Astrofizică stelară
Cursul 11

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Conținutul cursului

Capitolul V. Modele politrope.

- V.1. Ecuația Lane-Emden.
- **V.2. Ecuația Tolman-Oppenheimer-Volkoff.**
- V.3. Masa maximă a stelelor neutronice.
- V.4. Teoria nucleară de câmp.
- V.5. Echilibrul β în stelele neutronice. Materia *nep*μ.

V.2. Ecuația Tolman-Oppenheimer-Volkoff.
V.2.1. Câmpuri gravitaționale intense.

- Relația masă-volum arată că V_* a piticelor albe susținute de presiunea de degenerare a e^- nerelativiști scade invers prop. cu M_*.
- Pe măsură ce R_* scade și M_* crește, e^- devin ultrarelativiști.
- Pentru M_* peste limita Chandrasekhar, mecanismul de susținere prin presiunea de degenerare a electronilor nu mai este suficient - în acest caz, materia nucleară a stelei se neutronizează.
- Stelele neutronice sunt compuse preponderent din neutroni (90% din nucleoni sunt neutroni, față de $\sim 50\%$ în cazul materiei nucleare normale).
- Considerând o stea cu $M_* = 1,44 M_\odot$ (limita Chandrasekhar) alcătuită din nucleoni la $\rho_{\rm nucl} = 2,3 \times 10^{17}\,{\rm kg/m^3}$, rezultă

$$R_* = \left(\frac{3M_*}{4\pi\rho_{\rm nucl}}\right)^{1/3} \simeq 14,4\ {\rm km} \Rightarrow \frac{R_{\rm Sch}}{R_*} = \frac{2GM_*}{R_* c^2} \simeq 0,21, \qquad (1)$$

ceea ce indică faptul că intensitatea câmpului gravitațional este suficient de mare încât să fie necesară tratarea acestora în cadrul teoriei relativității generale (TRG).

- Stelele neutronice care rezultă în urma exploziei de supernovă se nasc extrem de fierbinți ($T \simeq 5,8 \times 10^{11}\,K$ sau $k_B T \simeq 50\ \mathrm{MeV}$), însă temperatura acestora se reduce la sub $1\ \mathrm{MeV}$ ($\simeq 10^{10}\,\mathrm{K}$) după câteva minute.
- Urmează o perioadă de $\sim 10^5 - 10^6\,\mathrm{ani}$ de răcire până la $T \simeq 10^6\,\mathrm{K}$ prin emisia de neutrini datorată proceselor de tip URCA,[1]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Direct:} \qquad && n &\to p + e^- + \bar{\nu}_e, \\
&& p + e^- &\to n + \nu_e, \\
\mathrm{Indirect:} \qquad && (n,p) + n &\to (n,p) + p + e^- + \bar{\nu}_e, \\
&& (n,p) + p + e^- &\to (n,p) + n + \nu_e.
\end{aligned} \tag{2}
$$

- Sub această temperatură, procesul dominant de răcire devine emisia de fotoni (deși $10^6\,\mathrm{K} \simeq 173\,T_{\mathrm{ef};\odot}$, $L \simeq 0,3 L_\odot$).
- Față de $m_n c^2 \simeq 940\ \mathrm{MeV}$, temperatura tipică a stelelor neutronice este neglijabilă $\Rightarrow$ T e neglijabilă, putând fi folosită aproximația materiei degenerate.

[1] Procesele poartă acest nume în amintirea cazinoului omonim din Rio de Janeiro, unde G. Gamow și M. Schenberg au opinat că energia din nucleul supernovelor dispare la fel de repede ca și banii la jocul de ruletă.

V.2.2. Metrica pentru stele statice cu simetrie sferică.

- Pentru modelarea stelelor având câmpuri gravitaționale intense, presupunem că acestea sunt statice și au simetrie sferică.
- Considerând că steaua este în echilibru termondinamic global, tensorul energie-impuls (TEI) ia forma corespunzătoare fluidului perfect:
$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)\frac{u^\mu u^\nu}{c^2} + P g^{\mu\nu}, \qquad (3)$$
unde $\epsilon = \rho c^2$ este densitatea de energie (inclusiv energia de repaus), P este presiunea izotropă, iar u^μ este cuadriviteza fluidului.
- Elementul de linie $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ este:
$$ds^2 = -e^{2\Phi} d(ct)^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \qquad (4)$$
unde funcțiile Φ și Λ depind doar de coordonata radială.
- Impunând ca fluidul stelar să fie în repaus, cuadrivectorul de viteză poate fi scris după cum urmează:
$$u = u^t \frac{\partial}{\partial(ct)}. \qquad (5)$$
- Impunând $u^2 = -c^2$, rezultă:
$$u^t = ce^{-\Phi}, \qquad u^r = 0, \qquad u^\theta = 0, \qquad u^\varphi = 0. \qquad (6)$$

V.2.3. Repere locale.

- Elementul de linie poate fi pus sub forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \omega^{\hat{\alpha}} \otimes \omega^{\hat{\beta}}, \tag{7}$$

unde $\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ este metrica spațiului Minkowski iar $\omega^{\hat{\alpha}} = \omega^{\hat{\alpha}}_\mu dx^\mu$ sunt unu-formele reperului local:

$$\omega^{\hat{t}} = e^\Phi d(ct), \quad \omega^{\hat{r}} = e^\Lambda dr, \quad \omega^{\hat{\theta}} = r d\theta, \quad \omega^{\hat{\varphi}} = r \sin\theta d\varphi. \tag{8}$$

- Vectorii duali $e_{\hat{\alpha}} = e^\mu_{\hat{\alpha}} \partial_\mu$ satisfac:

$$\langle \omega^{\hat{\alpha}}, e_{\hat{\beta}} \rangle = \omega^{\hat{\alpha}}_\mu e^\mu_{\hat{\beta}} = \delta^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}}, \qquad \eta^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} e^\mu_{\hat{\alpha}} e^\nu_{\hat{\beta}} = g^{\mu\nu}, \tag{9}$$

unde $g^{\mu\nu}$ este inversul tensorului metric ($g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu{}_\lambda$).
- Tetrada $\{e_{\hat{t}}, e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\varphi}}\}$ duală unu-formelor din ec. (8) este:

$$e_{\hat{t}} = e^{-\Phi} \partial_{ct}, \qquad e_{\hat{r}} = e^{-\Lambda} \partial_r, \qquad e_{\hat{\theta}} = \frac{\partial_\theta}{r}, \qquad e_{\hat{\varphi}} = \frac{\partial_\varphi}{r \sin\theta}. \tag{10}$$

- Componentele vitezei (6) și ale tensorului energie-impuls (3) se pot scrie în raport cu tetrada după cum urmează:

$$u^{\hat{\alpha}} = \omega^{\hat{\alpha}}_\mu u^\mu = (c, 0, 0, 0)^T, \quad T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \omega^{\hat{\alpha}}_\mu \omega^{\hat{\beta}}_\nu T^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\epsilon, P, P, P). \tag{11}$$

V.2.4. Unu-formele de conexiune.

- Unu-formele de conexiune $\omega^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}}$ pot fi obținute calculând derivata exterioară a unu-formelor $\omega^{\hat{\alpha}}$:

$$d\omega^{\hat{\alpha}} + \omega^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}} \wedge \omega^{\hat{\beta}} = 0. \tag{12}$$

- Pentru unu-formele din ec. (8) rezultă:

$$\begin{aligned} \omega^{\hat{t}}{}_{\hat{r}} &= \Phi' e^{-\Lambda}\,\omega^{\hat{t}}, & \omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{r}} &= r^{-1} e^{-\Lambda}\,\omega^{\hat{\theta}}, \\ \omega^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}} &= r^{-1} e^{-\Lambda}\,\omega^{\hat{\varphi}}, & \omega^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\theta}} &= r^{-1} \cot\theta\,\omega^{\hat{\varphi}}. \end{aligned} \tag{13}$$

- Folosind definiția coeficienților de conexiune:

$$\omega^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}} = \Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}\omega^{\hat{\gamma}}, \tag{14}$$

se obtin următorii coeficienți de conexiune:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\hat{t}}{}_{\hat{r}\hat{t}} &= \Phi' e^{-\Lambda}, & \Gamma^{\hat{\theta}}{}_{\hat{r}\hat{\theta}} &= r^{-1} e^{-\Lambda}, \\ \Gamma^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}\hat{\varphi}} &= r^{-1} e^{-\Lambda}, & \Gamma^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\varphi}} &= r^{-1} \cot\theta. \end{aligned} \tag{15}$$

V.2.5. Doi-formele de curbură.

- Doi-formele de curbură $\mathcal{R}^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta} = d\omega^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta} + \omega^{\hat\alpha}{}_{\hat\gamma}\omega^{\hat\gamma}{}_{\hat\beta}$ au expresiile:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\hat t\hat r} &= E\omega^{\hat t}\wedge\omega^{\hat r}, & \mathcal{R}^{\hat t\hat\theta} &= \overline{E}\omega^{\hat t}\wedge\omega^{\hat\theta},\\ \mathcal{R}^{\hat t\hat\varphi} &= \overline{E}\omega^{\hat t}\wedge\omega^{\hat\varphi}, & \mathcal{R}^{\hat r\hat\theta} &= \overline{F}\omega^{\hat r}\wedge\omega^{\hat\theta},\\ \mathcal{R}^{\hat r\hat\varphi} &= \overline{F}\omega^{\hat r}\wedge\omega^{\hat\varphi}, & \mathcal{R}^{\hat\theta\hat\varphi} &= F\omega^{\hat\theta}\wedge\omega^{\hat\varphi}, \end{aligned} \tag{16}$$

unde funcțiile E, $\overline{E}$, F și $\overline{F}$ sunt:

$$E = -e^{-2\Lambda}(\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda'),$$
$$\overline{E} = -r^{-1}e^{-2\Lambda}\Phi', \qquad F = r^{-2}(1 - e^{-2\Lambda}), \qquad \overline{F} = r^{-1}e^{-2\Lambda}\Lambda'. \tag{17}$$

- Ținând cont de relația

$$\mathcal{R}^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta} = \frac{1}{2}R^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta\hat\gamma\hat\delta}\omega^{\hat\gamma}\wedge\omega^{\hat\delta}, \tag{18}$$

pot fi obținute componentele $R^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta\hat\gamma\hat\delta}$ ale tensorului Riemann:

$$\begin{aligned} R^{\hat t}{}_{\hat r\hat t\hat r} &= E, & R^{\hat t}{}_{\hat\theta\hat t\hat\theta} &= R^{\hat t}{}_{\hat\varphi\hat t\hat\varphi} = \overline{E},\\ R^{\hat\theta}{}_{\hat\varphi\hat\theta\hat\varphi} &= F, & R^{\hat r}_{\hat\theta\hat r\hat\theta} &= R^{\hat r}{}_{\hat\varphi\hat r\hat\varphi} = \overline{F}. \end{aligned} \tag{19}$$

V.2.6. Tensorul Einstein.

- Tensorul Ricci $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = R^{\hat{\gamma}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}\hat{\beta}}$ are componentele:

$$R_{\hat{t}\hat{t}} = -E - 2\overline{E}, \qquad R_{\hat{r}\hat{r}} = E + 2\overline{F}, \qquad R_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = R_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \overline{E} + F + \overline{F}. \tag{20}$$

- Scalarul Ricci $R = R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\alpha}}$ este:

$$R = 2(E + F) + 4(\overline{E} + \overline{F}). \tag{21}$$

- Neglijând contribuția constantei cosmologice, tensorul Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu}$ are componentele:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = F + 2\overline{F}, \qquad G_{\hat{r}\hat{r}} = -(2\overline{E} + F),$$
$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = -(E + \overline{E} + \overline{F}). \tag{22}$$

V.2.7. Ecuațiile Einstein.

- Ecuațiile Einstein sunt:

$$G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}. \tag{23}$$

- Componentei $(\hat{t}, \hat{t})$ îi corespunde:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r(1 - e^{-2\Lambda})\right] = \frac{8\pi\rho G}{c^2}. \tag{24}$$

- Notând

$$M(r) = \frac{rc^2}{2G}(1 - e^{-2\Lambda}) \Rightarrow e^{2\Lambda} = \left[1 - \frac{2M(r)G}{rc^2}\right]^{-1}, \tag{25}$$

rezultă:

$$M(r) = \int_0^r dr'\, 4\pi r'^2 \rho(r'). \tag{26}$$

- Componentei $(\hat{r}, \hat{r})$ îi corespunde:

$$\frac{2}{r} e^{-2\Lambda}\Phi' - \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\Lambda}) = \frac{8\pi G}{c^4} P \Rightarrow \frac{d\Phi}{dr} = \frac{MG}{r^2c^2} \frac{1 + \dfrac{4\pi r^3}{Mc^2}P}{1 - \dfrac{2MG}{rc^2}}. \tag{27}$$

- În limita $c \to \infty$, $c^2\Phi' \to MG/r^2$.

V.2.8. Ecuația echilibrului hidrostatic.

- Ecuația de conservare a TEI este:

$$\nabla_{\hat{\beta}} T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = e^{\mu}_{\hat{\beta}} \partial_\mu T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + \Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} T^{\hat{\gamma}\hat{\beta}} + \Gamma^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} T^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} = 0. \tag{28}$$

- În cazul $\hat{\alpha} = \hat{r}$, se obține ecuația echilibrului hidrostatic:

$$e^{-\Lambda} \frac{dP}{dr} + \Phi' e^{-\Lambda} (P + \rho c^2) = 0. \tag{29}$$

- Înlocuind Φ' folosind eq. (27), rezultă ecuația **Tolman-Oppenheimer-Volkoff** (TOV):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{MG}{r^2} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{1 + \dfrac{4\pi r^3}{Mc^2} P}{1 - \dfrac{2MG}{rc^2}}, \tag{30}$$

unde $\rho = \epsilon / c^2$ reprezintă densitatea de masă aferentă lui ϵ.

- În limita $c \to \infty$, $\frac{1}{c^2}(\epsilon + P) \to \rho$ iar ec. TOV se reduce la ecuația echilibrului hidrostatic, $dP/dr = -GM(r)\rho/r^2$.
- Ecuația TOV reprezintă **generalizarea relativistă a ecuației echilibrului hidrostatic**.

V.2.9. Ecuațiile de structură în TRG.

- Ecuațiile structurii stelare în cadrul Newtonian și în TRG sunt:

$$\begin{aligned}
&\text{(Newtonian)} && \text{(TRG)} \\
&\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho, && \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \\
&\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho M G}{r^2}, && \frac{dP}{dr} = -\frac{\rho M G}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{M c^2}\right)}{1 - 2MG/rc^2}, \\
&g = \frac{GM}{r^2}, && c^2 \frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM}{r^2} \frac{1 + \frac{4\pi r^3 P}{Mc^2}}{1 - \frac{2MG}{rc^2}}.
\end{aligned} \tag{31}$$

- În origine avem $M(0) = 0$ și $P(0) = P_c$.
- Pentru $r > R_*$ se impune joncțiunea cu soluția Schwarzschild:

$$M(r) = M_*, \qquad P(r) = 0, \qquad e^{2\Phi(r)} = 1 - \frac{2GM_*}{rc^2}. \tag{32}$$

- În ec. TOV, P și $\epsilon = \rho c^2$ contribuie pe picior de egalitate, ducând la o creștere mai bruscă a presiunii și deci la configurații mai compacte.
- $M_* = M(R_*)$ reprezintă masa gravitațională, care apare în metrica Schwarzschild, determinând câmpul gravitațional în exteriorul stelei.
- Energia $\epsilon = \rho c^2$ poate fi împărțită în două contribuții: masa de repaus a barionilor, $\mu n_{\rm b} m_H c^2$; și energia internă (cinetică, de legătură, etc), $u = \epsilon - \mu n_{\rm b} m_H c^2$.
- e^Λ e responsabil pentru contracția lungimilor $\Rightarrow$ volumul conținut în bila de rază r poate fi calculat folosind

$$\mathcal{V}(r) = \int_r d\Sigma_\mu \frac{u^\mu}{c} = 4\pi \int_0^r dr\, r^2 e^\Lambda, \qquad u^\mu = c(e^{-\Phi}, 0, 0, 0). \quad (33)$$

- Cantitatea de energie datorată materiei poate fi estimată conform:

$$M_0(r)c^2 + U(r) = 4\pi \int_0^r dr\, r^2 e^\Lambda \epsilon. \quad (34)$$

- Scriind $M(r)c^2 = M_0(r)c^2 + U(r) + \Omega(r)$, energia potențială gravitațională $\Omega(r)$ devine

$$\Omega(r) = -4\pi \int_0^r dr\, r^2 \epsilon \left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2} - 1\right]. \quad (35)$$

- Atracția gravitațională reduce $M_* < M_0(R_*) + U(R_*)/c^2$.

V.2.10. Stele incompresibile.

- În cazul când $\epsilon = \epsilon_c = \mathrm{const}$, masa $M(r)$ se poate calcula exact:

$$M(r) = \frac{4\pi r^3}{3}\rho_c = \frac{r^3}{R_*^3}M_*. \tag{36}$$

- Ecuația TOV se reduce la:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G r(\epsilon_c + P)(\epsilon_c + 3P)}{3c^4\left(1 - \frac{8\pi r^2 G}{3c^4}\epsilon_c\right)}. \tag{37}$$

- Utilizând metoda separării variabilelor, se obține:

$$\int_{P(r)}^{0} \frac{dP}{(P+\epsilon_c)\left(P + \frac{\epsilon_c}{3}\right)} = -\frac{4\pi G}{c^4}\int_r^{R_*} \frac{r\,dr}{1 - \frac{8\pi r^2 G}{3c^4}\epsilon_c}. \tag{38}$$

- Se obține soluția:

$$\frac{P(r) + \epsilon_c}{3P(r) + \epsilon_c} = \left(\frac{1 - \frac{2MG}{R_* c^2}}{1 - \frac{2MG}{R_* c^2}\frac{r^2}{R_*^2}}\right)^{1/2}. \tag{39}$$

- Prelucrând ec. (39), se obține:

$$\frac{P(r)}{\epsilon_c} = \frac{\left(1 - \frac{2GM_* r^2}{R_*^3 c^2}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2GM_*}{R_* c^2}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2GM_*}{R_* c^2}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2GM_* r^2}{R_*^3 c^2}\right)^{1/2}}. \tag{40}$$

- Evaluând relația de mai sus pentru $r = 0$, rezultă:

$$\frac{P_c}{\epsilon_c} = \frac{1 - \left(1 - \frac{2GM_*}{R_* c^2}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2GM_*}{R_* c^2}\right)^{1/2} - 1}. \tag{41}$$

- Numitorul rămâne pozitiv și P_c rămâne finit când:

$$\frac{2GM_*}{R_* c^2} < \frac{8}{9}. \tag{42}$$

- Raza orizontului de evenimente al unei găuri negre de masă M_* satisface $2GM_*/R_* c^2 = 1$.
- Se poate arăta că restricții similare celei din ec. (42) se regăsesc și în cazuri mai generale, atunci când se impun un comportament nesingular al metricii și o presiune monoton descrescătoare.

Probleme

1. Folosind schimbarea de variabilă

$$\zeta(r) = \sqrt{1 - \frac{2GM_* r^2}{R_*^3 c^2}} \tag{43}$$

în cazul când $\epsilon = \epsilon_c = \mathrm{const}$, să se rezolve următoarele cerințe:

   a) Să se arate că presiunea $P(r)$ (40) are expresia:

$$P(\zeta) = \epsilon_c \frac{\zeta - \zeta_*}{3\zeta_* - \zeta}, \qquad \zeta_* = \sqrt{1 - \frac{2GM_*}{R_* c^2}}. \tag{44}$$

   b) Să se demonstreze că funcția Φ satisface ecuația:

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = \frac{1}{\zeta - 3\zeta_*}. \tag{45}$$

   c) Impunând condiția $e^{2\Phi} = 1 - \frac{2GM_*}{R_* c^2}$ când $r = R_*$, să se arate că

$$\Phi(\zeta) = \ln\left(\frac{3\zeta_* - \zeta}{2}\right) = \ln\frac{1}{2}\left(3\sqrt{1 - \frac{2GM_*}{R_* c^2}} - \sqrt{1 - \frac{2GM_* r^2}{R_*^3 c^2}}\right).$$

   d) Știind că $dt/d\tau = e^{-\Phi}$, să se găsească valoarea lui $x = 2GM_*/R_* c^2$ pentru care $dt/d\tau = 2$ în centrul stelei ($r = 0$). [R: $x = 5/9$]

   e) Pentru cazul limită $x = \frac{8}{9}$, să se găsească $dt/d\tau$ pe suprafața stelei și în centrul acesteia. [R: 3 și ∞]

Probleme

2. Aplicând ec. (35) pentru calculul energiei potențiale gravitaționale în cazul modelului materiei incompresibile, să se rezolve următoarele cerințe:

   a) Să se calculeze $\Omega(r)$.

   $$\left[\text{R:}\Omega(r) = M(r)c^2 - \frac{3rc^4}{4G}\left(\frac{\arcsin\sqrt{2M(r)G/rc^2}}{\sqrt{2M(r)G/rc^2}} - \sqrt{1-\frac{2M(r)G}{rc^2}}\right)\right]$$

   b) Să se calculeze Ω_*/M_*c^2 ca funcție de $x = 2GM_*/R_*c^2$. [R: $1 + \frac{3}{2x}\sqrt{1-x} - \frac{3}{2x^{3/2}}\arcsin\sqrt{x}$]

   c) Să se arate că în limita Newtoniană ($c \to \infty$) se reproduce expresia $\Omega_*^{\mathrm{Newt}} = -3GM_*^2/5R_*$ și să se găsească prima corecție la această expresie. [R: $\Omega_* = \Omega_*^{\mathrm{Newt}}(1 + \frac{15}{28}x + \dots)$]

   d) Să se calculeze raportul $\Omega_*/\Omega_*^{\mathrm{Newt}}$. [R: $\frac{10}{3x}(\frac{3}{2x^{3/2}}\arcsin\sqrt{x} - \frac{3}{2x}\sqrt{1-x} - 1)$]

   e) Să se găsească $\Omega_* = \Omega(R_*)$ și $\Omega_*/\Omega_*^{\mathrm{Newt}}$ pentru $x = \frac{8}{9}$. [R: $\Omega_* \simeq -0,64M_*c^2$, $\Omega_*/\Omega_*^{\mathrm{Newt}} \simeq 2,40$]

   f) Să se găsească x când $\Omega_* = -\frac{1}{2}M_*c^2$. [R: $x \simeq 0,812$]

   g) Să se găsească x când $\Omega_* = 2\Omega_*^{\mathrm{Newt}}$. [R: $x \simeq 0,797$]

Probleme

3. Considerăm nucleul unei stele masive în pragul exploziei de supernovă. Considerăm că o parte având $M = M_\odot$, fiind inițial susținută de presiunea de degenerare a electronilor ($Z \simeq A/2$), colapsează la stadiul de stea neutronică.
   a) Folosind relația masă-volum, $M_* V_* \simeq 2 \times 10^{-6} M_\odot V_\odot$, Să se calculeze raza nuceului înaintea colapsului. [R: $R_{\rm wd} \simeq 8770$ km]
   b) Să se calculeze raza nucleului după colaps, presupunând că densitatea medie a acestuia este egală cu cea a materiei nucleare, $\rho = \rho_0 \simeq 2,3 \times 10^{17}\ \mathrm{kg/m^3}$. [R: $R_{\rm ns} \simeq 12,73$ km]
   c) Să se estimeze durata colapsului în ipoteza căderii libere. [R: $t_{\rm cl} \simeq 2,51$ s]
   d) Să se calculeze diferența de energie potențială gravitațională între cele două configurații. [R: $\Delta\Omega = \Omega_{\rm ns} - \Omega_{\rm wd} \simeq 4,14 \times 10^{45}$ J]
   e) Considerând $m_n = 1,67 \times 10^{-27}$ kg, să se calculeze câți neutroni (liberi) sunt în relicva neutronică. [R: $1,19 \times 10^{57}$]
   f) Considerând că teorema virialului este validă, energia internă variază cu $\Delta U = -\Delta\Omega/2$. Să se calculeze energia per nucleon și variația temperaturii acestora presupunând că fiecare nucleon dispune de 3 grade de libertate. [$k_B \Delta T \simeq 7,25$ MeV]

Probleme

4. **Invarianța de scală a ec. TOV.** Să se arate că ec. TOV nu-și schimbă forma în urma transformării

$$\overline{P} = \frac{P}{a}, \qquad \overline{\epsilon} = \frac{\epsilon}{a}, \qquad \overline{r} = r a^{1/2}, \qquad \overline{M} = M a^{1/2}.$$

5. **Adimensionalizarea ec. de structură.** Pentru obținerea soluțiilor numerice, ec. (31) trebuie adimensionalizate. Considerând $M_{\rm ref}$ arbitrară, introducem

$$R_{\rm ref} = \frac{2GM_{\rm ref}}{c^2}, \qquad \epsilon_{\rm ref} = \frac{3M_{\rm ref}c^2}{4\pi R_{\rm ref}^3}, \qquad P_{\rm ref} = \epsilon_{\rm ref}.$$

Notând $\overline{A} = A/A_{\rm ref}$ pentru o mărime oarecare A, să se scrie ec. (31) în această convenție.

$$\left[\text{R:} \quad \frac{d\overline{M}}{d\overline{r}} = 3\overline{r}^2\overline{\epsilon}, \quad \frac{d\overline{P}}{d\overline{r}} = -\frac{(\overline{\epsilon}+\overline{P})(\overline{M}+3\overline{r}^3\overline{P})}{2\overline{r}(\overline{r}-\overline{M})}, \quad \frac{d\Phi}{d\overline{r}} = \frac{\overline{M}+3\overline{r}^3\overline{P}}{2\overline{r}(\overline{r}-\overline{M})}.\right]$$

Probleme

6. În limita ultrarelativistă, $\epsilon = 3P$.

   a) Să se scrie ecuația TOV (30) pentru acest caz.

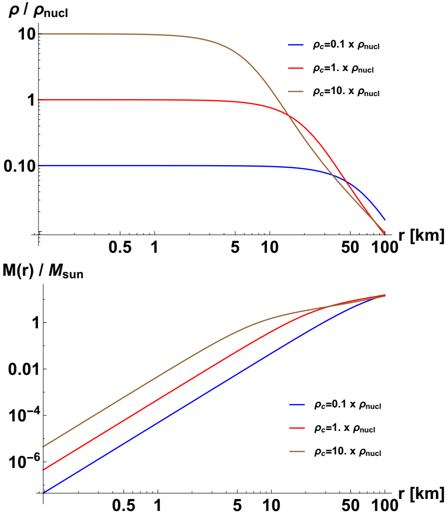
$$\frac{d\epsilon}{dr} = -\frac{4GM\epsilon}{r^2c^2}\frac{1+\dfrac{4\pi r^3}{3Mc^2}\epsilon}{1-\dfrac{2MG}{rc^2}}. \qquad (46)$$

   b) Să se arate că $\epsilon = Kr^n$ satisface ec. (46) când $n = -2$ și $K = 3c^4/56\pi G$.

   c) Să se găsească valoarea lui K după adimensionalizare. [R: $K = 1/7$]

   d) Să se arate că în acest caz, masa crește liniar cu r, în timp ce presiunea tinde doar asimptotic către 0. [R: $\overline{M} = 4\pi\overline{r}/7$]

   e) Să se rezolve numeric ec. (46) și să se verifice că cele două trăsături de mai sus sunt valabile și pentru cazul când ρ este finit în $r = 0$.



Probleme

7. **Fluidul Fermi-Dirac perfect.** Limita ultrarelativistă discutată la problema anterioară este o idealizare validă doar în zona densităților mari. În zona exterioară a stelei, ρ scade sub densitatea nucleară și E_F devine comparabil cu $m_n c^2 = 940\,\mathrm{MeV}$ iar ec. de stare își începe tranziția către limita nerelativistă.
   a) Considerând distribuția Fermi-Dirac pentru particule relativiste, $f = \frac{g}{(2\pi)^3}[e^{(E_p - E_F)/T} + 1]^{-1} \to \frac{g}{(2\pi)^3}\theta(p_F - p)$, unde $p_F = \frac{1}{c}\sqrt{E_F^2 - m^2c^4}$ și $g = 2$ reprezintă gradul de degenerare per constituent, să se calculeze n, ϵ și P în funcție de p_F, E_F și m.

$$
\begin{aligned}
n =& \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}\,,\\
P =& \frac{1}{24\hbar^3c^3\pi^2}\left[cp_F E_F(5c^2p_F^2 - 3E_f^2) - 3m^4c^8\ln\frac{mc^2}{cp_F + E_F}\right],\\
\epsilon =& \frac{1}{8\hbar^3c^3\pi^2}\left[cp_F E_F(c^2p_F^2 + E_f^2) + m^4c^8\ln\frac{mc^2}{cp_F + E_F}\right].
\end{aligned}
$$

   b) Să se arate că $\frac{\partial\epsilon}{\partial n} = \frac{\epsilon + P}{n}$, ținând cont că $p_F = (3\pi^2\hbar^3 n)^{1/3}$ și $E_F = \sqrt{c^2p_F^2 + m^2c^4}$.

Probleme

7. **Fluidul Fermi-Dirac perfect.** (continuare)

   c) Să se exprime ϵ ca funcție de P în limita nerelativistă, $p_F \ll mc$.

$$\left[\mathrm{R:}\quad P = \frac{\hbar^2}{5m}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{\frac{2}{3}} n^{\frac{5}{3}}, \quad \epsilon = \frac{3P}{2} + nmc^2, \quad \epsilon = \frac{3P}{2} + \frac{m^4c^5}{\hbar^3}\left(\frac{g}{6\pi^2}\right)^{\frac{2}{5}}\left(\frac{5\hbar^3 P}{m^4c^5}\right)^{\frac{3}{5}}\right]$$

   d) Să se exprime ϵ ca funcție de P în limita ultrarelativistă, $p_F \gg mc$.

   [R: $P = \frac{\hbar c}{4}(\frac{6\pi^2}{g})^{\frac{1}{3}} n^{4/3}$, $\epsilon = 3P$]

   e) Să se rezolve numeric ecuațiile de structură folosind $M_{\mathrm{ref}} = M_\odot$ între limitele $\overline{P}_c = 10^{-4}$ și 10^4 și să se găsească masa maximă admisă de această ecuație de stare, precum și raza acestei configurații maximale. [R: $0,712 M_\odot$ și $9,18\ \mathrm{km}$]