Astrofizică stelară
Cursul 8

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Conținutul cursului

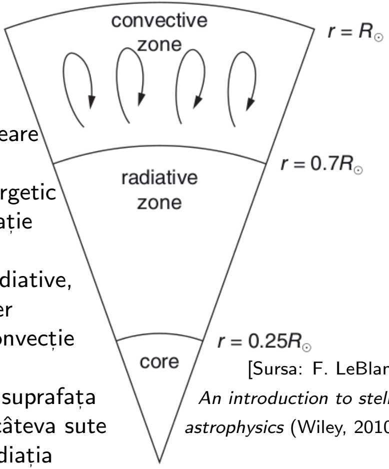
Capitolul IV. Structura internă a stelelor

- **IV.1. Teoria lungimii de amestecare.**
- IV.2. Integrarea ecuațiilor structurii stelare.

IV.1. Teoria lungimii de amestecare.

IV.1.1. Structura Soarelui.

- Soarele poate fi împărțit în următoarele 6 regiuni:



[Sursa: F. LeBlanc, *An introduction to stellar astrophysics* (Wiley, 2010)]

Nucleu: Reprezintă regiunea centrală unde au loc reacții termonucleare $\varepsilon > 0$ $(0 \le r \lesssim 0,25R_*)$.

Z. radiativă: Regiunea unde transferul energetic are loc predominant prin radiație $(0,25R_* \lesssim r \lesssim 0,7R_*)$.

Z. convectivă: se situează deasupra zonei radiative, fiind caracterizată prin transfer energetic predominant prin convecție $(0,7R_* \lesssim r \le R_*)$.

Fotosfera: regiunea convectivă aflată la suprafața Soarelui, având grosimea de câteva sute de km, de unde originează radiația electromagnetică emisă în afara stelei.

Cromosfera: se extinde aproximativ 2000 km deasupra fotosferei, fiind caracterizată de o creștere a temperaturii până la $\sim 10^5$ K.

Corona solară: se extinde pe câteva milioane de km deasupra cromosferei, temperatura atingând valori de $1-2\times 10^6$ K.

IV.I.2. Transportul prin radiație.

- La adâncimi optice mari, fluxul Edington integrat H satisface:

$$H(r) = -\frac{1}{3k_R\rho}\frac{dB}{dr} = -\frac{4\sigma T^3}{3\pi k_R\rho}\frac{dT}{dr}, \qquad (1)$$

  unde k_R este opacitatea Rosseland iar $B = \sigma T^4/\pi$ este integrala după toate frecvențele a funcției Planck.

- Având în vedere că fluxul radiativ integrat $F(r) = 4\pi H(r)$ definește luminozitatea $L(r) = 4\pi r^2 F(r)$, rezultă:

$$H(r) = \frac{L(r)}{16\pi^2 r^2}. \qquad (2)$$

- Rezultă ecuația transportului energiei (valabilă pentru transportul pur radiativ):

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3k_R\rho}{64\pi r^2\sigma T^3}L(r). \qquad (3)$$

- Gradientul temperaturii este direct proporțional cu $L(r)$ și cu k_R.

- În afara zonei de producție a energiei nucleare (unde $\varepsilon \simeq 0$), luminozitatea este constantă, fiind egală cu:

$$L(r) = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_{\rm ef}^4.$$

- Substituind expresia de mai sus în ec. (3) rezultă:

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3k_R \rho R_\odot^2 T_{\rm ef}^4}{16 r^2 T^3}, \tag{4}$$

iar fluxul Eddington $H_\nu = -(dK_\nu/dr)/k_\nu\rho$ la adâncimi optice mari, unde $K_\nu \simeq B_\nu/3$, devine:

$$H_\nu \simeq \frac{1}{16}\frac{k_R}{k_\nu}\frac{T_{\rm ef}^4}{T^3}\left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2 \frac{dB_\nu}{dT} = \frac{k_B^3}{8h^2c^2}\frac{k_R}{k_\nu}\frac{T_{\rm ef}^4}{T}\left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2 \mathcal{P}(u), \tag{5}$$

unde $\mathcal{P}(u)$ este definit prin ($u = h\nu/K_B T$):

$$\frac{dB_\nu}{dT} = \frac{2K_B^3 T^2}{h^2c^2}\mathcal{P}(u), \qquad \mathcal{P}(u) = \frac{u^4 e^u}{(e^u - 1)^2}. \tag{6}$$

- $\mathcal{P}(u)$ atinge valoarea maximă la $u \simeq 3,83$.
- Dependența lui H_ν de ν este influențată de k_ν.

IV.1.3. Transportul prin conducție.

- În unele condiții, particulele de materie pot transporta energie din regiunile mai fierbinți înspre cele mai reci.
- Un exemplu este cel al piticelor albe, în nucleul cărora electronii formează un gaz degenerat.
- Acești electroni degenerați participă la procesul de conducție, care e important doar când drumul liber mijlociu al electronilor depășește scala la care temperatura locală prezintă variații.
- Se poate introduce o opacitate de conducție astfel încât $H_{\rm cond}$ să fie dat printr-o expresie analoagă ec. (1):

$$H_{\rm cond} = -\frac{4\sigma T^3}{3\pi k_{\rm cond}\rho}\frac{dT}{dr}. \tag{7}$$

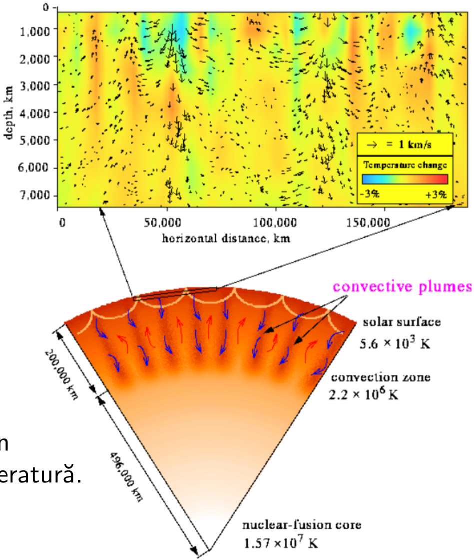
- În absența convecției, $H_{\rm tot} = H_{\rm rad} + H_{\rm cond}$ se obține înlocuind opacitățile parțiale k_R (1), respectiv $k_{\rm cond}$(7) cu $k_{\rm tot}$:

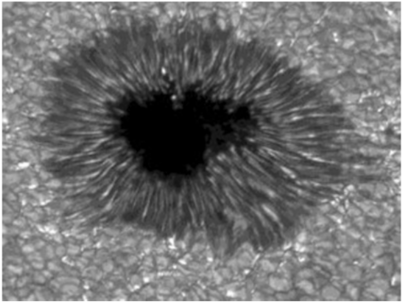
$$\frac{1}{k_{\rm tot}} = \frac{1}{k_R} + \frac{1}{k_{\rm cond}}. \tag{8}$$

- Precum în cazul unui circuit având doi rezistori legați în paralel, energia tinde să fie transferată prin modul cu opacitatea cea mai mică.
- În majoritatea cazurilor, $k_{\rm cond} \gg k_R$.

IV.1.4. Transportul prin convecție.

- Convecția ≡ reprezintă transp. de energie prin intermediul transferului de substanță.
- Convecția poate deveni importantă când radiația nu este suficientă pentru transportul energiei înspre exterior (e.g., opacitate mare, $H/\sigma T^4$ mare, etc.) $\Rightarrow$ transferul exclusiv prin radiație necesită un gradient mare de temperatură.

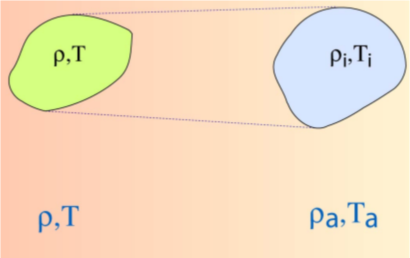




Fotografie a unei pete solare la suprafața Soarelui.

- Regiunea centrală întunecată poartă numele de umbră (**B** mare).
- Regiunea adiacentă mai puțin întunecată se numește penumbră (**B** mai mic).
- Sutele de granule vizibile în această poză, având dimensiuni de aproximativ 1000 km, reprezintă celule de convecție.

IV.1.5. Criteriul Schwarzschild pentru convecție.



- În unele condiții, celulele de plasmă pot migra datorită **forțelor arhimedice** dinspre regiunile calde (interior) înspre cele reci (exterior), unde își eliberează energia termică.
- În aceste condiții, plasma este instabilă la convecție.
- Pentru simplitate, vom presupune că ascensiunea celulelor se petrece în condiții **adiabatice** (celulele nu schimbă energie cu plasma înconjurătoare pe parcursul ascensiunii).
- Presupunem că masa moleculară $\mu_{\rm med}$ a plasmei exterioare nu variază de-a lungul traiectoriei.
- Presiunea din interiorul celulei este întotdeauna egală cu presiunea mediului înconjurător, $P_{\rm cel} = P_{\rm med}$.

IV.I.6. Gradientul temperaturii.

- Pe lângă transferul prin radiație, conducție și convecție, energia mai poate fi transferată prin emisie de neutrini.
- Întrucât ν interacționează foarte slab cu materia, energia purtată de aceștia poate fi considerată pierdută $\Rightarrow$ emisia de neutrini nu contribuie la luminozitatea stelei.
- Trecerea la regimul radiativ la cel convectiv poate fi discutată prin prisma valorii **gradientului temperaturii** ∇, definit prin:

$$\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{P}{T}\frac{dT}{dP} = -\frac{P}{\rho g T}\frac{dT}{dr}. \tag{9}$$

- Când transferul energetic se face radiativ, dT/dr e dat de ec. (3), astfel încât

$$\nabla_{\rm rad} = \frac{3k_R}{64\pi r^2 g}\frac{P}{\sigma T^4} L(r). \tag{10}$$

- În urma acestui proces adiabatic, densitatea în interiorul celulei scade conform:
$$\Delta\rho_{\rm cel} = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{\rm adi} \Delta r < 0, \tag{11}$$
în timp ce presiunea în interiorul acesteia satisface ecuația de stare de tip politropic:
$$P_{\rm cel} \sim \rho_{\rm cel}^{\gamma}, \qquad \gamma = c_p/c_v. \tag{12}$$
- În același timp, și densitatea mediului (presupus a fi în echilibru radiativ) variază:
$$\Delta\rho_{\rm med} = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{\rm rad} \Delta r < 0, \tag{13}$$
presiunea fiind dată de ecuația de stare a gazului ideal:
$$P_{\rm med} \sim \rho_{\rm med} T_{\rm med}. \tag{14}$$
- Conform principiului lui Arhimede, convecția poate avea loc când $\Delta\rho_{\rm cel} < \Delta\rho_{\rm med}$.

- Principiul lui Arhimede se poate scrie:

$$\left(\frac{d\ln\rho}{dr}\right)_{\mathrm{adi}} < \left(\frac{d\ln\rho}{dr}\right)_{\mathrm{rad}}, \tag{15}$$

astfel încât:

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{d\ln P}{dr}\right)_{\mathrm{adi}} < \left(\frac{d\ln P}{dr}\right)_{\mathrm{rad}} - \left(\frac{d\ln T}{dr}\right)_{\mathrm{rad}}. \tag{16}$$

- Deoarece $P_{\mathrm{adi}} = P_{\mathrm{rad}}$, rezultă:

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} < \frac{(d\ln T/dr)_{\mathrm{rad}}}{(d\ln P/dr)_{\mathrm{rad}}} = \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_{\mathrm{rad}} = \nabla_{\mathrm{rad}}. \tag{17}$$

- Presupunând că și în interiorul celulei este validă ecuația de stare a gazului ideal, rezultă $P \sim \rho T \sim P^{1/\gamma} T$ sau $T \sim P^{(\gamma-1)/\gamma}$, astfel încât:

$$\nabla_{\mathrm{adi}} = \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_{\mathrm{adi}} = \frac{\gamma-1}{\gamma}. \tag{18}$$

- Rezultă **criteriul lui Schwarzschild** pentru convecție:

$$\nabla_{\mathrm{rad}} > \nabla_{\mathrm{adi}} = \frac{\gamma-1}{\gamma}. \tag{19}$$

- Pentru un gaz ideal monoatomic,$\gamma = 5/3$ iar $\nabla_{\mathrm{adi}} = 0,4$.
- Deoarece plasma stelară nu este monoatomică și datorită prezenței presiunii radiative, în general $\gamma < 5/3$.
- Analizele numerice indică că în cazul când presiunea radiativă este dominantă, criteriul Schwarzschild devine $\nabla_{\mathrm{rad}} > 0,25$.
- În zonele unde are loc ionizarea parțială, convecția poate apărea la valori ale lui ∇_{rad} mai mici decât $0,25$.
- Înlocuind ec. (10) în ec. (19), criteriul Schwarzschild poate fi pus sub forma:

$$\frac{3k_R P}{4g}\frac{L(r)}{16\pi r^2 \sigma T^4} = \frac{3\pi k_R P}{4g}\frac{H(r)}{\sigma T^4} > \nabla_{\mathrm{adi}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}. \qquad (20)$$

- Această formă a criteriului lui Schwarzschild arată că zonele unde opacitatea e mare sau temperatura locală e mică favorizează apariția convecției.

IV.1.7. Lungimea de amestecare.

- În general, $H(r) = H_{\rm rad}(r) + H_{\rm conv}(r)$.
- Deoarece în procesul de convecție, ascensiunea unei celule nu este adiabatică, $\nabla_{\rm cel} \geq \nabla_{\rm adi}$.
- În prezența convecției, mediul nu este strict în echilibru radiativ iar $\nabla_{\rm med} \leq \nabla_{\rm rad}$.
- Criteriul Schwarzschild devine:

$$\nabla_{\rm med} > \nabla_{\rm cel}. \tag{21}$$

- Teoria lungimii de amestecare (*Mixing length*) oferă un mecanism simplu pentru estimarea lui $H_{\rm conv}(r)$.
- Lungimea de amestecare ℓ se referă la distanță parcursă de o celulă până la dizolvarea acesteia.
- La capătul superior al traiectoriei, celula eliberează căldura E:

$$E = \rho c_p (T_{\rm cel} - T_{\rm med}). \tag{22}$$

- Presupunând că viteza medie a celulelor convective este $\overline{V}$, fluxul convectiv devine:

$$H_{\rm conv} = \frac{1}{4\pi} E \overline{V} = \frac{\rho c_p}{4\pi} \overline{V} (T_{\rm cel} - T_{\rm med}). \tag{23}$$

Estimarea lui ΔT.

- Presupunând că $T_{\rm cel}$ și $T_{\rm med}$ variază puțin față de temperatura inițială T, se poate scrie:

$$T_{\rm cel} \simeq T + \left(\frac{dT}{dr}\right)_{\rm cel} \Delta r, \qquad T_{\rm med} \simeq T + \left(\frac{dT}{dr}\right)_{\rm med} \Delta r,$$
$$\Rightarrow T_{\rm cel} - T_{\rm med} \simeq \left[\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\rm cel} - \left(\frac{dT}{dr}\right)_{\rm med}\right] \Delta r, \tag{24}$$

  unde $\Delta r \equiv$ distanță parcursă de celulă față de poziția inițială.
- Presupunând că steaua se află în echilibru hidrostatic, rezultă:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\rm med} = -\frac{T}{\mathbb{H}}\nabla_{\rm med}, \quad \left(\frac{dT}{dr}\right)_{\rm cel} = -\frac{T}{\mathbb{H}}\nabla_{\rm cel}, \quad \mathbb{H} \equiv \frac{P}{\rho g}, \tag{25}$$

  astfel că

$$T_{\rm cel} - T_{\rm med} \simeq \frac{T}{\mathbb{H}}(\nabla_{\rm med} - \nabla_{\rm cel})\Delta r. \tag{26}$$

- Fie lungimea de amestecare ℓ egală cu distanța medie pe care se deplasează o celulă până la dizolvare.
- Distanța medie parcursă de celulele care traversează o suprafață dată va fi $\Delta r \simeq \ell/2$.

Estimarea lui $\overline{V}$.

- Asupra celulei convective acționează forța arhimedică $F_{\mathrm{Arh}} = \rho_{\mathrm{med}} V_{\mathrm{cel}} g$ și forța de greutate $\rho_{\mathrm{cel}} V_{\mathrm{cel}} g$.
- Forța rezultantă pe unitate de volum este:

$$f = (\rho_{\mathrm{med}} - \rho_{\mathrm{cel}}) g. \tag{27}$$

- În aproximația ascensiunii adiabatice ($P_{\mathrm{cel}} = P_{\mathrm{med}}$) și presupunând că plasma din interiorul celulei și din mediul exterior acesteia este descrisă de $P = \frac{\rho K_B T}{\mu m_H}$, rezultă:

$$\rho_{\mathrm{med}} - \rho_{\mathrm{cel}} = \rho_{\mathrm{cel}} \left(\frac{T_{\mathrm{cel}}}{T_{\mathrm{med}}} - 1 \right), \tag{28}$$

unde am folosit $\mu_{\mathrm{med}} = \mu_{\mathrm{cel}}$ deoarece presupunem că compoziția chimică a stelei nu variază semnificativ cu Δr.
- Presupunând că diferența față de starea inițială e mică, rezultă:

$$\rho_{\mathrm{med}} - \rho_{\mathrm{cel}} \simeq \frac{\rho_{\mathrm{cel}} \Delta r}{\mathbb{H}_0} \left(\nabla_{\mathrm{med}} - \nabla_{\mathrm{cel}} \right). \tag{29}$$

IV.1.8. Fluxul convectiv.

- Lucrul mecanic efectuat de f pe $\Delta r = \ell/2$ este:

$$w = \int_0^{\ell/2} f \; d\Delta r \simeq \frac{\rho_{\rm cel}\ell^2 g}{8\mathbb{H}}(\nabla_{\rm med} - \nabla_{\rm cel}). \tag{30}$$

- Presupunând că jumătate din această energie se transformă în energie cinetică ($\frac{1}{2}\rho_{\rm cel}\overline{V}^{\,2} = \frac{1}{2}w$), rezultă:

$$\overline{V} \simeq \frac{\ell}{\mathbb{H}}\sqrt{\frac{g\mathbb{H}_0}{8}(\nabla_{\rm med} - \nabla_{\rm cel})}. \tag{31}$$

- Fluxul convectiv capătă expresia:

$$H_{\rm conv} \simeq \frac{\rho c_p T}{8\pi}\frac{\ell^2}{\mathbb{H}^2}\sqrt{\frac{g\mathbb{H}}{8}}(\nabla_{\rm med} - \nabla_{\rm cel})^{3/2}. \tag{32}$$

- $H_{\rm conv} \sim (\nabla_{\rm med} - \nabla_{\rm cel})^{3/2}$ și nu liniar, deoarece $\overline{V} \sim (\nabla_{\rm med} - \nabla_{\rm cel})^{1/2}$.
- Raportul $\ell/\mathbb{H}$ dintre lungimea de amestecare și $\mathbb{H}$ rămâne un parametru liber al teoriei care nu poate fi determinat universal.

IV.1.9. Echilibrul convectiv.

- Când transferul energetic are loc exclusiv prin convecție, se poate aproxima că întreaga plasmă stelară este alcătuită din celule convective care evoluează adiabatic.
- Ținând seama că $P \sim \rho^\gamma$ și presupunând că e validă legea gazului ideal $P = nK_B T$, rezultă:

$$\nabla_{\mathrm{adi}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}. \tag{33}$$

- Având în vedere definiția gradientului de temperatură $\nabla = d \ln T / d \ln P$, rezultă ecuația echilibrului convectiv:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{T}{\mathbb{H}} \frac{\gamma - 1}{\gamma}, \qquad \mathbb{H} = \frac{P}{\rho g}, \tag{34}$$

  care este independentă de lungimea de amestecare ℓ.
- În realitate, echilibrul convectiv nu este niciodată pe deplin atins, deoarece întotdeauna are loc schimbul energetic prin radiație.

Probleme

1. Să se găsească frecvențele și lungimile de undă corespunzătoare valorii maxime a lui $\mathcal{P}(u)$ (6) pentru $T = 10^4$, 10^5, respectiv 10^7 K. Să se indice în ce parte a spectrului electromagnetic sunt situate aceste frecvențe. [R: $\nu_1 = 8 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}$, $\lambda_1 = 3750$ Å, IR
$\nu_2 = 8 \times 10^{15}\,\mathrm{Hz}$, $\lambda_1 = 375$ Å, UV
$\nu_3 = 8 \times 10^{17}\,\mathrm{Hz}$, $\lambda_1 = 3,75$ Å, raze X]
2. În centrul unei pitice albe reci compusă din carbon pur, opacitatea de conducție este estimată la $k_{\rm cond} \sim 5 \times 10^{-7}(T/\rho)^2\,\mathrm{cm^2\,g^{-1}}$, unde T e în K și ρ e în $\mathrm{g/cm^3}$. Presupunând că opacitatea radiativă este dominată de împrăștierea Thomson, să se arate că în centrul acestor stele, conducția reprezintă detașat modul de transport al energiei. Se presupune că în centrul stelei avem $T \sim 10^7\,\mathrm{K}$ și $\rho \sim 10^6\,\mathrm{g/cm^3}$. [R: $k_{\rm rad} \simeq 0,02\ \mathrm{m^2/kg}$, $k_{\rm cond} = 5 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/kg}$]
3. În aproximația echilibrului radiativ, să se găsească expresia temperaturii $T_{\rm adi}$ la care criteriul Schwarzschild pentru convecție este satisfăcut.

$$T_{\rm adi} = \left(\frac{3\gamma k_R P}{16 g(\gamma - 1)}\frac{L(r)}{4\pi r^2 \sigma}\right)^{1/4}$$

Probleme

4. Presupunem că densitatea $\rho = \rho_0$ unei stele de masă M_* și rază R_* având simetrie sferică este constantă. Să se rezolve următoarele cerințe:
   a) Să se găsească ρ_0 ca funcție de M_* și R_*. [R: $\rho = 3M_*/4\pi R_*^3$]
   b) Să se găsească masa $M(r)$ cuprinsă într-o sferă de rază r concentrică stelei. [R: $M(r) = M_*(r/R_*)^3$]
   c) Să se găsească $g(r)$. [R: $g(r) = (GM_*/R_*^2)(r/R_*)$]
   d) Să se găsească presiunea rezolvând ecuația echilibrului hidrostatic. [R: $P(r) = (3GM_*^2/8\pi R_*^4)(1 - r^2/R_*^2)$]
   e) Presupunând că opacitatea se datorează exclusiv împrăștierii Thomson, să se găsească $k_R(r)$ presupunând că steaua este compusă exclusiv din atomi de hidrogen și heliu complet ionizați, având fracțiile masice X și Y constante. [R: $k_R = \frac{\sigma_{\mathrm{Th}}}{m_H}(X + \frac{Y}{2})$]
   f) Să se găsească raza la care raportul $(T_{\mathrm{adi}}/T_{\mathrm{ef}})^4$ este minimizat. [R: $r = R_*\sqrt{3} > R_*$]

Probleme

4. (continuare)

   g) Să se găsească adâncimea optică τ corespunzătoare opacității Rosseland ca funcție de r.

   $$\left[\text{R:} \qquad \tau = \frac{3\sigma_{\mathrm{Th}} M_*}{4\pi R_*^2 m_H}\left(X + \frac{Y}{2}\right)\left(1 - \frac{r}{R_*}\right).\right]$$

   h) Să se rezolve ecuația $T(r) = T_{\mathrm{adi}}(r)$ în aproximația Eddington în condițiile echilibrului radiativ în atmosfera gri, când $T = T_{\mathrm{ef}}[\frac{3}{4}(\tau + \frac{2}{3})]^{1/4}$. Care este intervalul pentru care criteriul Schwarzschild este satisfăcut și transferul prin convecție este favorizat? [R: $x = r/R_* < 0,865$]