Astrofizică stelară
Cursul 10

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Conținutul cursului

Capitolul V. Modele politrope.

- **V.1. Ecuația Lane-Emden.**
- V.2. Ecuația Tolman-Oppenheimer-Volkoff.
- V.3. Masa maximă a stelelor neutronice.
- V.4. Teoria nucleară de câmp.
- V.5. Echilibrul β în stelele neutronice. Materia *nep*μ.

V.1. Ecuația Lane-Emden.

V.1.1. Ecuația politropă.

- Rezolvarea ecuațiilor de structură stelară necesită cunoașterea ecuației de stare $P(\rho, T, X_i)$, prin intermediul căreia acestea devin cuplate.
- Partea de structură mecanică (care implică ρ și P) se decuplează de cea termică în cazul ecuației de stare politrope:

$$P = K\rho^{\Gamma}, \qquad \Gamma = 1 + \frac{1}{n}, \tag{1}$$

  unde K e o constantă iar n este indicele politrop.
- Această ecuație este validă în stelele unde transferul convectiv este dominant ($\Gamma \to \gamma$), precum și în nucleul degenerate al piticelor albe ($n = 3/2$ pentru cazul nerelativist, $n = 3$ pentru cazul ultrarelativist).
- În acest caz, e convenabilă cuplarea ecuației echilibrului hidrostatic cu ecuația de conservare a masei după cum urmează:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dP(r)}{dr}\right) = -4\pi G\rho(r). \tag{2}$$

V.1.2. Ecuația Lane-Emden.

- Este convenabilă introducerea funcției adimensionale $\theta(r)$:

$$\rho(r) = \rho_c \theta^n(r) \Rightarrow P(r) = P_c \theta^{n+1}(r), \tag{3}$$

unde ρ_c este densitatea centrală iar $P_c = K\rho_c^{(n+1)/n}$.

- Prin definiție, $\theta(r = 0) = 1$.
- Considerăm că suprafața stelei se găsește unde $\theta(r = R_*) = 0$.
- Având în vedere că:

$$\frac{1}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} = \frac{(n+1)P_c}{\rho_c} \frac{d\theta(r)}{dr}, \tag{4}$$

ecuația (2) se poate pune sub forma ecuației **Lane-Emden**:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \right) = -\theta^n(\xi), \tag{5}$$

unde $\xi = r/\alpha$ este definit în funcție de constanta α, introdusă prin:

$$\alpha^2 = \frac{(n+1)P_c}{4\pi G \rho_c^2} = \frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{(1-n)/n}. \tag{6}$$

- Suprafață stelară se găsește la $R_* = \alpha\xi_0$, unde ξ_0 este prima rădăcină a funcției $\theta(\xi)$.

V.1.3. Soluții particulare.

- În vecinătatea originii, se poate scrie

$$\theta(\xi) = 1 + \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=0} \xi + \dots . \tag{7}$$

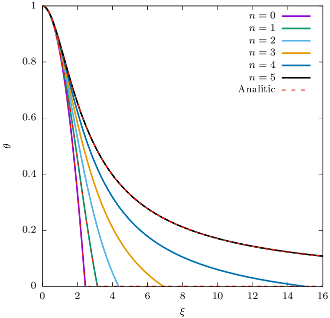
- Substituind expresia de mai sus în ec. (5), se poate vedea că membrul stâng rămâne finit când $\xi \to 0$ doar dacă

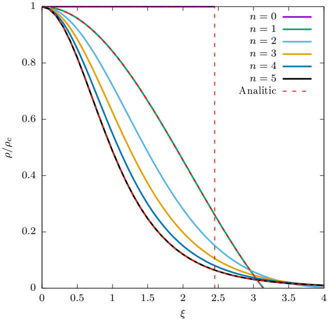
$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0. \tag{8}$$

- Ecuația Lane-Emden se poate rezolva analitic pentru $n = 0$, $n = 1$ și $n = 5$:

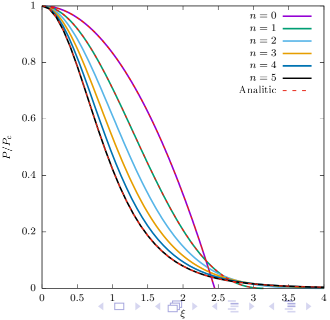
$$\begin{aligned} &(n = 0) && (n = 1) && (n = 5) \\ &\theta = 1 - \frac{\xi^2}{6}, && \theta = \frac{\sin\xi}{\xi}, && \theta = \left(1 + \frac{\xi^2}{3}\right)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{9}$$

- Cazul $n = 0$ corespunde unei stele cu $\rho = \rho_c = \mathrm{const}$, suprafața acesteia găsindu-se la $\xi_0 = \sqrt{6}$ $[\xi_0^2\theta'(\xi_0) = -2\sqrt{6}]$.
- Când $n = 1$, $\xi_0 = \pi$ $[\xi_0^2\theta'(\xi_0) = -\pi]$.
- Când $n = 5$, $\xi_0 \to \infty$ $[\lim_{\xi\to\infty} \xi^2\theta'(\xi) = -\sqrt{3}]$.
- Pentru $n \geq 5$, soluțiile ecuației Lane-Emden nu au rădăcini reale.





n	ξ_0	$\theta'(\xi_0)$
0	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}/3$
1	π	$-1/\pi$
2	4.353	-0.1272
3	6.897	-0.04243
4	14.972	-0.008018



V.1.4. Legătura cu parametrii stelei.

- Ecuația Lane-Emden (5) furnizează o familie de soluții (indexată după indicele politrop n).
- Odată stabilită valoarea lui n, profilul $\theta(\xi)$ este universal, descriind o clasă de stele care se pot diferenția prin rază și masă totală.
- Masa totală se poate găsi integrând densitatea până la R_*:

$$M_* = 4\pi \int_0^{R_*} dr\, r^2 \rho(r) = 4\pi \rho_c \alpha^3 \int_0^{\xi_0} d\xi\, \xi^2 \theta^n(\xi). \tag{10}$$

- Folosind ec. Lane-Emden pentru eliminarea lui $\theta^n(\xi)$, integrala se rezolvă imediat și rezultă:

$$\rho_c \alpha^3 = -\frac{M_*}{4\pi \xi_0^2 \theta'(\xi_0)} \Rightarrow M_* = -4\pi \xi_0^2 \theta'(\xi_0) \left[\frac{K(n+1)}{4\pi G}\right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n}, \tag{11}$$

unde semnul minus este necesar deoarece $\theta'(\xi_0) < 0$.

- Ținând cont că $\alpha = R_*/\xi_0$, rezultă:

$$M_* = -4\pi \xi_0^{(n+1)/(n-1)} \theta'(\xi_0) \left[\frac{K(n+1)}{4\pi G}\right]^{n/(n-1)} R_*^{(3-n)/(1-n)}. \tag{12}$$

V.1.5. Stele degenerate nerelativiste: relația masă-volum.

- În cazul când steaua este susținută de presiunea de degenerare a electronilor nerelativiști ($p_F \ll m_e c$), avem

$$P = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}\hbar^2}{5m_e}\left(\frac{\rho Z}{m_H A}\right)^{5/3} = K\rho^{\frac{5}{3}}, \quad K \simeq 9,915 \times 10^6 \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{\mathrm{N\,m^3}}{\mathrm{kg}^{5/3}}, \tag{13}$$

corespunzând unui indice politrop $n = 3/2$.

- Rezolvând numeric ecuația Lane-Emden pentru $n = 3/2$ rezultă:

$$\xi_0 \simeq 3,65375, \qquad \xi_0^2\theta'(\xi_0) = -2,71406. \tag{14}$$

- Înlocuind $n = 3/2$ în relația (12), rezultă **relația masă-volum**:

$$\begin{aligned} M_* V_* = & -\frac{16\pi^2\xi_0^5}{3}\theta'(\xi_0)\left(\frac{5K}{8\pi G}\right)^3 \simeq 5,62 \times 10^{51}\,\mathrm{kg\,m^3} \\ \simeq & 2 \times 10^{-6} M_\odot V_\odot, \end{aligned} \tag{15}$$

unde s-a aproximat $Z/A \simeq 0,5$.

- Ec. (15) permite aflarea R_* dacă se cunoaște M_*:

$$R_* = 0,0126(M_\odot/M_*)^{1/3} R_\odot. \tag{16}$$

Denumire[1]	$M/M_\odot$ [1]	$R/R_\odot$ [1]	$R_{5/3}/R_\odot$
Sirius B	1.0 ± 0.016	0.0084 ± 0.0002	0.013
Stein 2051 B	0.48 ± 0.045	0.0111 ± 0.0015	0.016
40 Eri B	0.501 ± 0.011	0.0136 ± 0.0002	0.016
Procyon B	0.604 ± 0.018	0.0096 ± 0.0004	0.015
CD-38 10980	0.74 ± 0.04	0.01245 ± 0.0004	0.014
W485 A	0.59 ± 0.04	0.0150 ± 0.001	0.015
L268-92	0.70 ± 0.12	0.0149 ± 0.001	0.014
L481-60	0.53 ± 0.05	0.012 ± 0.0004	0.015
G181-B5B	0.50 ± 0.05	0.011 ± 0.001	0.016
G156-64	0.59 ± 0.001	0.0110 ± 0.001	0.015
G154-B5B	0.46 ± 0.08	0.0130 ± 0.002	0.016

[1] J. L. Provencal, H. L. Shipman, *Testing the white dwarf mass-radius relation with HIPPARCOS*, Astrophys. J. **494** (1998) 759–767.

V.1.6. Stele degenerate ultrarelativiste: limita Chandrasekhar.

- În cazul când steaua este susținută de presiunea de degenerare a electronilor ultrarelativiști ($p_F \gg m_e c$), avem

$$P = \frac{\hbar c}{4}(3\pi^2)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\rho Z}{m_H A}\right)^{4/3} = K\rho^{\frac{4}{3}}, \quad K \simeq 1,2316 \times 10^{10}\left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg}^{4/3}}, \tag{17}$$

  corespunzând unui indice politrop $n = 3$.

- Rezolvând numeric ecuația Lane-Emden pentru $n = 3$ rezultă:

$$\xi_0 \simeq 6,89685, \qquad \xi_0^2\theta'(\xi_0) = -2,01824. \tag{18}$$

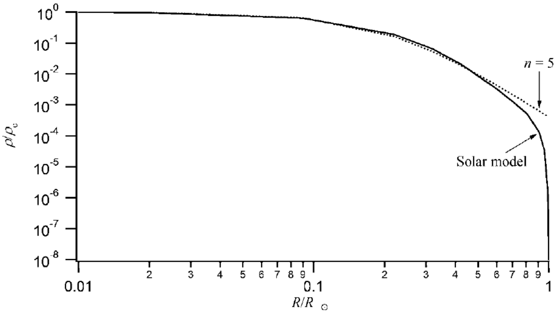
- Înlocuind $n = 3$ în relația (12), rezultă că masa nu depinde de ρ_c, R_*, ...:

$$M_* = -4\pi\xi_0^2\theta'(\xi_0)\left(\frac{K}{\pi G}\right)^{3/2} \simeq 1,436\, M_\odot. \tag{19}$$

  unde s-a aproximat $Z/A \simeq 0,5$.

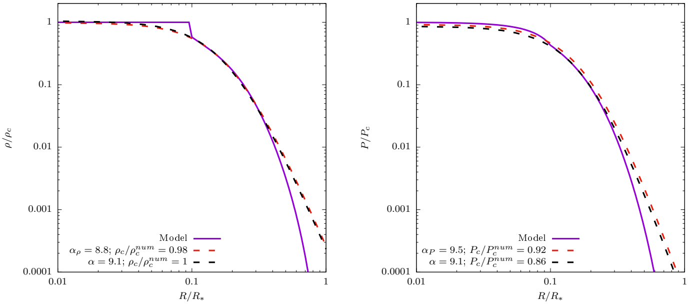
- Ec. (19) reprezintă masa maximă pe care o poate avea o stea statică cu simetrie sferică care este susținută de presiunea de degenerare a electronilor.

V.1.7. Model pentru Soare.



Comparație între ρ/ρ_c pentru Soare obținut cu metode numerice (linia continuă), respectiv cu modelul $n = 5$ (linia punctată). Rezultatele sunt bine suprapuse pentru $0 \leq r \lesssim R_*/2$.

V.1.8. Model pentru Soare (curs 10).



- Pentru comparația dintre rezultatul aferent ec. Lane-Emden și modelul discutat la cursul 10, am considerat formele funcționale:

$$\rho(r) = \rho_c \theta^n(r/\alpha), \qquad P(r) = P_c \theta^{n+1}(r/\alpha). \tag{20}$$

- Valorile ρ_c, P_c și α pot fi determinate prin fitarea formelor funcționale pe rezultatele corespunzătoare modelului din cursul 10.
- Putem obține perechile $(\rho_c, \alpha \equiv \alpha_\rho)$ și $(P_c, \alpha \equiv \alpha_P)$ fitând graficele lui ρ, respectiv P.
- Deoarece α_ρ și α_P are trebui să aibă aceeași valoare, vom utiliza $\alpha = (\alpha_\rho + \alpha_P)/2 \Rightarrow$ noi valori pentru ρ_c și P_c.

Model pentru interiorul solar:[2]

r ($R_\odot$)	$M(r)$ ($M_\odot$)	$L(r)$ ($L_\odot$)	T (10^6 K)	ρ (g cm^{-3})	log P (dyn cm^{-2})
0.007	0.00003	0.0002	15.7	150	17.369
0.02	0.001	0.010	15.6	146	17.355
0.09	0.057	0.361	13.6	95.73	17.177
0.22	0.399	0.966	8.77	28.72	16.525
0.32	0.656	1.000	6.42	9.77	15.724
0.42	0.817	1.000	4.89	3.22	15.324
0.52	0.908	1.000	3.77	1.05	14.722
0.60	0.945	1.000	3.15	0.500	14.322
0.71	0.977	1.000	2.23	0.177	13.721
0.81	0.992	1.000	1.29	0.0766	13.119
0.91	0.999	1.000	0.514	0.0194	12.119
0.96	0.9999	1.000	0.208	4.85×10^{-3}	11.118
0.99	1.0000	1.000	0.00441	2.56×10^{-4}	9.118
0.995	1.0000	1.000	0.00266	4.83×10^{-5}	8.118
0.999	1.0000	1.000	0.00135	1.29×10^{-6}	6.118
1.000	1.0000	1.000	0.00060	2.18×10^{-7}	4.918

În centrul Soarelui, $T \simeq 1,57 \times 10^7\,\mathrm{K}$, $\rho \simeq 150\ \mathrm{g/cm^3}$ și $P \simeq 2,3 \times 10^{16}\,\mathrm{Pa}$.

[2] A. N. Cox, *Allen's astrophysical quantities*, Springer, New York (2004).

Probleme

1. Să se calculeze masa unei stele politrope cu indicele $n = 0$. Să se scrie masa în funcție de ρ_c și R_*. [R: $M_* = \frac{4\pi}{3}\rho_c R_*^3$]
2. Să se arate că presiunea într-o stea de rază R_* cu densitate constantă ρ este
$$P(r) = \frac{2\pi G\rho^2}{3}(R_*^2 - r^2). \tag{21}$$
3. Să se calculeze masa unei stele politrope cu $n = 1$ în funcție de ρ_c și R_*.
4. Să se calculeze masa moleculară medie μ pentru o plasmă complet ionizată în care fracția masică a hidrogenului este X, cea a heliului este Y, iar cea a metalelor este $Z = 1 - X - Y$. [R: $\mu = (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}X + \frac{1}{4}Y)^{-1}$]
5. Să se arate că pentru $\chi(\xi) = \xi\theta(\xi)$, ec. Lane-Emden (5) devine:
$$\frac{d^2\chi(\xi)}{d\xi^2} = -\frac{\chi^n(\xi)}{\xi^{n-1}}, \qquad \chi(0) = 0, \qquad \chi'(0) = 1. \tag{22}$$
6. Să se arate că într-o gaz alcătuit din atomi neutri (neionizați), având metalicitatea $Z \ll X, Y$, masa moleculară medie este aproximativ $\mu = (X + \frac{1}{4}Y)^{-1}$.

Probleme

7. **Stele convective**. Stelele având mase mici, precum piticele maro, pot fi considerate ca fiind în echilibru convectiv. În acest caz, exponentul Γ este identic cu indicele adiabatic γ. Să se arate că ecuația echilibrului convectiv, $dT/dr = -(T/\mathbb{H})(\gamma - 1)/\gamma$, cu $\mathbb{H} = P/\rho g$, admite soluția

$$T(\xi) = T_c\theta(\xi). \tag{23}$$

8. **Model politropic pentru Soare.**
   a) Să se arate că raportul dintre densitatea medie $\rho_* = M_*/V_*$ și densitatea centrală ρ_c satisface:

   $$\frac{\rho_*}{\rho_c} = -\frac{3}{\xi_0}\theta'(\xi_0).$$

   b) Să se calculeze raportul $\rho_\odot/\rho_c$ pentru Soare, știind că $M_\odot = 1,989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $R_\odot = 6,9634 \times 10^8\,\mathrm{m}$ și $\rho_c \simeq 1,5 \times 10^5\,\mathrm{kg/m^3}$. [R: $\rho_\odot/\rho_c \simeq 0,009375$]
   c) Să se găsească valoarea lui n pentru care este atinsă valoarea calculată la subpunctul anterior. Să se calculeze ξ_0 și $\xi_0^2\theta'(\xi_0)$ pentru această valoare a lui n.
   [R: $n = 3,34$, $\xi_0 \simeq 8,512$, $\xi^2\theta'(\xi_0) \simeq -1,927$]

Probleme

8. **Model politropic pentru Soare.** (continuare)
   d) Să se găsească valoarea presiunii în centrul stelei.
   [R: $\alpha = 8,18 \times 10^7\,\mathrm{m}$, $P_c \simeq 2,91 \times 10^{16}\,\mathrm{Pa}$]
   e) Presupunând că nucleul este alcătuit dintr-un gaz ionizat format din ioni de hidrogen și heliu având fracțiile masice $X = 0,71$, respectiv $Y = 0,27$ ($Z = 1 - X - Y = 0,02$), să se găsească temperatura centrală a stelei. [R: $T_c = 1,44 \times 10^7\,\mathrm{K}$]