

Astrofizică stelară

Cursul 9

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Conținutul cursului

Capitolul IV. Structura internă a stelelor

- ▶ IV.1. Teoria lungimii de amestecare.
- ▶ **IV.2. Integrarea ecuațiilor structurii stelare.**

IV.2. Integrarea ecuațiilor structurii stelare.

IV.2.1. Generalități.

- ▶ Analiza atmosferei stelare este necesară pentru prezicerea radiației emise de către aceasta înspre spațiul cosmic.
- ▶ Analiza structurii stelei permite estimarea proprietăților plasmei stelare în interiorul acesteia.
- ▶ Cunoașterea structurii interne a stelei permite estimarea ratelor reacțiilor nucleare, sau a frecvenței de oscilație a stelelor pulsatoare.
- ▶ Ecuațiile care stau la baza structurii stelare sunt:
 - ▶ Ecuația de conservare a masei;
 - ▶ Ecuația de conservare a energiei;
 - ▶ Ecuația echilibrului hidrostatic;
 - ▶ Ecuația transportului energiei.
- ▶ Suplimentar, trebuie cunoscută ecuația de stare a plasmei stelare.
- ▶ Transportul energiei poate avea loc atât prin radiație, cât și prin convecție și/sau conducție.
- ▶ În cele ce urmează vom presupune că steaua are simetrie sferică și se găsește în echilibru termic.

IV.2.2. Structura mecanică.

- Ecuația de conservare a masei este:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \Rightarrow M(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r). \quad (1)$$

- Ecuația echilibrului hidrostatic este:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{\rho(r)GM(r)}{r^2}. \quad (2)$$

- În general, $P(r) = P_{\text{gaz}}(r) + P_{\text{rad}}(r)$, unde presiunea radiativă este

$$P_{\text{rad}} = \frac{4\pi K}{c} \simeq \frac{4\sigma T^4}{3c} \quad (\text{aproximația e validă la adâncimi optice mari}). \quad (3)$$

- Relația dintre $P(r)$ și $\rho(r)$ este stabilită prin ecuația de stare.

IV.2.3. Ecuația de producție a energiei.

- ▶ Deoarece considerăm că steaua se găsește în echilibru, rata de producere a energiei se traduce printr-o creștere a luminozității:

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon(r) \Rightarrow L(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r) \varepsilon(r). \quad (4)$$

- ▶ În general, $\varepsilon(r)$ este neneglijabil doar pentru $r \lesssim 0.25R_{\odot}$.

Producția energiei nucleare prin lanțurile pp.

- ▶ Rata specifică de producere a energiei nucleare ε_{pp} prin lanțurile pp este:

$$\varepsilon_{pp} = 0,241\rho X^2 f_{pp} \psi_{pp} C_{pp} T_6^{-2/3} e^{-33,80 T_6^{-1/3}}, \quad (5)$$

unde

- ▶ T_6 reprezintă temperatura în 10^6 K;
- ▶ ρ e densitatea în kg/m^3 ;
- ▶ $f_{pp} \equiv f_{pp}(X, Y, \rho, T) \simeq 1$ e un factor de ecranare pentru lanțul pp;
- ▶ $\psi_{pp} \equiv \psi_{pp}(X, Y, T) \simeq 1 + 1,412 \times 10^8 (X^{-1} - 1) e^{-49,98 T_6^{-1/3}}$ este un factor de corecție care ține cont de derularea simultană a proceselor PPI, PPII și PPIII;
- ▶ $C_{pp} = 1 + 0,0123 T_6^{1/3} + 0,0109 T_6^{2/3} + 0,000938 T_6$ conține corecții de ordin superior în teoria Gamow.

Producția energiei nucleare prin ciclurile CNO.

- ▶ Rata specifică de producere a energiei nucleare ε_{CNO} prin ciclurile CNO este:

$$\varepsilon_{\text{CNO}} = 8,67 \times 10^{20} \rho X X_{\text{CNO}} C_{\text{CNO}} T_6^{-2/3} e^{-152,28 T_6^{-1/3}}, \quad (6)$$

unde

- ▶ T_6 reprezintă temperatura în 10^6 K;
- ▶ ρ e densitatea în kg/m^3 ;
- ▶ $X_{\text{CNO}} \simeq Z/2$ este fracția masică a carbonului / azotului / oxigenului;
- ▶ $C_{\text{CNO}} = 1 + 0,0027 T_6^{1/3} - 0,00778 T_6^{2/3} - 0,000149 T_6$ conține corecții de ordin superior în teoria Gamow.

Producția energiei nucleare prin procesul triplu- α .

- Rata specifică de producere a energiei nucleare $\varepsilon_{3\alpha}$ prin procesul triplu- α este:

$$\varepsilon_{3\alpha} = 50,9 \rho^2 Y^3 T_8^{-3} f_{3\alpha} e^{-44,027 T_8^{-1}}, \quad (7)$$

unde

- T_8 reprezintă temperatura în 10^8 K;
- ρ e densitatea în kg/m^3 ;
- Y este fracția masică a heliului;
- $f_{3\alpha} \simeq 1$ este factorul de ecranare pentru procesul triplu- α .

VI.3.4. Ecuația transportului energiei.

- ▶ Transportul energetic are loc prin convecție dacă e satisfăcut criteriul Schwarzschild: $\nabla_{\text{rad}} \geq \nabla_{\text{med}} > \nabla_{\text{cel}} \geq \nabla_{\text{adi}}$.
- ▶ Pentru simplitate, vom aproxima

$$\nabla_{\text{med}} \simeq \nabla_{\text{rad}} = \frac{3k_R}{64\pi r^2 g} \frac{P}{\sigma T^4} L(r) \quad (8)$$

și $\nabla_{\text{cel}} \simeq \nabla_{\text{adi}} = (\gamma - 1)/\gamma$.

- ▶ În cazul $\nabla_{\text{rad}} < \nabla_{\text{adi}}$, transferul energetic poate fi modelat prin

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{\rho g T}{P} \nabla_{\text{rad}} = -\frac{3k_R \rho}{16 T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2 \sigma}. \quad (9)$$

- ▶ Dacă $\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{adi}}$, putem presupune că transferul energetic convectiv se face în condiții adiabactice, astfel încât:

$$\nabla = \frac{P}{T} \frac{dT/dr}{dP/dr} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\mu G M m_H}{k_B r^2} \frac{\gamma - 1}{\gamma}, \quad (10)$$

unde am folosit ec. de stare a gazului ideal, $P = \rho k_B T / \mu m_H$, presupunând că $P_{\text{rad}} = 0$ (întrucât transferul energetic este dominat de convecție).

Modelarea opacității.

- ▶ Pentru modelarea cu precizie a spectrului atmosferei stelare, este necesară contabilizarea liniilor spectrale la nivelul ecuației transferului radiativ.
- ▶ În ceea ce privește structura stelară, se poate rezolva ecuația energiei utilizând opacitatea Rosseland.
- ▶ În general, opacitatea medie Rosseland este

$$k_R = \kappa_{bb} + \kappa_{bf} + \kappa_{ff} + \kappa_{H^-} + \sigma_{Th}, \quad (11)$$

unde

- ▶ $\kappa_{bb} \equiv$ opacitatea datorată tranzițiilor din stare legată (bounded) în stare legată, aferente liniilor spectrale;
- ▶ $\kappa_{bf} \equiv$ opacitatea datorată tranzițiilor din stare legată în stare liberă (aferente ionizărilor);
- ▶ $\kappa_{ff} \equiv$ opacitatea datorată împrăstierii pe e^- liberi în prezența nucleelor;
- ▶ $\kappa_{H^-} \equiv$ opacitatea aferentă fotoionizării anionilor de hidrură, H^- (fiind semnificativă pentru partea continuă a spectrului);
- ▶ $\sigma_{Th} \equiv$ opacitatea datorată împrăstierii Thomson pe e^- liberi;
- ▶ Deoarece κ_{bb} nu are o formulă generală, această contribuție va fi neglijată.

- κ_{bf} și κ_{ff} admit legile de tip Kramers:

$$\begin{aligned}\kappa_{bf} &= 4,34 \times 10^{21} \frac{g_{bf}}{t} Z(1+X) \rho T^{-3,5}, \\ \kappa_{ff} &= 3,68 \times 10^{18} g_{ff}(1-Z)(1+X) \rho T^{-3,5},\end{aligned}\quad (12)$$

unde

- $g_{bf} \simeq 1$ și $g_{ff} \simeq 1$ sunt factorii Gaunt, reprezentând corecții de natură cuantică;
 - $t = g_{bf} \times 0,708[\rho(1+X)]^{1/5}$ este un factor de ecranare;
 - X și Z reprezintă fracțiile masice ale hidrogenului, respectiv metalelor;
 - ρ e densitatea în kg/m^3 ;
 - T e temperatura în K;
 - Valorile opacităților sunt în m^2/kg .
- Pentru absorbția datorată anionilor de hidrură, opacitatea se poate aproxima în intervalul $3000 \text{ K} < T < 6000 \text{ K}$, $10^{-10} \text{ kg/m}^3 < \rho < 10^{-5} \text{ kg/m}^3$ și $0,001 < Z < 0,03$ prin

$$\kappa_{\text{H}^-} = 7,9 \times 10^{-34} \frac{Z}{0,02} \sqrt{\rho} T^9, \quad (13)$$

fiind 0 când T , ρ sau Z nu se găsesc în interiorul acestor intervale.

- Pentru împrăștierea Thomson,

$$k_{\text{Th}} = \frac{n_e}{\rho} \sigma_{\text{Th}} \simeq 0,04 \frac{n_e m_{\text{H}}}{\rho}. \quad (14)$$

- Dacă gazul e complet ionizat și ignorând metalele ($X + Y \simeq 1$), avem

$$\frac{n_e m_{\text{H}}}{\rho} = \frac{n_{\text{H}} + 2n_{\text{He}}}{n_{\text{H}} + 4n_{\text{He}}} = \frac{1 + X}{2}, \quad (15)$$

unde am folosit ($n = n_{\text{H}} + n_{\text{He}}$)

$$n_{\text{H}} = \frac{4nX}{1 + 3X}, \quad n_{\text{He}} = \frac{n(1 - X)}{1 + 3X}. \quad (16)$$

- Când plasma este parțial ionizată, n_e trebuie obținut din ec. Saha.

- Pentru $X = 1$, $Y = Z = 0$, avem

$$n_e m_{\text{H}} / \rho = n_{\text{HII}} / n = f_{\text{HII}} \equiv n_{\text{HII}} / (n_{\text{HI}} + n_{\text{HII}}).$$

- Observând că $n_{\text{HI}} + n_{\text{HII}} = P_{\text{gaz}} / [k_B T (1 + f_{\text{HII}})]$, rezultă

$$\frac{f_{\text{HII}}^2}{1 - f_{\text{HII}}^2} = \frac{k_B T}{P} A, \quad A \equiv \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-E_{\infty} / k_B T}. \quad (17)$$

- Rezultă soluția

$$k_{\text{Th}} = \frac{\sigma_{\text{Th}}}{m_{\text{H}}} \text{HII} \simeq 0,04 \left(1 + \frac{P_{\text{gaz}}}{k_B T A} \right)^{-1/2}. \quad (18)$$

VI.3.5. Strategia de rezolvare.

- ▶ Ecuațiile structurii stelare formează un sistem neomogen și neliniar de 4 ecuații diferențiale de ordinul 1.
- ▶ Acest sistem acceptă 4 condiții inițiale referitoare la cele 4 variabile (presiune, masă, temperatură și luminozitate).
- ▶ Din punct de vedere matematic, este convenabilă impunerea condițiilor inițiale în centrul steii ($r = 0$),

$$P(0) = P_c, \quad M(0) = 0, \quad T(0) = T_c, \quad L(0) = 0. \quad (19)$$

- ▶ Deoarece în principiu ne interesează 3 parametri (R_* , M_* și L_*), vom încerca integrarea ecuațiilor de structură dinspre exterior înspre interior, impunând condițiile:

$$M(R_*) = M_*, \quad L(R_*) = L_*, \quad (20)$$

precum și T_{ef} cu ajutorul căreia R_* poate fi calculată din

$$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_{\text{ef}}^4. \quad (21)$$

- Sistemul de ecuații este:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dr} &= 4\pi r^2 \rho, & \frac{dP}{dr} &= -\frac{\rho GM}{r^2}, & \frac{dL}{dr} &= 4\pi r^2 \rho \varepsilon, \\ \frac{dT}{dr} &= \begin{cases} -\frac{3k_R \rho}{16T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2 \sigma}, & \nabla < \nabla_{\text{adi}}, \\ -\frac{\mu GM m_H}{k_B r^2} \frac{\gamma - 1}{\gamma}, & \nabla > \nabla_{\text{adi}}, \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

unde

$$\begin{aligned} \nabla_{\text{adi}} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma}, & \rho &= \frac{\mu m_H P_{\text{gaz}}}{k_B T}, \\ P_{\text{gaz}} &= P - P_{\text{rad}}, & P_{\text{rad}} &= \frac{4\sigma T^4}{3c}. \end{aligned} \quad (23)$$

- Pentru evitarea densităților negative, impunem

$$P_{\text{gaz}} = \max(P - P_{\text{rad}}, fP), \quad f = 0.01. \quad (24)$$

VI.3.6. Plasma parțial ionizată

- ▶ Dacă plasma este complet ionizată, avem

$$\mu = \left(2X + \frac{3Y}{4} + \frac{Z}{2} \right)^{-1}, \quad (25)$$

în timp ce indicele adiabatic este $\gamma = 5/3$ și $\nabla_{\text{adi}} = 0,4$.

- ▶ În cazul când plasma este parțial ionizată, avem

$$\mu \simeq \left[X(f_{\text{HI}} + 2f_{\text{HII}}) + \frac{Y}{4}(f_{\text{HeI}} + 2f_{\text{HeII}} + 3f_{\text{HeIII}}) + \dots \right]^{-1}, \quad (26)$$

unde $f_a = n_a / (n_{\text{I}} + n_{\text{II}} + \dots)$ este fracția de ionizare calculată separat pentru fiecare specie, pornind de la ecuația Saha:

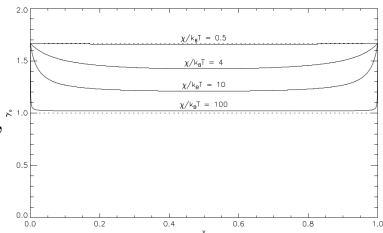
$$\frac{n_{a+1}}{n_a} = \frac{2}{n_e} \left(\frac{2\pi m_e K_B T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{U_{a+1}}{U_a} e^{-E_{\infty,a}/K_B T}. \quad (27)$$

- $$u = \frac{3k_B T}{2\mu m_H} + \frac{X}{m_H} E_{\text{HI},\infty} f_{\text{HII}} + \frac{Y}{4m_H} [E_{\text{HeI},\infty} f_{\text{HeII}} + (E_{\text{HeI},\infty} + E_{\text{HeII},\infty}) f_{\text{HeIII}}] + \dots, \quad (28)$$

- ▶ Indicele adiabatic se găsește din legea I a termodinamicii, $du + Pd\rho^{-1} = 0$.
- ▶ Pentru cazul $Y = Z = 0$:

$$\gamma = \frac{5 + \left(\frac{5}{2} + \frac{E_{\infty;\text{HI}}}{k_B T}\right)^2 f_{\text{HI}} f_{\text{HII}}}{3 + \left[\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{E_{\infty;\text{HI}}}{k_B T}\right)^2\right] f_{\text{HI}} f_{\text{HII}}},$$

► Deoarece $\gamma < 5/3$, ∇_{adi} scade, favorizând convecția în regiunile parțial ionizate.



VI.3.8. Condițiile inițiale la suprafața stelară.

- ▶ Deoarece pe suprafața stelară, $P(R_*) = \rho(R_*) = T(R_*) = 0$, integrarea cu aceste condiții inițiale poate fi problematică.
- ▶ Pentru surmontarea acestei dificultăți, intercalăm între suprafața stelară și restul stelei un strat subțire radiativ, în care

$$\frac{dP}{dT} = \frac{GMT^3}{3\kappa_R} \frac{64\pi\sigma}{L(r)}. \quad (29)$$

- ▶ Presupunând că acest strat are dimensiuni mici, astfel încât $L(r) \simeq L_*$ și $M(r) \simeq M_*$.
- ▶ Ignorând opacitatea datorată împrăștierei Thomson, anionilor de hidrură și liniilor spectrale, utilizăm

$$\kappa_R \simeq \kappa_{bf} + \kappa_{ff} = A\rho T^{-3.5},$$

$$A = 4,34 \times 10^{21} \frac{g_{bf}}{t} Z(1+X) + 3,68 \times 10^{18} g_{ff}(1-Z)(1+X),$$

unde folosim $g_{bf} = g_{ff} = 1$ și $t = 100$.

- ▶ Integrând ec. (29), rezultă:

$$P = \left(\frac{1}{4,25} \frac{64\pi\sigma GM_* k_B}{3\mu m_H A L_*} \right)^{1/2} T^{4,25}. \quad (30)$$

- Putem afla temperatura impunând $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$, adică

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa_R L_* \rho}{64\pi r^2 \sigma T^3}. \quad (31)$$

- Înlocuind $\kappa_R = A\rho T^{-3,5}$ și $\rho = P\mu m_H/k_B T$ (ignorăm deocamdată efectul presiunii radiative), rezultă:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\mu G m_H M_*}{4,25 k_B r^2}. \quad (32)$$

- Integrând relația de mai sus, rezultă:

$$T(r) = \frac{\mu G m_H M_*}{4,25 k_B} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_*} \right). \quad (33)$$

VI.3.9. Centrul stelei.

- ▶ Abordarea “dinspre suprafață înspre centru” permite specificarea din punct de vedere matematic a trei condiții inițiale independente: M_* , L_* și R_* (prin relația dintre L_* , R_* și T_{ef}).
- ▶ În realitate însă, doar T_c și P_c sunt gradele de libertate reale ale soluției sistemului, deoarece $M(0) = L(0) = 0$.
- ▶ Atât din punct de vedere matematic, cât și datorită erorilor numerice, soluția obținută numeric nu va satisface $L(0) = M(0) = 0$, astfel devenind divergentă în jurul lui $r = 0$.
- ▶ Drept urmare, este necesară fixarea capătului inferior al integrării la o valoare finită, $r_{\text{min}} \ll R_*$ (în practică, am folosit $r_{\text{min}} = R_*/10$).

VI.3.9. Centrul stelei.

- ▶ Parametrii centrali ai stelei pot fi estimați presupunând că în interiorul sferei de rază $r_{\min}$, densitatea este constantă, având valoarea ρ_c determinată de

$$\rho_c = \frac{3M(r_{\min})}{4\pi r_{\min}^3}. \quad (34)$$

- ▶ Presiunea poate fi calculată folosind ecuația echilibrului hidrostatic,

$$P(r) = P(r_{\min}) + \frac{3GM^2(r_{\min})}{8\pi r_{\min}^4} \left(1 - \frac{r^2}{r_{\min}^2}\right). \quad (35)$$

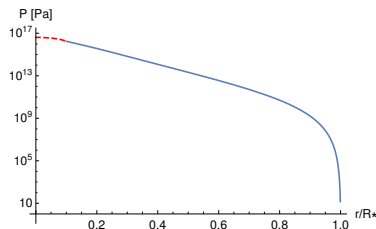
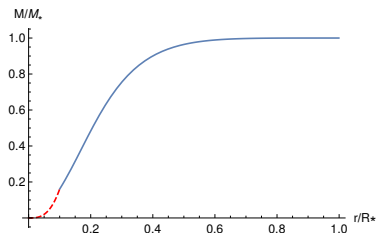
- ▶ Temperatura satisface ecuația neliniară

$$\rho_c = \frac{\mu m_H}{k_B T} (P - P_{\text{rad}}), \quad P_{\text{rad}} = 4\sigma T^4/3c. \quad (36)$$

- ▶ Luminozitatea de asemenea poate fi estimată presupunând că $\varepsilon(r) \simeq \varepsilon_c$ e constantă în interiorul sferei de rază $r_{\min}$:

$$L(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_c \varepsilon_c, \quad \varepsilon_c = \frac{3L(r_{\min})}{4\pi r_{\min}^3 \rho_c}. \quad (37)$$

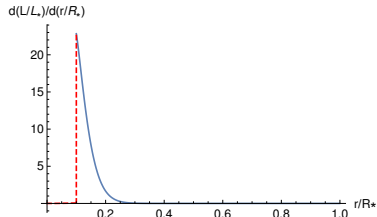
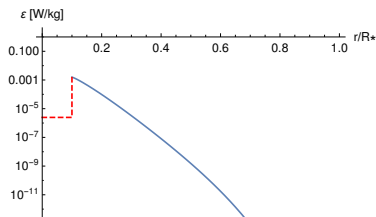
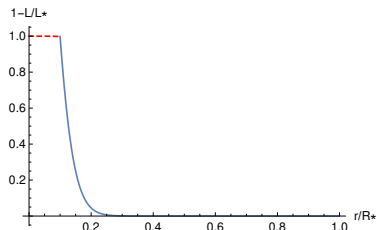
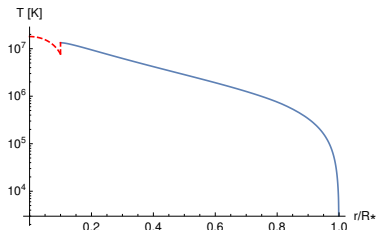
VI.3.10. Rezultate.



- ▶ Considerăm un gaz complet ionizat ($X = 0,71$, $Y = 0,27$ și $Z = 0,02$);
- ▶ $M_* = M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$, $L_* = L_{\odot} = 3,827 \times 10^{26} \text{ W}$ și $T_{\text{ef}} = 5500 \text{ K} \Rightarrow R_* = 1,1002 R_{\text{astrosun}}^1$
- ▶ Luăm stratul exterior de grosime $\delta r = 0.001 R_*$ și continuăm integrarea până la $r_{\text{min}} = R_*/10$.
- ▶ Obținem în centru $\rho_c = 1,69 \times 10^5 \text{ kg/m}^3$ și $P_c = 4,11 \times 10^{16} \text{ Pa}$, față de valorile din Soare, $\rho_{\odot}^c = 1,5 \times 10^5 \text{ kg/m}^3$ și $P_{\odot}^c = 2,65 \times 10^{16} \text{ Pa}$.

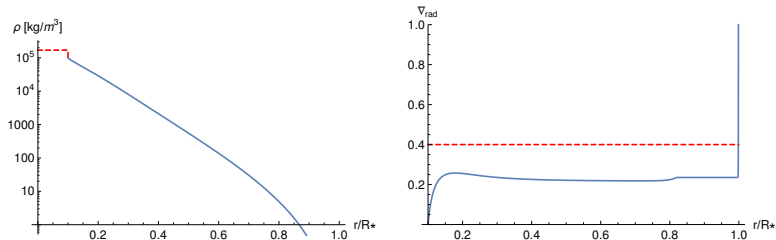
¹Valoarea este mai mică decât $T_{\text{ef}}^{\odot} \simeq 5780 \text{ K}$ din motive de stabilitate numerică.

VI.3.10. Rezultate.



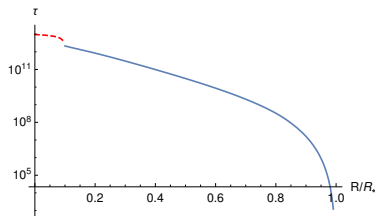
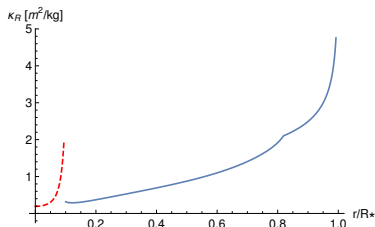
- ▶ Obținem $T_c = 1,80 \times 10^7$ K față de $T_c^\odot = 1,57 \times 10^7$ K.
- ▶ Nucleul (unde se produce 99% din energie) se întinde până la $r_{\text{nucl}} = 0,239R_*$, comparat cu $r_{\text{nucl}}^\odot = 0,24R_\odot$.
- ▶ dL/dr atinge un maxim la $r_{\text{Lmax}} > 0$, însă nu e vizibil deoarece $r_{\text{Lmax}} < r_{\text{min}}$.

VI.3.10. Rezultate.



- ▶ $\rho(r)$ prezintă o discontinuitate când $r = r_{\min}$, care poate fi eliminată considerând modele mai sofisticate pentru regiunea $r < r_{\min}$ (de exemplu, o dependență liniară sau pătratică a ρ de rază).
- ▶ Îmbunătățirea modelului pentru $\rho(r < r_{\min})$ va modifica valorile parametrilor în centrul steii.
- ▶ Pentru modelul considerat aici, $\nabla_{\text{rad}} < \nabla_{\text{adi}}$ pretutindeni în interiorul steii.

VI.3.10. Rezultate.



- ▶ κ_R scade dinspre exterior înspre interior.
- ▶ $\tau_c \simeq 9.65 \times 10^{12}$.
- ▶ Soluția pentru atmosfera gri în aproximația Eddington, $T(\tau) = T_{\text{ef}}[\frac{3}{4}(\tau + \frac{2}{3})]^{1/4}$, reprezentată cu linie roșie punctată, e validă pentru $\tau \lesssim 10^{10}$.
- ▶ Nucleul începe la $\tau_{\text{nuc}} = 5,68 \times 10^{11}$ (bulina verde).

