \text{ MeV}$.

- ▶ Densitatea barionică medie va fi $n_0 = \frac{3}{4\pi r_0^3} \simeq 0,138 \text{ fm}^{-3}$.
- ▶ Ecuația de stare $\epsilon(n_p, n_n)$ trebuie să reproducă:

$$\epsilon(n_n = n_p = n_0/2) = \epsilon_0, \quad mc^2 - \frac{\epsilon_0}{n_0} = a_v. \quad (2)$$

Coeficientul energiei de asimetrie.

- Pentru obținerea coeficientului energiei de asimetrie, a_{as} , introducem notațiile

$$n_b = n_n + n_p, \quad t = \frac{n_n - n_p}{n_b}.$$

- La saturație, avem:

$$\left. \frac{\epsilon}{n_b} \right|_{n_b=n_0} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(mc^2 - \frac{\Delta E}{A} \right) = mc^2 - a_v + \frac{a_{\text{as}}}{4} t^2 + O(A^{-1/3}).$$

- Rezultă că $a_{\text{as}} \simeq 94,78 \text{ MeV}$ poate fi obținut folosind formula

$$a_{\text{as}} = 2 \left. \frac{\partial^2(\epsilon/n)}{\partial t^2} \right|_{\substack{n_b=n_0 \\ t=0}}. \quad (3)$$

Modulul de compresie K .

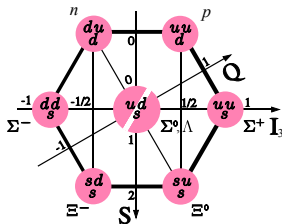
- ▶ O altă cantitate importantă se referă la răspunsul lui ϵ la creșterea lui n_b .
- ▶ Modulul de compresie K , reprezentând curbura raportului ϵ/n_b în raport cu n_b la saturație, se calculează pentru materia nucleară simetrică folosind

$$K = 9 \left[n_b^2 \frac{d^2}{dn_b^2} \left(\frac{\epsilon}{n_b} \right) \right]_{\substack{n_b=n_0 \\ t=0}} = 9 \left(\frac{2\epsilon}{n_b} - 2 \frac{d\epsilon}{dn_b} + n_b \frac{d^2\epsilon}{dn_b^2} \right)_{\substack{n_b=n_0 \\ t=0}}. \quad (4)$$

- ▶ Ca principiu, cu cât K este mai mare, cu atât ec. de stare e mai rigidă și ϵ crește mai repede cu $n_b \Rightarrow M_*^{\max}$ crește cu K .
- ▶ Modelul picăturii de lichid nu permite determinarea lui K (materia nucleară presupunându-se a fi la saturație).
- ▶ K se poate determina experimental, plaja acceptată de valori fiind 200–300 MeV.
- ▶ În cele ce urmează vom folosi $K = 234$ MeV.⁵

⁵W. D. Myers, W. J. Swiatecki, Nucl. Phys. A **601** (1996) 141.

V.4.4. Modelul σ - ω .



mass →	0.511 MeV/c ²	105.7 MeV/c ²	1.777 GeV/c ²
charge →	-1	-1	-1
spin →	1/2	1/2	1/2
	e	μ	τ
	electron	muon	tau
mass →	<2.2 eV/c ²	<0.17 MeV/c ²	<15.5 MeV/c ²
charge →	0	0	0
spin →	1/2	1/2	1/2
	ν_e	ν_μ	ν_τ
	electron neutrino	muon neutrino	tau neutrino

- ▶ La n_0 , materia nucleară este alcătuită din p și n , leptonii e^- și eventual μ^- fiind necesari pentru neutralizarea p (τ^- e prea masiv).
- ▶ Odată cu creșterea n_b , nivelele Fermi μ_p și μ_n cresc și ele iar adăugarea unui nou n sau $p + e^-$ poate deveni mai costisitoare decât apariția unui nou tip de barion.
- ▶ Primii barioni noi sunt hiperonii, conținând unul sau mai multe quarcuri s , dar niciun quarc c .
- ▶ Barionii care conțin quarcuri c sunt mult mai masivi și deci apar în cantități neglijabile în interiorul SN.
- ▶ Pentru simplitate, vom face abstracție totală de prezența leptonilor și vom presupune că SN e alcătuită doar din n și p .

Lagrangianul câmpurilor nucleonice.⁷

- ▶ Pentru a obține o descriere covariantă a materiei nucleare compatibilă cu condiția de cauzalitate $c_s \leq c$, este convenabilă utilizarea *teoriei nucleare de câmp*.
- ▶ În modelul σ - ω , n și p sunt considerate ca fiind particule identice de masă $m_b = (m_p + m_n)/2 \simeq 938,92 \text{ MeV}/c^2$.
- ▶ Cinetica nucleonilor poate fi capturată utilizând Lagrangianul pentru câmpul Dirac:

$$\mathcal{L}_{\text{nuc}} = \bar{\psi}_p \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\not{\partial}} - m_b \right) \psi_p + \bar{\psi}_n \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\not{\partial}} - m_b \right) \psi_n.$$

- ▶ Notând cu $\psi_b = (\psi_p, \psi_n)^T$ spinorul cu 8 componente aferent barionilor, $\mathcal{L}_{\text{nuc}}$ poate fi pus sub forma canonică:

$$\mathcal{L}_{\text{nuc}} = \bar{\psi}_b \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\not{\partial}} - m_b \right) \psi_b. \quad (5)$$

⁷În cele ce urmează vor fi utilizate unități Planck, a.î. $\hbar = k_B = c = 1$.

Cuplajul Yukawa cu mezonul σ .

- ▶ Un model simplist pentru interacțiunea tare dintre nucleoni implică cuplajul de tip Yukawa dintre o particulă scalară (mezonul σ) și câmpul fermionic, descrisă prin Lagrangianul de interacțiune

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\sigma} = g_{\sigma} \sigma \bar{\psi}_b \psi_b, \quad (6)$$

unde g_{σ} reprezintă constanta de cuplaj.

- ▶ Câmpul σ este de tip Klein-Gordon, fiind descris de Lagrangianul

$$\mathcal{L}_{\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \sigma \partial^{\mu} \sigma - m_{\sigma}^2 \sigma^2). \quad (7)$$

- ▶ Comparând $\mathcal{L}_{\text{int}}^{\sigma}$ cu termenul de masă din $\mathcal{L}_{\text{nuc}}$ (5), se vede că efectul mezonului σ este de a altera masa efectivă a nucleonilor, $m_{*} = m_b - g_{\sigma} \sigma$.
- ▶ Din punct de vedere experimental, mezonul σ pare a fi identificat cu starea rezonantă $f_0(500)$ a doi pioni, ceea ce susține interpretarea sa ca o stare de tip tetraquarc.⁸

⁸I. Caprini, G. Colangelo, H. Leutwyler, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 132001. ▶

Invarianța $U(1)$ și mezonul ω .

- ▶ Lagrangianul $\mathcal{L}_{\text{nucl}}$ este invariant la transformarea globală $U(1)$

$$\psi_b \rightarrow e^{-i\theta} \psi_b, \quad \bar{\psi}_b \rightarrow e^{i\theta} \bar{\psi}_b. \quad (8)$$

- ▶ Conform teoremei Noether, simetriei (8) îi corespunde curentul conservat

$$J_b^\mu = \bar{\psi}_b \gamma^\mu \psi_b. \quad (9)$$

- ▶ $\mathcal{L}_{\text{nucl}}$ e invariant și la transformări $U(1)$ locale (θ depinde de coordonate) dacă i se adaugă termenul de interacțiune

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^\omega = -g_\omega \omega_\mu J_b^\mu, \quad (10)$$

unde g_ω este constanta de cuplaj iar ω_μ se transformă după legea

$$\omega_\mu \rightarrow \omega_\mu + g_\omega^{-1} \partial_\mu \theta.$$

- ▶ Pentru a menține invarianța gauge a teoriei, câmpul ω_μ trebuie să fie de tip Maxwell (masă nulă).
- ▶ În teoria efectivă, masa poate fi generată dinamic, e.g. prin mecanismul Higgs, drept urmare câmpul ω_μ poate fi luat de tip Proca:

$$\mathcal{L}_\omega = -\frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu, \quad (11)$$

unde $\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$.

Lagrangianul modelului σ - ω .

- Colectând toți termenii, rezultă

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\sigma-\omega} = & \bar{\psi}_b \left[i\gamma^\mu \left(\frac{1}{2} \overleftrightarrow{\partial}_\mu + ig_\omega \omega_\mu \right) - (m_b - g_\sigma \sigma) \right] \psi_b \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu. \quad (12)\end{aligned}$$

- Ecuațiile de câmp pot fi obținute folosind formalismul Euler-Lagrange:

$$(\square + m_\sigma^2)\sigma = g_\sigma \bar{\psi}_b \psi_b, \quad (13a)$$

$$(\square + m_\omega^2)\omega_\mu - \partial_\mu \partial^\nu \omega_\nu = g_\omega \bar{\psi}_b \gamma_\mu \psi_b, \quad (13b)$$

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_\omega \omega^\mu) - (m - g_\sigma \sigma)] \psi_b = 0. \quad (13c)$$

- Folosind ec. Dirac, se poate verifica explicit că

$$\partial_\mu J_b^\mu = 0, \quad J_b^\mu = \bar{\psi}_b \gamma^\mu \psi_b.$$

Aproximația câmpului mediu.

- ▶ După cuantificarea a doua, câmpurile clasice ψ_b , σ și ω_μ devin operatori în spațiul Fock, fiind notați cu căciuli: $\hat{\psi}_b$, $\hat{\sigma}$ și $\hat{\omega}_\mu$.
- ▶ În general, un câmp cuantic $\hat{\phi}(x) = \langle \phi \rangle + \hat{\varphi}(x)$ poate fi scris ca suma dintre valoarea sa medie, $\langle \phi \rangle$, și operatorul descriind fluctuațiile cuantice, $\hat{\varphi}$.
- ▶ În **aproximația câmpului mediu**, se ignoră fluctuațiile câmpurilor mezonice, a.î. $\hat{\sigma}(x) = \langle \sigma \rangle \equiv \sigma$ și $\hat{\omega}_\mu(x) = \langle \omega_\mu \rangle \equiv \omega_\mu$ devin const.
- ▶ Ec. de câmp ale mezonilor (13a) și (13b) devin

$$g_\sigma \sigma = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} n_s, \quad g_\omega \omega^\mu = \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} J_b^\mu, \quad (14)$$

unde $n_s = \langle \hat{\psi}_b \hat{\psi}_b \rangle$ și $J_b^\mu = \langle \hat{\psi}_b \gamma_\mu \hat{\psi}_b \rangle$ reprezintă valoarea medie a densității scalare, respectiv a curentului barionic.

- ▶ Valorile medii $\langle \cdot \rangle$ se calculează folosind teoria câmpului cuantic termic (vezi pagina 40 din anexă).
- ▶ Lagrangianul (12) se reduce la

$$\mathcal{L}_{\sigma-\omega} = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu. \quad (15)$$

Soluțiile ecuației Dirac.

- ▶ Înlocuind în ec. (13c) soluția $U_{\mathbf{p},\lambda}(x) = e^{-ip \cdot x} u(\mathbf{p}, \lambda)$, rezultă:

$$(\not{k} - m_*)u(\mathbf{p}, \lambda) = 0, \quad k^\mu = p^\mu - g_\omega \omega^\mu, \quad m_* = m_b - g_\sigma \sigma. \quad (16)$$

- ▶ Înmulțind la stânga cu $\not{k} + m_*$, rezultă $k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m_*^2 = 0$, astfel încât:

$$p^0 = E_{\mathbf{p}}^+ = g_\omega \omega_0 + E_{\mathbf{p}-g_\omega \boldsymbol{\omega}}^*, \quad E_{\mathbf{p}}^* = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_*^2}. \quad (17)$$

- ▶ Spinorul $U_{\mathbf{p},\lambda}(x)$ poate fi scris în funcție de spinorul liber $U_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}}(x)$:

$$U_{\mathbf{p},\lambda}(x) = e^{-ig_\omega \boldsymbol{\omega} \cdot x} U_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}}(x). \quad (18)$$

- ▶ Spinorul anti-particulă, $V_{\mathbf{p},\lambda}(x) = i\gamma^2 U_{\mathbf{p},\lambda}^*(x) \rfloor_{g_\omega \rightarrow -g_\omega}$ este:

$$V_{\mathbf{p},\lambda}(x) = e^{-ig_\omega \boldsymbol{\omega} \cdot x} V_{\tilde{\mathbf{k}},\lambda}^{\text{lib}}(x), \quad \tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{p} + g_\omega \boldsymbol{\omega}, \quad (19)$$

$$\text{iar } \tilde{p}^0 = E_{\mathbf{p}}^- = -g_\omega \omega_0 + E_{\mathbf{p}+g_\omega \boldsymbol{\omega}}^*.$$

- ▶ Construcția detaliată a spinorilor este prezentată în anexă, pe pagina 38.

Mărimile macroscopice.

- ▶ În materia omogenă și izotropă, avem $J_b^t = n_b$ și $\mathbf{J}_b = 0$, a.î.

$$g_{\omega}\omega_0 = \frac{g_{\omega}^2}{m_{\omega}^2} n_b, \quad \omega = 0. \quad (20)$$

- ▶ Tensorul energie-impuls, $T^{\mu\nu} = \sum_{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \partial^{\nu}\phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$, primește contribuții doar de la $\phi \in \{\psi, \bar{\psi}\}$, deoarece $\partial^{\nu}\sigma = \partial^{\nu}\omega_{\mu} = 0$:

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \langle \hat{\bar{\psi}}_b \gamma^{\mu} \overleftrightarrow{\partial}^{\nu} \hat{\psi}_b \rangle + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (m_{\sigma}^2 \sigma^2 - m_{\omega}^2 \omega_0^2) = \text{diag}(\epsilon, P, P, P).$$

- ▶ Densitatea de energie $\epsilon = T^{tt}$ este

$$\epsilon = \frac{i}{2} \langle \hat{\bar{\psi}}_b \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}_t \hat{\psi}_b \rangle - \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_{\omega}^2 \omega_0^2 - m_{\sigma}^2 \sigma^2). \quad (21)$$

- ▶ Din condiția $T^{\mu}_{\mu} = \epsilon - 3P$ rezultă

$$P = \frac{i}{6} \langle \hat{\bar{\psi}}_b \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}_t \hat{\psi}_b \rangle - \frac{1}{3} m_b n_s + \mathcal{L}. \quad (22)$$

- ▶ Calculul mărimilor n_b , (n_s, σ) și (ϵ, P) e prezentat pe pag. 44, 45 și 46.

Ecuatia de stare a modelului σ - ω .

- Pentru determinarea relației $P(\epsilon)$, este necesară rezolvarea simultană a relațiilor de mai jos:

$$\begin{aligned}g_{\sigma}\sigma &= \left(\frac{g_{\sigma}}{\pi m_{\sigma} c^2}\right)^2 m_* c^2 \left(E_f p_f c + m_*^2 c^4 \ln \frac{m_* c^2}{E_f + p_f c}\right), & g_{\omega}\omega_0 &= \frac{g_{\omega}^2 \hbar^3}{m_{\omega}^2 c} n_b, \\ \epsilon &= \frac{c}{2\hbar^3} (m_{\sigma}^2 \sigma^2 + m_{\omega}^2 \omega_0^2) + \frac{1}{4\pi^2 \hbar^3 c^3} \left[p_f c E_f (p_f^2 c^2 + E_f^2) + m_*^4 c^8 \ln \frac{m_* c^2}{p_f c + E_f} \right], \\ P &= \frac{c}{2\hbar^3} (-m_{\sigma}^2 \sigma^2 + m_{\omega}^2 \omega_0^2) + \frac{1}{12\pi^2 \hbar^3 c^3} \left[p_f c E_f (5p_f^2 c^2 - 3E_f^2) - 3m_*^4 c^8 \ln \frac{m_* c^2}{p_f c + E_f} \right], \\ p_f &= \hbar \left(\frac{3\pi^2}{2} n_b\right)^{1/3}, & E_f &= \sqrt{p_f^2 c^2 + m_*^2 c^4}, & m_* &= m_b - \frac{g_{\sigma}\sigma}{c^2},\end{aligned}\tag{23}$$

unde constantele de cuplaj g_{σ} și g_{ω} sunt adimensionale.

- Pentru $n_b \rightarrow \infty$, avem $g_{\sigma}\sigma \rightarrow m_b$ ($m_* \rightarrow 0$), în timp ce $g_{\omega}\omega_0 \sim n_b \rightarrow \infty \Rightarrow$ contribuția dominantă la ϵ și P va fi $\frac{1}{2} m_{\omega}^2 \omega_0^2$ iar $dP/d\epsilon \rightarrow 1$.
- Detaliile necesare pentru obținerea relațiilor (23) sunt prezentate în anexă (pag. 37).

Fixarea parametrilor liberi.

- ▶ Modelul σ - ω beneficiază de doi parametri liberi, g_σ/m_σ și g_ω/m_ω .
- ▶ Parametrii liberi pot fi aleși astfel încât când $n_b = n_0$ (materia nucleară la saturație), $\epsilon = \epsilon_0$ și $P = 0$ (stabilitate mecanică).
- ▶ Rezolvând numeric sistemul se obțin valorile:

$$\frac{g_\sigma \hbar}{m_\sigma c} = 4,137 \text{ fm}, \quad \frac{g_\omega \hbar}{m_\omega c} = 3,640 \text{ fm}, \quad (24)$$

în timp ce $g_\sigma \sigma = 435,5 \text{ MeV}$, astfel încât $m_* = 0,54 m_b$, în timp ce măsurătorile experimentale par să indice că $0,7 \lesssim m_*/m_b \lesssim 0,8$.

- ▶ Identificând mezonul σ cu $f_0(500)$, avem $m_\sigma c^2 = 500 \text{ MeV}$ și $g_\sigma = 10,48$.
- ▶ Pentru mezonul ω avem $m_\omega c^2 = 782 \text{ MeV}$, a.î. $g_\omega = 14,43$.
- ▶ Datele asupra mezonilor pot fi găsite în publicația bienală *Review of particle physics*.⁹

⁹Particle Data Group, *Review of particle physics*, Phys. Rev. D **98** (2018) 030001.

Modulul de compresie K .

- ▶ a_{as} nu poate fi estimat, modelul fiind limitat la materia nucleară simetrică.
- ▶ Pentru estimarea modulului de compresie K (4), este necesară calcularea derivatelor $d\epsilon/dn_b$ și $d^2\epsilon/dn_b^2$.
- ▶ Utilizând relația $p_f = (3\pi^2 n_b/2)^{1/3}$ și ținând cont că σ și ω_0 sunt funcții implicite de n_b , se poate arăta că

$$\frac{d\epsilon}{dn_b} = g_\omega \omega_0 + E_f = \mu_b. \quad (25)$$

- ▶ Derivata a doua a densității de energie este

$$\frac{d^2\epsilon}{dn_b^2} = \left(\frac{g_\omega}{m_\omega} \right)^2 + \frac{p_f^2}{3E_f n_b} - \frac{m_*}{E_f} \frac{d(g_\sigma \sigma)}{dn_b}. \quad (26)$$

- ▶ Folosind ecuația pentru $g_\sigma \sigma$, se poate arăta că

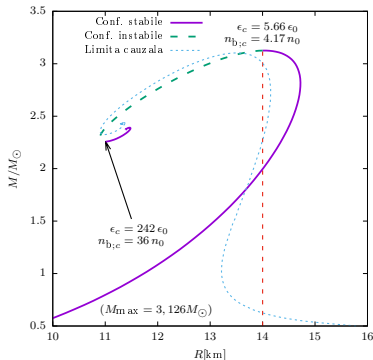
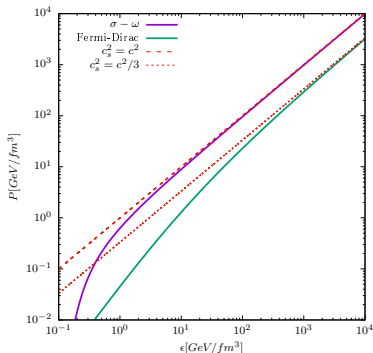
$$\frac{d(g_\sigma \sigma)}{dn_b} \left[\left(\frac{\pi m_\sigma}{g_\sigma} \right)^2 + 3m_*^2 \ln \frac{m_*}{E_f + p_f} + \frac{p_f}{E_f} (E_f^2 + 2m_*^2) \right] = \frac{2m_* p_f^3}{3E_f n_b}. \quad (27)$$

- ▶ La saturație, se obțin valorile:

$$\left. \frac{d(g_\sigma \sigma)}{dn_b} \right|_{n_b=n_0} = 2,73 \text{ GeV fm}^3, \quad K = 547,7 \text{ MeV}, \quad (28)$$

fiind în dezacord cu valoarea măsurată experimental ($K \sim 234 \text{ MeV}$).

Diagrama M - R pentru modelul σ - ω .



- ▶ În modelul σ - ω , $c_s \rightarrow c$.
- ▶ Pentru materia degenerată ideală (fără interacțiuni), $c_s^2 \rightarrow c^2/3$.
- ▶ Pentru $n_{b;c} \gtrsim 4n_0$, modelul σ - ω și ec. de stare la limita cauzală dau rezultate calitativ similare.
- ▶ Masa maximă admisă este $M_{\max} \simeq 3,126 M_{\odot}$ ($R \simeq 14$ km), fiind atinsă pentru $n_{b;c} \simeq 4,17 n_0$.

Probleme

1. Pornind de la modelul picăturii de lichid, considerând $\sigma = [(-1)^Z + (-1)^N]/2 \in \{0, \pm 1\}$ un parametru liber, să se rezolve următoarele cerințe:

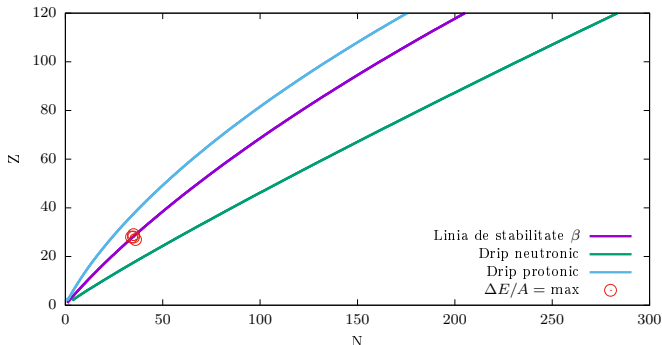
- a) Să se găsească linia de stabilitate β , impunând $\partial \Delta E(A, Z)/\partial Z = 0$.
[R: $Z_{\text{stab}} = a_{\text{as}} A/2(a_c A^{2/3} + a_{\text{as}})$]
- b) Să se găsească linia de instabilitate pentru N mare, impunând $\partial \Delta E(A, Z)/\partial A = 0$.

$$\left[\text{R : } \quad Z_{\text{nd}} = \frac{A^{2/3}}{2\alpha_c} \sqrt{3a_{\text{as}} - 12a_v + \frac{8a_{\text{s}}}{A^{1/3}} + \frac{6\sigma a_{\delta}}{A^{3/2}}}, \quad \alpha_c = \sqrt{a_c + \frac{3a_{\text{as}}}{A^{2/3}}} \right]$$

- c) Să se găsească linia de instabilitate pentru Z mare, impunând $\partial \Delta E(A, N)/\partial A = 0$.

$$\left[\text{R : } \quad \frac{N_{\text{pd}}}{A} = -\frac{2a_c}{\alpha_c^2} + \sqrt{\frac{4a_c^2}{\alpha_c^2} + \frac{5a_c}{\alpha_c} + \frac{3(\frac{a_{\text{as}}}{4} - a_v)}{A^{2/3}\alpha_c} + \frac{2\alpha_s}{A\alpha_c^2} + \frac{3\sigma a_{\delta}}{2\alpha_c^2 A^{13/6}}} \right]$$

Probleme



1. (continuare)

- d) Să se găsească maximul energiei de legătură per nucleon, $\Delta E/A$, pe linia de stabilitate β și să se identifice elementul corespunzător pentru $\sigma = -1, 0$ și 1 .
[R: $^{29}_{64}\text{Cu}$; $^{28}_{63}\text{Ni}$ și $^{27}_{63}\text{Co}$; $^{28}_{62}\text{Ni}$]
- e) Să se găsească ultimele elemente stabile de pe linia de stabilitate β , pentru care ΔE atinge valoarea maximă.
[R: $^{1152}_{315}\text{X}$; $^{1151}_{315}\text{X}$ și $^{1151}_{316}\text{X}$; $^{1152}_{316}\text{X}$]
- f) Să se găsească A și Z pentru care $\Delta E = 0$ pe linia de stabilitate β .
[R: $^{593}_{3068}\text{X}$; $^{593}_{3069}\text{X}$ și $^{594}_{3069}\text{X}$; $^{594}_{3068}\text{X}$].

Probleme

2. **Modelul σ - ω cu autointeracțiuni scalare.** Considerăm o extensie a Lagrangianului $\mathcal{L}_{\sigma-\omega}$ prin adăugarea potențialului

$$U(\sigma) = \frac{1}{3}bm_b(g_\sigma\sigma)^3 + \frac{1}{4}c(g_\sigma\sigma)^4. \quad (29)$$

- a) Să se arate că ecuațiile pentru ω^μ și ψ_b rămân neschimbate.
b) Să se găsească ecuația pentru σ în aproximația câmpului mediu.

$$\left[R: \quad g_\sigma \sigma = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left(\frac{2m_*}{\pi^2} \int_0^{p_f} \frac{dp p^2}{E_p^*} - bm_b(g_\sigma\sigma)^2 - c(g_\sigma\sigma)^3 \right) \right]$$

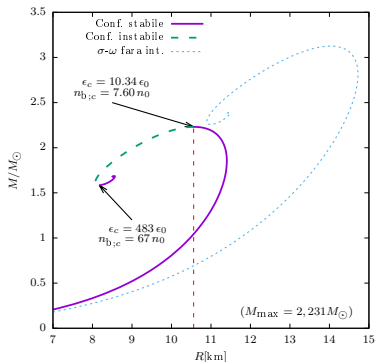
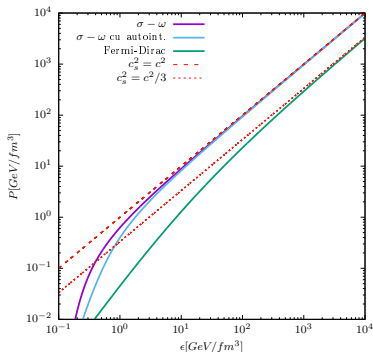
- c) Să se găsească modificările $\delta\epsilon$ și δP . [R: $\delta\epsilon = -\delta P = U(\sigma)$]
d) Să se arate că $\frac{d\epsilon}{dn_b} = g_\omega\omega_0 + E_f$.
e) Să se calculeze derivata $d(g_\sigma\sigma)/dn_b$.

$$\left[R: \quad \frac{d(g_\sigma\sigma)}{dn_b} \left[\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} + \frac{3m_*^2}{\pi^2} \ln \frac{m_*}{E_f + p_f} + \frac{p_f}{\pi^2 E_f} (E_f^2 + 2m_*^2) + 2bm_b g_\sigma \sigma + 3c(g_\sigma\sigma)^2 \right] = \frac{2m_* p_f^3}{3\pi^2 E_f n_b} \right].$$

- f) Impunând ca la $n_b = n_0 = 0,138 \text{ fm}^{-3}$ să se recupereze $\epsilon = \epsilon_0 = 127 \text{ MeV}$, $P = 0$, $m_* = 0,75m_b$ și $K = 234 \text{ MeV}$, să se găsească valorile parametrilor modelului.

$$[R: g_\sigma/m_\sigma = 3,44 \text{ fm}, g_\omega/m_\omega = 2,54 \text{ fm}, b = 0,00585, c = -0,00410]$$

Probleme



2. Modelul σ - ω cu autointeracțiuni scalare. (continuare)

- Să se arate prin comparație vizuală că ecuația de stare a modelului cu interacțiuni este mai puțin rigidă decât cea a modelului σ - ω original, mai ales la energii mici.
- Să se calculeze diagrama M - R și să se găsească masa maximă admisă, precum și raza și densitatea barionică centrală pentru această stea.

[R: $M_{\max} = 2, 231 M_{\odot}$, $R = 10, 56$ km, $n_{b;c} = 7, 6 n_0$]

Probleme

3. **Teorema Noether pentru simetrii interne.** Fie Lagrangianul $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ având unul sau mai multe grade de libertate ϕ . Fie transformarea independentă de punct $\phi \rightarrow \phi' = \Lambda[\phi] = \phi + \varepsilon \mathcal{F}_\phi + \dots$, unde ε reprezintă un parametru infinitesimal iar $\mathcal{F}_\phi$ este o funcție care depinde de câmpuri. Să se rezolve următoarele cerințe.

- a) Să se găsească $\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ în ordinul 1 în rap. cu ε .

$$\left[\text{R: } \delta \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \mathcal{F}_\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \mathcal{F}_\phi \right) \varepsilon. \right]$$

- b) Folosind ecuațiile Euler Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)}$, să se găsească expresia curentului conservat J^μ a.î. $\delta \mathcal{L} = \varepsilon \partial_\mu J^\mu$. [R: $J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \mathcal{F}_\phi$]

Considerăm Lagrangianul barionic liber din ec. (5), $\mathcal{L}_{\text{nuc1}} = \bar{\psi}_b (i \overleftrightarrow{\not{\partial}} - m_b) \psi_b$.

- c) Să se arate că transformarea (8), $\psi \rightarrow e^{-i\theta} \psi$, lasă invariant $\mathcal{L}_{\text{nuc1}}$ și să se arate că $J_b^\mu = \bar{\psi}_b \gamma^\mu \psi_b$.
- d) Să se arate că $\mathcal{L}_{\text{nuc1}}$ este invariant la transformările SU(2) ale grupului de izospin, $\Lambda(\psi_b) = e^{-\frac{i}{2} \lambda \cdot \tau} \psi_b$, unde λ sunt cei trei parametri reali ai transformării iar matricile Pauli τ acționează asupra structurii de izospin a lui ψ_b .
- e) Să se calculeze curentul barionic de izospin I_b^μ asociat transformării de la punctul anterior.

$$\left[\text{R: } I_b^\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi}_b \gamma^\mu \tau \psi_b \right]$$

Probleme

4. **Simetria de izospin și mezonul ρ .** Considerăm că parametrul $\lambda = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\tau}$ al transformării de izospin, $\Lambda[\psi_b] = e^{-i\lambda}\psi_b$, depinde de punct. Invarianța $\mathcal{L}_{\text{nuc}}$ la astfel de transformări locale poate fi asigurată prin metoda cuplajului minimal, $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_\rho \rho_\mu$, unde câmpul Yang-Mills $\rho_\mu = \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}$ constă din tripletul bozonic $\boldsymbol{\rho}_\mu = (\rho_\mu^1, \rho_\mu^2, \rho_\mu^3)$.

- a) Presupunând că sub transformarea $SU(2)$, $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho$, să se calculeze variația termenului cinetic $\delta \left(\frac{i}{2} \bar{\psi}_b \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu \psi_b \right)$.

$$[\text{R: } \delta \left(\frac{i}{2} \bar{\psi}_b \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu \psi_b \right) = \bar{\psi}_b \gamma^\mu (D_\mu \lambda - g_\rho \delta \rho_\mu) \psi_b, \quad D_\mu \lambda \equiv \partial_\mu \lambda + ig_\rho [\rho_\mu, \lambda]]$$

- b) Să se găsească variația $\delta\rho_\mu$ a.î. variația de la punctul a) să se anuleze.

$$[\text{R: } \delta \rho_\mu = g_\rho^{-1} D_\mu \lambda]$$

- c) Notând $T^a = \frac{1}{2}\tau^a$, să se arate că $\{T^a, T^b\} = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ și să se găsească constantele de structură f^{abc} a.î. $[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$.

$$[\text{R: } f^{abc} = \epsilon^{abc}]$$

- d) Să se găsească $\delta\rho_\mu$.

$$[\text{R: } \delta\rho_\mu = \frac{1}{g_\rho} \partial_\mu \lambda + \rho_\mu \times \lambda]$$

- e) Să se calculeze variația tensorului $\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu + ig_\rho [\rho_\mu, \rho_\nu]$.

$$[\text{R: } \delta\rho_{\mu\nu} = i[\rho_{\mu\nu}, \lambda]]$$

- f) Să se arate că Lagrangianul $\mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{2}\text{Tr}(\rho_{\mu\nu}\rho^{\mu\nu})$ este invariant la transformări gauge infinitezimale și să se calculeze expresia acestuia efectuând urma peste structura de izospin.

$$[\text{R: } \mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{4}\rho_{\mu\nu} \cdot \rho^{\mu\nu}]$$

Probleme

4. Simetria de izospin și mezonul ρ . (continuare)

- g) Lagrangianul final al teoriei invariante la transformările SU(2) este $\mathcal{L}_{\text{nuc}l+\rho} = \mathcal{L}_{\text{nuc}l} + \mathcal{L}_{\rho} + \mathcal{L}_{\text{int}}^{\rho}$, unde $\mathcal{L}_{\text{int}}^{\rho} = -g_{\rho} \rho_{\mu} \cdot \mathbf{I}^{\mu}$. Să se găsească expresia curentului de izospin $\mathbf{I}^{\mu}$ compatibil cu teorema Noether pentru transformări globale (λ e independent de punct), ținând cont că acesta are pe lângă componenta barionică $\mathbf{I}_{\text{b}}^{\mu}$ indusă prin cuplajul minimal și o componentă $\mathbf{I}_{\rho}^{\mu}$ care depinde de ρ_{μ} .

$$[\text{R: } \mathbf{I}^{\mu} = \mathbf{I}_{\text{b}}^{\mu} + \mathbf{I}_{\rho}^{\mu}, \mathbf{I}_{\text{b}}^{\mu} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_{\text{b}} \gamma^{\mu} \boldsymbol{\tau} \psi_{\text{b}}, \mathbf{I}_{\rho}^{\mu} = \rho_{\nu} \times \rho^{\mu\nu} + 2g_{\rho}(\rho^{\mu} \times \rho^{\nu}) \times \rho_{\nu}]$$

- h) Folosind formalismul Euler-Lagrange, să se obțină ecuația Dirac.

$$[\text{R: } [i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + \frac{i}{2}g_{\rho}\rho_{\mu} \cdot \boldsymbol{\tau}) - m_{\text{b}}]\psi_{\text{b}} = 0]$$

- i) Folosind formalismul Euler-Lagrange, să se obțină ecuația pentru câmpul gauge.

$$[\text{R: } \partial_{\nu} \rho^{\nu\mu} + 2g_{\rho}[\partial_{\nu}(\rho^{\nu} \times \rho^{\mu}) + \rho^{\mu\nu} \times \rho_{\nu}] + 4g_{\rho}^2 \rho_{\nu} \times (\rho^{\mu} \times \rho^{\nu}) = \mathbf{I}^{\mu}]$$

Probleme

5. **Modelul σ - ω - ρ cu autointeracțiuni scalare.** Considerăm adăuția mezonului ρ_μ la modelul σ - ω cu autointeracțiuni scalare, discutat la problema 2. La fel ca pentru bozonul ω_μ , considerăm că ρ_μ capătă masă:¹⁰

$$\mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{4}\rho_{\mu\nu} \cdot \rho^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_\mu \cdot \rho^\mu, \quad (30)$$

unde $\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu\rho_\nu - \partial_\nu\rho_\mu - g_\rho\rho_\mu \times \rho_\nu$. Considerând cuplajul minimal între ψ_b și ρ discutat în problema anterioară, să se rezolve următoarele cerințe:

- a) În aproximația câmpului mediu, presupunem că $\rho_\mu^1 = \rho_\mu^2 = \rho_\mu^3 = 0$ iar $\rho_0^3 = \text{const.}$ Să se arate că $\rho^{\mu\nu} = (\rho^\mu \times \rho^\nu) \times \rho_\nu = 0$ și să se găsească curentul de izospin. $I^\mu = I_b^\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}_b\gamma^\mu\tau\psi_b.$
- b) Să se scrie ec. Dirac și ec. pentru ρ_0^3 .

$$\left[\mathbb{R}: \quad \left[i\gamma^\mu\partial_\mu - (g_\omega\omega_0 + g_\rho\rho_0^3)\gamma^0 - (m - g_\sigma\sigma) \right] \psi_b = 0, \quad g_\rho\rho_0^3 = \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} \langle \bar{\psi}_b\gamma^0\frac{1}{2}\tau^3\psi_b \rangle \right]$$

- c) Având în vedere că $\partial_\mu I^\mu = 0$, definim proiecția pe axa 3 a sarcinii de izospin, $I_3 = \int d^3x I_{a=3}^{\mu=0}$. Considerând baza de helicitate și izospin discutată pe pagina 38, să se calculeze operatorul : $\hat{I}_3$:

$$[\mathbb{R}: \hat{I}_3 := \sum_j I_j(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \hat{d}_j^\dagger \hat{d}_j)]$$

¹⁰Eventual datorită unei rupere spontane de simetrie prin mecanismul Higgs. ▶

Probleme

5. Modelul σ - ω - ρ cu autointeracțiuni scalare. (continuare)

- d) Interpretând stările cu $I_3 = \frac{1}{2}$ și $-\frac{1}{2}$ ca protoni, respectiv neutroni, să se construiască operatorii $\hat{Q}_p$ și $\hat{Q}_n$ de sarcină protonică și neutronică.

$$[R: \hat{Q}_{p/n} = \frac{1}{2} \hat{Q}_b \pm \hat{I}_3]$$

- e) Cu interpretarea de mai sus, să se arate că $\langle \hat{I}_3^0 \rangle = \frac{1}{2}(n_p - n_n)$.

- f) Să se calculeze $\mathcal{L}_{\sigma-\omega-\rho}$.

$$[R: \mathcal{L} = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{3;0}^2 - \frac{1}{3} b m (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4]$$

- g) Să se arate că ϵ și P sunt date de ec. (21) și (22).

- h) Să se găsească spectrul energetic al ec. Dirac.

$$[R: E_{p,l_3}^\pm = \pm g_\omega \omega_0 \pm g_\rho \rho_0^3 l_3 + E_p^*]$$

- i) Folosind $\hat{\rho} = Z^{-1} \exp[-\frac{1}{T}(\hat{H} - \mu_p \hat{Q}_p - \mu_n \hat{Q}_n)]$ pentru calculul valorilor medii care implică câmpurile nucleonice, să se calculeze densitățile de protoni și neutroni.

$$\left[R: \quad n_{n/p} = \frac{p_{f;n/p}^3}{3\pi^2}, \quad p_{f;n/p} = \sqrt{E_{f;n/p}^2 - m_*^2}, \quad E_{f;n/p} = \mu_{n/p} \pm g_\rho \rho_0^3 - g_\omega \omega_0 \right]$$

Probleme

5. Modelul σ - ω - ρ cu autointeracțiuni scalare. (continuare)

j) Să se arate că

$$\epsilon = \frac{1}{2}(m_\sigma^2 \sigma^2 + m_\omega^2 \omega_0^2 + m_\rho^2 \rho_{3,0}^2) + \frac{1}{3} b m_b (g_\sigma \sigma)^3 + \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4 + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{B \in \{\rho, n\}} \int_0^{p_{f;B}} dp p^2 E_p^*.$$

k) Notând $n_b = n_n + n_p$ și $t = (n_n - n_p)/n_b$, să se arate că $p_{f;n/p} = p_{f;b}(1 \pm t)^{1/3}$, unde $p_{f;b} = (3\pi^2 n_b/2)^{1/3}$.

l) Considerând $\epsilon \equiv \epsilon(n_b, t, \sigma)$, să se arate că $\partial\epsilon/\partial\sigma = 0$.

m) Să se calculeze $\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\partial\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial\epsilon}{\partial\sigma} \frac{d\sigma}{dt}$ (ținând n_b const.) și să se arate că ϵ atinge valoarea minimă când $t = 0$. [R: $\frac{d\epsilon}{dt} = \left(\frac{n_b g_\rho}{2m_\rho}\right)^2 t + \frac{n_b}{2}(E_{f,n} - E_{f,p})]$

n) Să se calculeze $\partial^2\epsilon/\partial t^2$.

$$\left[\text{R: } \frac{d^2\epsilon}{dt^2} = \left(\frac{n_b g_\rho}{2m_\rho}\right)^2 + \frac{n_b p_{f;b}^2}{6} \left[\frac{(1+t)^{-1/3}}{E_{f,n}} + \frac{(1-t)^{-1/3}}{E_{f,p}} \right] \right]$$

o) Să se calculeze g_ρ/m_ρ a.î. $a_{as} = 2 \frac{d^2(\epsilon/n_b)}{dt^2} \Big|_{t=0, n_b=n_0} = 94,78 \text{ MeV}$, știind că ceilalți parametri ai modelului sunt identici cu cei obținuți în modelul σ - ω cu autointeracțiuni scalare (problema 2).

$$\left[\text{R: } \frac{g_\rho}{m_\rho c^2} = \left\{ \frac{2}{n_0 (\hbar c)^3} \left[a_{as} - \frac{2\hbar^2 c^2}{3E_f} \left(\frac{3\pi^2 n_0}{2} \right)^{2/3} \right] \right\}^{1/2} = 1,689 \text{ fm}/\hbar c, \frac{m_\rho c^2}{g_\rho} = 117 \text{ MeV} \right]$$

p) Considerând $m_\rho c^2 = 770 \text{ MeV}$, să se găsească valoarea constantei de cuplaj g_ρ .

A. Anexă: Calculul mărimilor din modelul σ - ω .

- ▶ În această anexă sunt discutați pașii necesari pentru obținerea relațiilor pe baza cărora se calculează ecuația de stare a modelului σ - ω , prezentate pe pag. 23.
- ▶ Pe pag. 38 și 39 sunt prezentate soluțiile spinoriale ale ec. Dirac (16) în spațiul izospinului și operatorul de câmp.
- ▶ Teoria câmpului cuantic termic necesară pentru evaluarea valorilor medii ale diversilor operatori este prezentată pe pag. 40.
- ▶ Valorile medii ale curentului barionic $J_b^\mu = \bar{\psi}_b \gamma^\mu \psi_b$, densității scalare $n_s = \bar{\psi} \psi$ și a tensorului energie-impuls (ϵ și P) sunt prezentate pe pag. 41–46.

A.1. Spinorii liberi barionici.

- Spinorii de tip particulă în baza de helicitate sunt:

$$U_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}}(x) = \frac{e^{-ik \cdot x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}} \begin{pmatrix} \kappa_+ \\ 2\lambda\kappa_- \end{pmatrix} \otimes \xi_\lambda(\varphi, \vartheta),$$
$$\xi_{\frac{1}{2}}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ e^{\frac{i\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}, \quad \xi_{-\frac{1}{2}}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -e^{-\frac{i\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} \\ e^{\frac{i\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

unde $\kappa_\pm = \sqrt{1 \pm m_*/k^0}$.

- Spinorii de tip antiparticulă satisfac

$$V_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}}(x) = i\gamma^2 U_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib};*}(x). \quad (32)$$

- Spinorii barionici U_b pot fi caracterizați prin sarcina de izospin $I_3 = 1/2$ (proton) sau $-1/2$ (neutron):

$$U_{b;I_3=\frac{1}{2},\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}}(x) = \begin{pmatrix} U_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_{b;I_3=-\frac{1}{2},\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}}(x) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

A.2. Operatorul de câmp.

► Impunând

$$\langle U_{\mathbf{p},\lambda}, U_{\mathbf{p}',\lambda'} \rangle = \langle V_{\mathbf{p},\lambda}, V_{\mathbf{p}',\lambda'} \rangle = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \langle U_{\mathbf{p},\lambda}, V_{\mathbf{p}',\lambda'} \rangle = 0,$$

unde

$$\langle \psi, \chi \rangle = \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \chi(x),$$

operatorul de câmp admite dezvoltarea

$$\hat{\psi}_b = \sum_j (U_{b,j} b_j + V_{b,j} d_j^\dagger), \quad \sum_j \equiv \sum_l \sum_\lambda \int d^3p, \quad j \equiv (l, \mathbf{p}_j, \lambda_j). \quad (34)$$

► Hamiltonianul și densitatea de sarcină barionică au forma canonică:

$$\begin{aligned} : \hat{H} := : \int d^3x \mathcal{H} &:= \sum_j (E_j^+ \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + E_j^- \hat{d}_j^\dagger \hat{d}_j), \\ : \hat{Q}_b := : \int d^3x \hat{\psi}_b \gamma^0 \hat{\psi}_b &:= \sum_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \hat{d}_j^\dagger \hat{d}_j), \end{aligned} \quad (35)$$

astfel încât

$$[\hat{H}, \hat{b}_j^\dagger] = E_j^+ \hat{b}_j^\dagger, \quad [\hat{H}, \hat{d}_j^\dagger] = E_j^- \hat{d}_j^\dagger, \quad [\hat{Q}_b, \hat{b}_j^\dagger] = \hat{b}_j^\dagger, \quad [\hat{Q}_b, \hat{d}_j^\dagger] = -\hat{d}_j^\dagger.$$

A.3. Teoria câmpului cuantic termic.

- ▶ Atingerea echilibrului în sistemele mezoscopice are un sens fundamental termodinamic.
- ▶ Stările interesante pentru SN sunt cele termice la $T = 0$, corespunzătoare unui $\mu_b \neq 0$.
- ▶ Din punct de vedere cuantic, astfel de stări se prepară cu ajutorul operatorului statistic

$$\hat{\rho} = Z^{-1} \exp \left[-\frac{1}{T} (\hat{H} - \mu_b \hat{Q}_b) \right], \quad (36)$$

unde funcția de partiție $Z = \text{tr}(\hat{\rho})$ normalizează op. statistic.

- ▶ Valorile medii ale observabilelor se calculează efectuând urma pe întreg spațiul Fock: $\langle \hat{A} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{A}).$ (37)
- ▶ Calculând urma la nivelul produsului a doi operatori uni-particulă, rezultă:

$$\langle \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j'} \rangle = \frac{\delta(j, j')}{e^{(E_j^+ - \mu_b)/T} + 1}, \quad \langle \hat{d}_j^\dagger \hat{d}_{j'} \rangle = \frac{\delta(j, j')}{e^{(E_j^- + \mu_b)/T} + 1}. \quad (38)$$

- ▶ În limita $T \rightarrow 0$ se obține:

$$\langle \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j'} \rangle = \delta(j, j') \theta(\mu_b - E_j^+), \quad \langle \hat{d}_j^\dagger \hat{d}_{j'} \rangle = \delta(j, j') \theta(-\mu_b - E_j^-). \quad (39)$$

A.4. Calculul componentelor curentului barionic.

- ▶ Înlocuind dezvoltarea (34) și folosind ec. (39), rezultă:

$$J_b^\mu = \sum_{l_3} \sum_{\lambda} \int d^3p \left[\theta(\mu_{\text{eff}} - E_{\mathbf{p}-g\omega}^*) \bar{U}_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}} \gamma_\mu U_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}} - \theta(-\mu_{\text{eff}} - E_{\mathbf{p}+g\omega}^*) \bar{V}_{\tilde{\mathbf{k}},\lambda}^{\text{lib}} \gamma_\mu V_{\tilde{\mathbf{k}},\lambda}^{\text{lib}} \right], \quad (40)$$

unde $\mu_{\text{eff}} = \mu_b - g\omega_0$.

- ▶ Folosind ec. (32), se poate arăta că

$$\bar{V}_{\tilde{\mathbf{k}},\lambda}^{\text{lib}} \gamma_\mu V_{\tilde{\mathbf{k}},\lambda}^{\text{lib}} = (\bar{U}_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}} \gamma_\mu U_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}})^*. \quad (41)$$

- ▶ Suma după izospin furnizează un factor 2.
- ▶ Deoarece $E_{\mathbf{p} \pm g\omega}^*$ nu depinde de λ , suma poate fi efectuată la nivelul spinorilor.

A.4.1. Anularea componentei spațiale J_b^ℓ .

- Pentru partea spațială, avem:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda} \bar{U}_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}} \gamma^\ell U_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}} &= \frac{1}{16\pi^3} \sum_{\lambda} (\kappa_+ \quad -2\lambda\kappa_-) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_+ \\ 2\lambda\kappa_- \end{pmatrix} \xi_\lambda^\dagger \sigma^k \xi_\lambda \\ &= \frac{|\mathbf{k}|}{4\pi^3 k^0} \sum_{\lambda} \lambda \xi_\lambda^\dagger \sigma^\ell \xi_\lambda.\end{aligned}\quad (42)$$

- Efectuăm ultima sumă pentru cazul particular $\ell = 3$:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda} \lambda \xi_\lambda^\dagger \sigma^3 \xi_\lambda &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ e^{\frac{i\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{\frac{i\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-\frac{i\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} \\ e^{\frac{i\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \cos \vartheta = \frac{k^z}{|\mathbf{k}|}.\end{aligned}\quad (43)$$

- Relația de mai sus se poate generaliza pentru $\ell = 1$ și 2:

$$\sum_{\lambda} \lambda \xi_\lambda^\dagger \sigma^\ell \xi_\lambda = \frac{k^\ell}{|\mathbf{k}|} \Rightarrow \sum_{\lambda} \bar{U}_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}} \gamma^\ell U_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}} = \frac{k^\ell}{4\pi^3 k^0}.\quad (44)$$

- Înlocuind rezultă:

$$J_b^\ell = \frac{1}{2\pi^3} \int d^3p \left[\frac{k^\ell \theta(\mu_b - E_p^+)}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_*^2}} - \frac{\tilde{k}^\ell \theta(-\mu_b - E_p^-)}{\sqrt{\tilde{\mathbf{k}}^2 + m_*^2}} \right]. \quad (45)$$

- Schimbând variabila de integrare în primul termen la $\mathbf{K} = \mathbf{k} = \mathbf{p} - g_\omega \boldsymbol{\omega}$ iar în al doilea termen la $\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{p} + g_\omega \boldsymbol{\omega}$, rezultă:

$$J_b^\ell = \frac{1}{2\pi^3} \int \frac{d^3K K^\ell}{\sqrt{\mathbf{K}^2 + m_*^2}} [\theta(\mu_{\text{eff}} - E_K^*) - \theta(-\mu_{\text{eff}} - E_K^*)].$$

- Deoarece integrandul este impar în raport cu schimbarea $K^\ell \rightarrow -K^\ell$, rezultatul este nul:

$$J_b^\ell = 0 \Rightarrow m_\omega^2 \omega^\ell = 0. \quad (46)$$

- De asemenea, spectrul energetic se simplifică la:

$$E_p^\pm = \pm g_\omega \omega_0 + E_p^*, \quad \mathbf{k} = \tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{p}, \quad k^0 = \tilde{k}^0 = E_p^*. \quad (47)$$

A.4.2. Densitatea barionică n_b și nivelul Fermi.

- Pentru partea temporală, avem

$$\sum_{\lambda} \bar{U}_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}} \gamma^0 U_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}} = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{\lambda} \xi_{\lambda}^{\dagger} \xi_{\lambda} = \frac{1}{4\pi^3}. \quad (48)$$

- Densitatea barionică devine:

$$J_b^0 \equiv n_b = \int \frac{d^3p}{2\pi^3} [\theta(\mu_{\text{eff}} - E_{\mathbf{p}}^*) - \theta(-\mu_{\text{eff}} - E_{\mathbf{p}}^*)]. \quad (49)$$

- Ținând cont că $E_{\mathbf{p}}^*$ nu depinde de direcția lui $\mathbf{p}$, integrala poate fi calculată în coordonate sferice:

$$\begin{aligned} n_b &= \frac{2}{\pi^2} \text{sgn}(\mu_{\text{eff}}) \int_0^{\infty} dp p^2 \theta(|\mu_{\text{eff}}| - E_p^*) \\ &= \frac{2p_f^3}{3\pi^2} \times \text{sgn}(\mu_{\text{eff}}) \theta(E_f - m_*), \end{aligned} \quad (50)$$

unde $E_f = |\mu_{\text{eff}}|$ și $p_f = \sqrt{E_f^2 - m_*^2}$.

- Pentru $n_b > 0$, p_f și E_f pot fi obținute prin

$$p_f = \left(\frac{3\pi^2}{2} n_b \right)^{1/3}, \quad E_f = \sqrt{p_f^2 + m_*^2}. \quad (51)$$

A.5. Densitatea scalară n_s și valoarea lui σ .

- ▶ Valoarea medie a mezonului σ este dată de

$$m_\sigma^2 \sigma = g_\sigma n_s, \quad n_s = \langle : \hat{\psi}_b \hat{\psi}_b : \rangle.$$

- ▶ Procedând ca și mai sus, rezultă:

$$n_s = \sum_{l_3} \sum_{\lambda} \int d^3 p \left[\theta(\mu_b - E_p^+) \bar{U}_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}} U_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}} - \theta(-\mu_b - E_p^-) \bar{V}_{\tilde{\mathbf{k}},\lambda}^{\text{lib}} V_{\tilde{\mathbf{k}},\lambda}^{\text{lib}} \right].$$

- ▶ Suma după λ poate fi calculată:

$$\sum_{\lambda} \bar{U}_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}} U_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{lib}} = \frac{m_*}{4\pi^3 k^0}, \quad \sum_{\lambda} \bar{V}_{\tilde{\mathbf{k}},\lambda}^{\text{lib}} V_{\tilde{\mathbf{k}},\lambda}^{\text{lib}} = \frac{m_*}{4\pi^3 \tilde{k}^0},$$

unde $k^0 = \tilde{k}^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_*^2}$.

- ▶ Pentru $n_b > 0$, $p_f > 0$ și deci $\theta(E_f - m_*) = 1$, a.î.

$$\begin{aligned} g_\sigma \sigma &= \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \int_0^{p_f} \frac{dp p^2 m_*}{\sqrt{p^2 + m_*^2}} \\ &= \left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \frac{m_*}{\pi^2} \left(E_f p_f + m_*^2 \ln \frac{m_*}{E_f + p_f} \right), \end{aligned} \quad (52)$$

unde p_f și E_f sunt dați în ec. (51) iar $m_* = m - g_\sigma \sigma$.

A.6. Densitatea de energie și presiunea.

- ▶ Luând ca parametru independent n_b (și deci $p_f = 3\pi^2 n_b/2$), ecuația de stare poate fi generată sub forma $\epsilon(n_b)$ și $P(n_b)$.
- ▶ Procedând ca și pentru calcularea lui n_b , se poate arăta că

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \langle : \hat{\psi}_b \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}_t \hat{\psi}_b : \rangle &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 [E_p^+ \theta(\mu_{\text{eff}} - E_p^*) + E_p^- \theta(-\mu_{\text{eff}} - E_p^*)] \\ &= g_\omega \omega_0 n_b + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{p_f} dp p^2 E_p^*. \end{aligned} \quad (53)$$

- ▶ Înlocuind rezultatul de mai sus în ec. (21) și (22), rezultă pentru ϵ și P :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2} (m_\sigma^2 \sigma^2 + m_\omega^2 \omega_0^2) + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{p_f} dp p^2 E_p^*, \\ P &= \frac{1}{2} (-m_\sigma^2 \sigma^2 + m_\omega^2 \omega_0^2) + \frac{2}{3\pi^2} \int_0^{p_f} \frac{dp p^4}{E_p^*}. \end{aligned} \quad (54)$$

- ▶ Integralele de mai sus pot fi calculate analitic (vezi prob. 7a din cursul 11):

$$\begin{aligned} \int_0^{p_f} dp p^2 E_p^* &= \frac{1}{8} \left[p_f E_f (p_f^2 + E_f^2) + m_*^4 \ln \frac{m_*}{p_f + E_f} \right], \\ \int_0^{p_f} \frac{dp p^4}{E_p^*} &= \frac{1}{8} \left[p_f E_f (5p_f^2 - 3E_f^2) - 3m_*^4 \ln \frac{m_*}{p_f + E_f} \right]. \end{aligned} \quad (55)$$