Astrofizică stelară
Cursul 7

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Conținutul cursului

Capitolul III. Transferul radiativ

- III.1. Intensitatea câmpului radiativ.
- III.2. Ecuația transferului radiativ.
- III.3. Ecuațiile Boltzmann și Saha.
- III.4. Lărgirea liniilor spectrale.
- III.5. Opacitatea Rosseland.
- III.6. Modelarea absorbției și emisiei.
- **III.7. Atmosfera gri.**
- **III.8. Formarea liniilor spectrale.**

III.7. Atmosfera gri.
III.7.1. Generalități.

- Atmosfera stelară reprezintă regiunea periferică a unei stele care determină proprietățile fluxului radiativ emanat de către suprafața acesteia.
- Structura atmosferei stelare este definită de dependența variabilelor fizice (T, ρ, n_e, etc.) de adâncimea optică.
- Cunoașterea variabilelor fizice reprezintă premiza pentru calculul fluxurilor radiative monocromatice, care pot fi corelate cu măsurătorile spectrelor atmosferelor stelare.
- Limita inferioară a atmosferei stelare este la $\tau \sim 10^2 - 10^3$, unde τ este o adâncime optică medie sau pe o frecvență din regiunea continuă (în afara liniilor spectrale).
- Această limită este la $\sim 1\%$ din raza stelei.

III.7.2. Definiția atmosferei gri.

- În general, ecuațiile care guvernează structura atmosferei stelare (echilibru hidrostatic, transfer radiativ, ec. Boltzmann și Saha, etc.) sunt extrem de complexe.
- O analiză calitativă poate fi efectuată considerând opacitatea independentă de frecvență ($k_\nu = k$) $\Rightarrow$ **aproximația atmosferei gri** (spectrul opacității este "incolor", adică gri).
- Ecuația transferului radiativ devine:

$$u\frac{dI_\nu}{d\tau} = I_\nu - S_\nu \Rightarrow u\frac{dI}{d\tau} = I - S, \tag{1}$$

  unde $I = \int_0^\infty d\nu\, I_\nu$ și $S = \int_0^\infty d\nu\, S_\nu$.
- Condiția de echilibru radiativ $\int_0^\infty d\nu\, k_\nu J_\nu = \int_0^\infty d\nu\, k_\nu S_\nu$ devine:

$$J = S. \tag{2}$$

- Pentru cazul când $S_\nu(\tau) \simeq B_\nu(\tau)$, rezultă $J(\tau) = \sigma T^4(\tau)/\pi$.

III.7.3. Aproximația Eddington.

- Pornind de la ecuația transferului radiativ, se pot obține relațiile

$$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = H_\nu \Rightarrow \frac{dK}{d\tau_R} = H, \tag{3}$$

unde $\tau_R = -k_R \rho dz$ este adâncimea optică măsurată în baza opacității Rosseland τ_R.

- În principiu, k_R ar putea fi diferit față de τ din ec. (1), însă pentru simplitate luăm $k_R = k$.
- Deoarece în atmosfera stelară procesele de producție a energiei sunt absente, $H = \sigma T_{\rm ef}^4 / 4\pi = {\rm const.}$ iar

$$K(\tau) = (\tau + y)H, \tag{4}$$

unde y reprezintă o constantă de integrare.

- În **aproximația Eddington**, presupunem că relația $J \simeq 3K$ (validă la adâncimi optice mari) rămâne validă pentru orice τ, astfel încât

$$J(\tau) = 3(\tau + y)H \Rightarrow T(\tau) = T_{\rm ef} \left[\frac{3}{4}(\tau + y)\right]^{1/4}. \tag{5}$$

- Fluxul Eddington satisface ecuația Milne:

$$H_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dt\, S_\nu(t) E_2(|t-\tau_\nu|)\mathrm{sgn}(t-\tau_\nu). \tag{6}$$

- Integrând după ν, H satisface la suprafața stelei:

$$H(0) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dt\, S(t) E_2(t), \qquad E_2(t) = \int_1^\infty \frac{dz}{z^2} e^{-zt}. \tag{7}$$

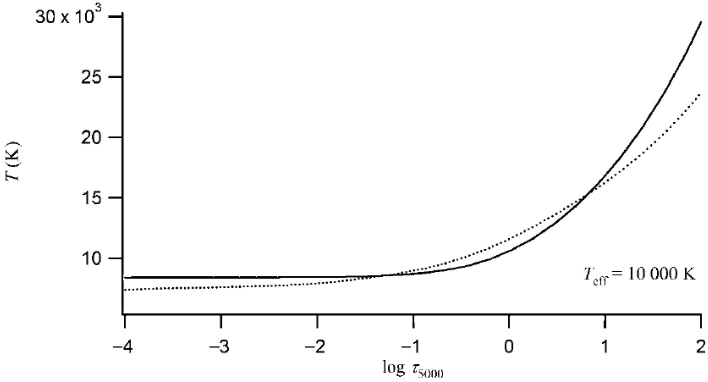
- Înlocuind $S(t) = J(t) = 3(t+y)H$, rezultă:

$$H = \frac{3H}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2}\right). \tag{8}$$

- Ecuația este satisfăcută când $y = 2/3$. Rezultă:

$$J(\tau) = 3H\left(\tau + \frac{2}{3}\right), \qquad T(\tau) = T_{\rm ef}\left[\frac{3}{4}\left(\tau + \frac{2}{3}\right)\right]^{1/4}. \tag{9}$$

- La suprafața stelei, $T(\tau = 0) = T_{\rm ef}/2^{1/4} \simeq 0,84\, T_{\rm ef}$.
- Adâncimea optică la care $T(\tau) = T_{\rm ef}$ este $\tau = 2/3$.



Comparație între $T(\tau)$ obținut în aproximația atmosferei gri (linia punctată) și profilul temperaturii obținut folosind un model numeric (linia continuă) pentru $T_{\rm ef} = 10.000$ K și $\log g = 4$, presupunând abundența solară a elementelor constitutive. Adâncimea optică este calculată pentru $\lambda = 5000$ Å.

III.7.4. Întunecarea periferică.

- Măsurătorile indică că intensitatea radiației în vecinătatea centrului discului solar este mai mare decât cea provenind din zona periferică.
- Acest lucru se întâmplă fiindcă radiația care provine din regiunile periferice nu călătorește pe direcție radială, străbătând straturile superficiale mai reci pe o distanță mai lungă.
- Intensitatea specifică emisă sub $u = \cos\theta$ se poate calcula folosind formula:

$$I_\nu(\tau_\nu = 0, u) = \int_0^\infty \frac{dt}{u} S_\nu(t)\, e^{-t/u}. \tag{10}$$

- Integrând după frecvențe și ținând cont că în aproximația atmosferei gri, $S(\tau) = 3(\tau + \frac{2}{3})H$, rezultă:

$$I(0, u) = 3H\left(u + \frac{2}{3}\right). \tag{11}$$

- Raportul intensității emise sub u oarecare și cea emisă pe direcție radială ($u = 1$) este:

$$\frac{I(0, u)}{I(0, 1)} = \frac{3}{5}\left(u + \frac{2}{3}\right). \tag{12}$$

- Radiația provenind de la periferia extremă a stelei ($u = 0$) are doar 40% din intensitatea provenită de la centrul discului.

III.8. Formarea liniilor spectrale.
III.8.1. Lărgimea echivalentă a liniilor spectrale.

- Lărgimea echivalentă W_{ij} a unei linii spectrale de absorbție se definește ca lărgimea unei linii ipotetice având profil rectangular care absoarbe toată radiația din interiorul său, cantitatea totală de energie absorbită fiind egală cu cea absorbită de linia căreia îi este asociată:
$$F_{c,\nu} W_{ij} = \int d\nu (F_{c,\nu} - F_{\nu}), \tag{13}$$
unde $F_{c,\nu}$ este fluxul în ipoteza absenței liniei, în jurul frecvenței naturale ν_0 a acesteia, iar F_{ν} este fluxul monocromatic.
- Definind *intensitatea reziduală* $R_{\nu} = F_{\nu}/F_{\nu,c}$ și *adâncimea liniei* $A_{\nu} = 1 - R_{\nu}$, W_{ij} se poate scrie:
$$W_{ij} = \int A_{\nu} d\nu. \tag{14}$$

III.8.2. Formarea liniilor atomice slabe

- Liniile atomice slabe (optic subțiri) au opacitatea $k_{\nu;ij}$ mult mai mică decât opacitatea spectrului continuu $k_{\nu,c}$, adică:

$$k_{\nu,ij} = \frac{n_i}{\rho}\alpha(\nu) \ll k_{\nu,c}. \tag{15}$$

- Să presupunem că fluxul monocromatic la suprafața stelei este cel al corpului negru: $F_\nu = \pi B_\nu$.
- Să presupunem că acest flux provine de la $\tau_{\nu;ij} = 2/3$.
- Pentru calculul lui W_{ij} avem nevoie de A_ν:

$$A_\nu = \frac{B_\nu(z_{\nu,c}) - B_\nu(z_\nu)}{B_\nu(z_{\nu,c})}, \tag{16}$$

  und $z_{\nu,c}$ și z_ν reprezintă coordonatele la care $\tau_{\nu,c}$, respectiv τ_ν, ating 2/3.
- La un z oarecare, $\tau_{\nu,c}(z)$ și $\tau_\nu(z)$ satisfac:

$$\tau_{\nu,c}(z) = \int_0^z dz\, \rho(k_\nu - k_{\nu;ij}) = \tau_\nu(z) - \Delta\tau_\nu, \qquad \Delta\tau_\nu = \alpha(\nu) N_i(z), \tag{17}$$

  unde $N_i(z)$ reprezintă densitatea de coloană a atomilor în starea i (capabili să efectueze tranziția $i \to j$ prin absorbție).

- A_ν se poate scrie:

$$A_\nu = \left.\frac{d\ln B_\nu(\tau_\nu)}{d\tau_\nu}\right|_{\tau_\nu=2/3} \Delta\tau_\nu. \tag{18}$$

- Lărgimea echivalentă este:

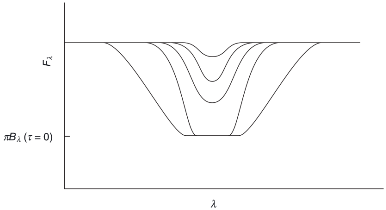
$$W_{ij} = \int_0^\infty d\nu \, \left.\frac{d\ln B_\nu(\tau_\nu)}{d\tau_\nu}\right|_{\tau_\nu=2/3} N_i(z_\nu)\pi c r_e f_{ij}\varphi_\nu, \tag{19}$$

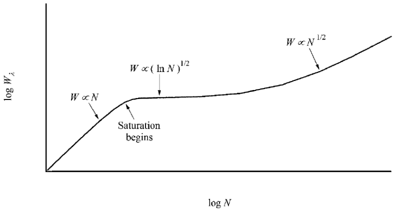
  unde φ_ν este profilul liniei, fiind puternic centrat pe frecvența naturală a tranziției $\nu = \nu_0$.
- Având în vedere că $\int_0^\infty d\nu\, \varphi_\nu = 1$, rezultă:

$$W_{ij} \simeq \left[N_i(\tau_{\nu_0})\frac{d\ln B_{\nu_0}(\tau_{\nu_0})}{d\tau_{\nu_0}}\right]_{\tau_{\nu,0}=2/3} \pi c r_e f_{ij}. \tag{20}$$

- Pentru liniile slabe, $W_{ij} \sim N_i$.
- În cazul unei plasme izoterme, $d\ln B_\nu/d\tau_\nu = 0$ iar $W_{ij} = 0$.

III.8.3. Curba de creștere pentru liniile atomice slabe





- W_{ij} crește liniar cu $N_i \Rightarrow$ linii nesaturate.
- Pe măsură ce crește N_i, $F_{\nu\simeq\nu_0}$ atinge valoarea minimă $\pi B_\nu(\tau = 0)$ (coresp. echilibrului termic local) $\Rightarrow$ linia devine saturată.
- În primă fază, W_{ij} a liniilor saturate crește conform $W_{ij} \sim \sqrt{\ln N_i}$.
- La N_i suficient de mare, lărgirea datorată presiunii devine importantă $\Rightarrow W_{ij} \sim \sqrt{N}$.
- Dependența lărgimii echivalente de abundența elementului căruia îi corespunde linia se numește **curba de creștere**.

Probleme

1. Să se arate că aproximația Eddington $[J_\nu(\tau) = 3K_\nu(\tau)]$ este validă când $I_\nu(\tau, u) = a_\nu(\tau) + b_\nu(\tau)u$.
2. Să se arate că, în aproximația plan-paralelă a unei atmosfere gri aflată în echilibru radiativ, fluxul Eddington integrat este $H = S(\tau = 2/3)/4$.
3. **Funcția Hopf.** Renunțând la aproximația Eddington, presupunem că $J(\tau) = 3H[\tau + q(\tau)]$. Folosind ecuația Schwarzschild, să se arate că funcția Hopf $q(\tau)$ satisface ecuația integrală:

$$\tau + q(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dt[t + q(t)]E_1(|t - \tau|).$$

4. Pornind de la ec. Schwarzschild, să se rezolve următoarele cerințe:
   a) Să se calculeze $J_{\rm Sch}(\tau = 0)$ pentru cazul când $S = J$ este dat în ec. (9) și să se compare cu $J(\tau = 0)$. [R: $J_{\rm Sch}(0) = \frac{7}{8}J(0)$]
   b) Să se arate că $\lim_{\tau\to\infty} J_{\rm Sch} = J = 3H\tau \simeq 3K$, adică aproximația Eddington devine validă.

Probleme

5. Pornind de la ecuația Milne, să se rezolve următoarele cerințe:
   a) Să se arate că funcțiile $E_n(x)$ satisfac $\frac{dE_n}{dx} = -E_{n-1}(x)$.
   b) Să se arate că $E_n(x) < e^{-x}/x$ când $x \gg 1$.
   c) Să se calculeze fluxul Eddington integrat $H_{\mathrm{Milne}}(\tau)$ corespunzător soluției (9) pentru $J = S$. [R: $H_{\mathrm{Milne}}(\tau) = H\left[1 - \frac{3}{2}E_4(\tau) + E_3(\tau)\right]$]
   d) Să se arate că $\lim_{\tau\to 0,\infty} H_{\mathrm{Milne}}(\tau) = H$.
   e) Să se găsească adâncimea optică $\tau_{\max}$ la care $|H_{\mathrm{Milne}}(\tau)/H - 1|$ atinge valoarea maximă. [R: $\tau_{\max} \simeq 0,43$]

Probleme

6. **Aproximația celor două fluxuri.** În aproximația atmosferei gri, considerăm că intensitatea specifică se propagă înainte și înapoi de-a lungul unei singure direcții, astfel încât $I(\tau, u) = I^+(\tau)\delta(u - u_s) + I^-(\tau)\delta(u + u_s)$.
   a) Să se evalueze momentele câmpului radiativ. $[J = \frac{1}{2}(I^+ + I^-)$, $H = \frac{u_s}{2}(I^+ - I^-)$, $K = \frac{u_s^2}{2}(I^+ + I^-)]$
   b) Să se arate că aproximația Eddington este satisfăcută când $u_s = 1/\sqrt{3}$.
   c) Pornind de la ecuația transferului radiativ, să se arate că

   $$u_s \frac{dJ}{d\tau} = \frac{H}{u_s}, \qquad u_s^2 \frac{d^2 J}{d\tau^2} = J - S.$$

   d) Considerând propagarea printr-un mediu neabsorbant $(S = J)$, să se arate că H rămâne constant.
   e) Impunând ca la ieșirea din atmosfera stelară, $I^-(0) = 0$, să se găsească $I^{\pm}(\tau)$ și $J(\tau)$. [R: $I^+ = \frac{H}{u_s}(\frac{\tau}{u_s} + 2)$, $I^- = \frac{H\tau}{u_s^2}$, $J = \frac{H}{u_s}(\frac{\tau}{u_s} + 1)$]
7. Să se calculeze lățimea echivalentă a unei linii atomice de absorbție având o formă triunghiulară, unde fluxul în centrul acesteia este $1/4$ din fluxul corespunzător spectrului continuu iar lățimea bazei triunghiului este de $1,1 \times 10^{12}$ Hz. [R: $412,5$ GHz]