Astrofizică stelară
Cursul 6

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Conținutul cursului

Capitolul III. Transferul radiativ

- III.1. Intensitatea câmpului radiativ.
- III.2. Ecuația transferului radiativ.
- III.3. Ecuațiile Boltzmann și Saha.
- III.4. Lărgirea liniilor spectrale.
- **III.5. Opacitatea Rosseland.**
- **III.6. Modelarea absorbției și emisiei.**
- III.7. Atmosfera gri.
- III.8. Formarea liniilor spectrale.

III.5. Opacitatea Rosseland.
III.5.1. Cazul general.

- Fluxul Eddington H_ν poate fi scris în funcție de K_ν, care e dat prin:
$$K_\nu = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \, I_\nu \, u^2. \tag{1}$$
- Derivata lui K_ν în raport cu τ_ν se poate scrie ținând cont de ec. transferului radiativ:
$$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega (uI_\nu - uS_\nu) = H_\nu, \tag{2}$$
unde a doua egalitate este valabilă doar când S_ν e funcție pară de u (de ex., pentru $S_\nu = \frac{\kappa_\nu}{k_\nu} B_\nu + \frac{\sigma_\nu}{k_\nu} J_\nu$).
- Ținând cont că $d\tau_\nu = -k_\nu \rho dz$, ec. (2) devine:
$$H_\nu = -\frac{1}{k_\nu \rho} \frac{dK_\nu}{dz}. \tag{3}$$
- Opacitatea Rosseland k_R se definește ca acea valoare a opacității pentru care fluxul Eddington integrat satisface ($K = \int_0^\infty d\nu \, K_\nu$):
$$H = -\frac{1}{k_R \rho} \frac{dK}{dz}, \qquad \frac{1}{k_R} = \frac{1}{dK/dz} \int_0^\infty \frac{d\nu}{k_\nu} \frac{dK_\nu}{dz}. \tag{4}$$

III.5.2. Adâncimi optice mari.

- La adâncimi optice mari, $K_\nu = \frac{1}{3} B_\nu$ iar $K = \frac{1}{3\pi} \sigma T^4$, în timp ce k_R este dat prin:
$$\frac{1}{k_R} = \frac{\pi}{4\sigma T^3} \int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu, \qquad (5)$$
unde s-a ținut cont că B_ν depinde de z prin T, astfel că $dB_\nu/dz = (dB_\nu/dT) \times (dT/dz)$.
- Fluxul Eddington integrat devine:
$$H = -\frac{4\sigma T^3}{3\pi k_R \rho} \frac{dT}{dz}, \qquad (6)$$
astfel recuperând legea lui Fick ($H \sim -dT/dz$).
- Conform ec. (6), când H este constant, dT/dz trebuie să crească când k_R crește (menținând pe ρ constant).

III.6. Modelarea absorbției și emisiei.
III.6.1. Surse de opacitate.

- Opacitatea $k_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$ se datorează:
  - împrăștierilor (σ_ν);
  - absorbției (κ_ν).
- În plasma stelară, electronii reprezintă principala cauză de opacitate.
- În funcție de starea (legat/liber) în care se găsește electronul înainte sau după absorbție, distingem următoarele procese:
  1. Tranziții din stare legată în stare legată $\kappa_{\nu,\mathrm{bb}}$;
  2. Tranziții din stare legată în stare liberă $\kappa_{\nu,\mathrm{bf}}$;
  3. Tranziții din stare liberă în stare liberă $\kappa_{\nu,\mathrm{ff}}$.

III.6.2. Opacitatea datorată împrăștierilor σ_ν.

- Împrăștierea luminii în plasmă este un proces complex ce depinde de condițiile în care se găsește plasma.
- În plasma stelară, fenomenul dominant este cel de împrăștiere Thomson pe electronii liberi, pentru care σ_ν are forma

$$\sigma_\nu = \frac{n_e}{\rho}\sigma_{\rm Th}, \qquad \sigma_{\rm Th} = \frac{8\pi}{3} r_{\rm cl}^2, \qquad r_{\rm cl} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}, \tag{7}$$

unde $\sigma_{\rm Th}$ este secțiunea eficace totală Thomson iar raza clasică $r_{\rm cl}$ are valorile:

$$\begin{aligned} \text{Electroni}: &\quad \sigma_e \simeq 66,5 \text{ fm}^2 &\quad (r_{\rm cl} \simeq 2,82 \text{ fm}), \\ \text{Protoni}: &\quad \sigma_p \simeq 19,73 \times 10^{-6} \text{ fm}^2 &\quad (r_{\rm cl} \simeq 0,0015 \text{ fm}). \end{aligned} \tag{8}$$

- Deoarece $\sigma_{\rm Th}$ nu depinde de ν, $k_{R;\rm Th} = \frac{n_e}{\rho}\sigma_{\rm Th}$.

III.6.3. Opacitatea datorată tranzițiilor bb.

- Opacitatea datorată absorbției aferente tranziției de pe nivelul i pe nivelul j este:

$$k_\nu = \frac{n_i}{\rho}\alpha(\nu), \qquad \alpha(\nu) = \pi c r_e f_{ij}\varphi_\nu, \tag{9}$$

  unde

  1. n_i este densitatea atomilor pe nivelul i;
  2. $r_e \simeq 2,82 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$ este raza clasică a electronului;
  3. f_{ij} este tăria oscilatorului asociat tranziției;
  4. φ_ν este profilul tranziției.

- Pentru tranzițiile din starea fundamentală a atomului de hidrogen, avem:

$$\begin{aligned} f_{1,2} \equiv & f_{\mathrm{Ly}\alpha} = 0,4162, \\ f_{1,3} \equiv & f_{\mathrm{Ly}\beta} = 0,1193, \\ f_{1,4} \equiv & f_{\mathrm{Ly}\gamma} = 0,04467. \end{aligned} \tag{10}$$

- Deoarece k_ν este puternic centrat pe frecvența tranziției, obținerea unei formule analitice pentru opacitatea Rosseland k_R aferentă tranzițiilor bb nu este posibilă.

Opacitatea Rosseland a profilului Lorentz.

- La adâncimi optice mari, opacitatea Rosseland e dată de:

$$k_R = \frac{n_i}{\rho} 4\sigma T^3 c r_e f_{ij} \left(\int_0^\infty \frac{d\nu}{\varphi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \right)^{-1}, \tag{11}$$

...de unde rezultă:

$$k_R = \frac{n_i}{\rho} \frac{\Gamma}{4\pi\nu_0^2} c r_e f_{ij} \left[1 + \left(\frac{\Gamma}{4\pi\nu_0} \right)^2 - \frac{900\zeta(5)}{\pi^4} \frac{K_B T}{h\nu_0} + \frac{20\pi^2}{7} \left(\frac{K_B T}{h\nu_0} \right)^2 \right]^{-1}, \tag{12}$$

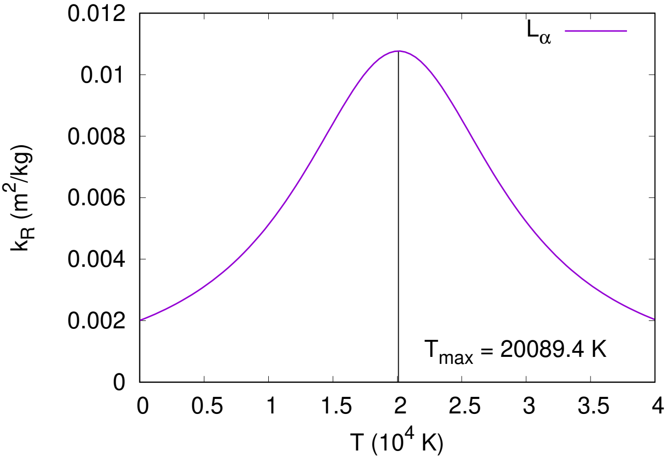
unde s-au folosit relațiile:

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \simeq 6,5, \qquad \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{e^x - 1} = 24\zeta(5) \simeq 24,8863,$$

$$\int_0^\infty \frac{x^5 dx}{e^x - 1} = \frac{8\pi^6}{63} \simeq 122.$$

- Opacitatea Rosseland (12) atinge maximul când

$$T_{\max} = \frac{h\nu_0}{K_B} \frac{315\zeta(5)}{2\pi^6} \simeq 0,17 \times \frac{h\nu_0}{K_B}. \tag{13}$$



Opacitatea Rosseland corespunzătoare liniei L_α a hidrogenului pentru care se neglijează lărgirea Doppler ($\nu_0 \simeq 2,463 \times 10^{15}$ Hz, $\Gamma \simeq 0,4699$ GHz, $f_{ij} \simeq 0,4162$). Maximul se găsește la $T_{\max} \simeq 20\,089,4$ K.

Opacitatea Rosseland a profilului Voigt.

- La $T \simeq 20\,000$ K, lărgirea Doppler joacă un rol important în profilul liniei L_α a hidrogenului.
- Deoarece $\varphi_{\nu,\mathrm{Voigt}}$ depinde de temperatură, este convenabilă utilizarea proprietății $dB_\nu/dT = -\frac{\nu^4}{T} d(B_\nu/\nu^3)/d\nu$ pentru a obține:

$$\int_0^\infty \frac{d\nu}{\varphi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} = \frac{1}{T} \int_0^\infty d\nu\, B_\nu \frac{1}{\nu^3} \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\nu^4}{\varphi_\nu} \right), \tag{14}$$

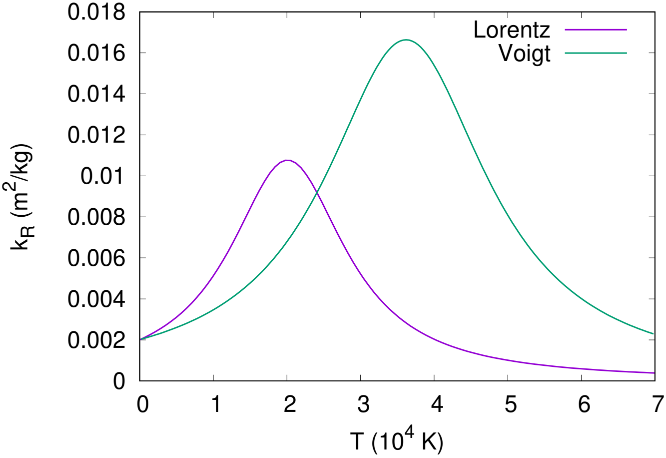
...de unde rezultă:

$$k_R = \frac{n_i}{\rho} 4\sigma T^4 c r_e f_{ij} \left[\int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu^3} B_\nu \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\nu^4}{\varphi_{\nu,\mathrm{Voigt}}} \right) \right]^{-1}, \tag{15}$$

unde

$$\frac{1}{\nu^3} \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\nu^4}{\varphi_{\nu,\mathrm{Voigt}}} \right) = \frac{1}{\varphi_\nu^2} \frac{a}{\pi^{3/2} \Delta\nu_D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy\, e^{-y^2}}{(v-y)^2 + a^2}$$

- Ecuația (15) trebuie evaluată numeric.



Opacitatea Rosseland corespunzătoare liniei L_α a hidrogenului obținută pentru profilele Lorentz și Voigt. Temperatura pentru care k_R este maxim crește de la $T_{\max} \simeq 20\,000$ K (Lorentz) la $T_{\max} \simeq 36\,200$ K (Voigt). De asemenea, $k_{R;\max}$ crește de la $\simeq 0,007\ \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}$ (Lorentz) la $\simeq 0,011\ \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}$ (Voigt).

III.6.4. Opacitatea datorată tranzițiilor bf și ff.

- Tranzițiile bf sunt permise doar când energia fotonilor incidenți depășește energia de ionizare a atomilor din mediu.
- Tranzițiile ff se referă la absorbția unui foton de către electronii liberi în prezența unui ion care preia reculul.
- κ_{bf} și κ_{ff} admit legile de tip Kramers:

$$\begin{aligned} \kappa_{bf} =& 4,34 \times 10^{21} \frac{g_{bf}}{t} Z(1+X)\rho T^{-3,5}, \\ \kappa_{ff} =& 3,68 \times 10^{18} g_{ff}(1-Z)(1+X)\rho T^{-3,5}, \end{aligned} \tag{16}$$

unde

- $g_{bf} \simeq 1$ și $g_{ff} \simeq 1$ sunt factorii Gaunt, reprezentând corecții de natură cuantică;
- $t = g_{bf} \times 0,708[\rho(1+X)]^{1/5}$ este un factor de ecranare;
- X și Z reprezintă fracțiile masice ale hidrogenului, respectiv metalelor;
- ρ e densitatea în $\mathrm{kg/m^3}$;
- T e temperatura în K;
- Valorile opacităților sunt în m^2/kg.

Probleme

1. Un electron efectuează o mișcare oscilatorie cu pulsația $\omega_0 = 2\pi\nu_0$. Pierderile radiative din decursul acestei mișcări accelerate sunt modelate printr-un coeficient de atenuare constant $\gamma = 2\omega_0^2 r_{\rm cl}/3c$. O undă electromagnetică care străbate spațiul acționează asupra electronului prin câmpul electric $E_\nu(t) = E_0 \cos\Omega t$, unde $\Omega = 2\pi\nu$. Să se rezolve următoarele cerințe:
   a) Presupunând că electronul satisface ecuația $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E_\nu(t)$, să se arate că în limita timpilor mari, legea sa de mișcare devine:
   $$x(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t,$$
   $$A = \frac{eE_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}, \qquad B = \frac{eE_0}{m}\frac{\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}.$$
   b) Să se arate că variația în timp a energiei totale, $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2)$, satisface
   $$\frac{dE}{dt} = W - D, \qquad W = e\dot{x}E_\nu(t), \qquad D = m\gamma\dot{x}^2,$$
   unde W reprezintă lucrul mecanic efectuat de unda electromagnetică asupra electronului iar D reprezintă pierderea de energie datorată disipării.

Probleme

1. (continuare)

   c) Să se arate că media temporală pe o perioadă $2\pi/\Omega$ a lucrului mecanic absorbit este

   $$\langle W\rangle = \frac{eE_0}{2}\Omega B = \frac{e^2E_0^2}{2m}\frac{\gamma\Omega^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+\gamma^2\Omega^2},$$

   și să se arate că $\langle W\rangle = \langle D\rangle$.

   d) În limita când $|(\nu-\nu_0)/\nu_0| \ll 1$, să se arate că $\langle W\rangle \simeq e^2E_0^2\varphi_\nu/8m$, unde φ_ν este profilul Lorentz pentru $\Gamma = \gamma$.

   e) Considerăm acum că un flux de radiație de intensitate $I_\nu = \varepsilon_0 c\,\langle E_\nu^2\rangle$ străbate un mediu având o densitate n de oscilatori. Considerând că $dI_\nu/dt = -\langle W\rangle$ și impunând $dI_\nu/dt = -\rho k_\nu I_\nu$, să se arate că opacitatea mediului satisface $k_\nu = \frac{n}{\rho}\alpha(\nu)$, unde $\alpha(\nu) = \pi c r_{\mathrm{cl}}\varphi_\nu$.

2. **Profilul Doppler.** Să presupunem că profilul natural al unei linii spectrale este $\varphi_\nu = \delta(\nu-\nu_0)$. Să se arate că în urma lățirii Doppler, acesta devine

   $$\varphi_\nu^{\mathrm{Doppler}} = \frac{c}{\nu}\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\exp\left[-\frac{mc^2}{2k_B T}\left(\frac{\nu-\nu_0}{\nu}\right)^2\right].$$

Probleme

3. Puterea emisă prin dezexcitarea spontană a unui ansamblu de atomi urmează legea exponențială $e^{-\Gamma t}$. Să se rezolve următoarele cerințe:

   a) Interpretând această lege ca și o probabilitate de dezexcitare $p(t) = p_0 e^{-\Gamma t}$, să se calculeze p_0 a.î. $\int_0^\infty p(t) dt = 1$. [R: $p_0 = \Gamma$]
   b) Să se găsească timpul mediu de viață $\tau = \int_0^\infty dt\, p(t) t$. [R: $\tau = \Gamma^{-1}$]
   c) Presupunând că dezexcitarea se face între nivelurile j și i având timpii de viață τ_j, respectiv τ_i, să se estimeze folosind principiul lui Heisenberg ($\Delta\tau\Delta E = \hbar$) lățimea întreagă la jumătatea intensității $\Gamma/2\pi = \Delta E/h$ aferentă tranziției.
   d) Să se calculeze Γ pentru tranziția Balmer-α a hidrogenului, presupunând că $\tau_{i=2} = \tau_{j=3} = 10^{-8}\,\mathrm{s}$. Să se compare cu valoarea măsurată experimental, $\Gamma = 44,1\ \mathrm{MHz}$. [R: $\Gamma = 1/(\tau_2 + \tau_3) = 50\ \mathrm{MHz}$]

4. Electronii liberi pot absorbi fotoni în câmpul Coulomb al unui nucleu, astfel având loc o tranziție din stare liberă în stare liberă. Opacitatea monocromatică pentru aceste procese poate fi aproximată prin

$$k_\nu = \alpha \frac{\rho}{\nu^3 T^{1/2}} (1 - e^{-h\nu/k_B T}),$$

   unde α este o constantă. Să se arate că opacitatea Rosseland depinde de temperatură prin $k_R \propto \rho T^{-7/2}$.

Probleme

5. Pornind de la expresia profilului Lorentz, să se arate că lărgimea întreagă a acestuia este $\Gamma/2\pi$. La ce valoare a raportului $(\nu - \nu_0)/(\Gamma/4\pi)$ are profilul Lorentz o valoare egală cu 1% din valoarea sa centrală? Dar pentru $0,1\%$ din valoarea sa centrală? [R: 10; $31,6$]
6. Spectrul unei stele este deplasat relativ la frecvențele naturale datorită unei viteze a stelei de-a lungul direcției de observare. Să se găsească modulul și semnul acestei viteze dacă linia H_β este deplasată cu $\Delta\lambda = 0,4$ Å. [R: $24,6\ \mathrm{km/s}$]
7. Să se arate că cea mai probabilă viteză V_0 într-un gaz de particule de masă m aflat în echilibru termodinamic la temperatura T este $V_0 = \sqrt{2K_B T/m}$.
8. Să se calculeze procentul de electroni liberi într-un gaz aflat la $T = 10.000\ \mathrm{K}$ care au o energie cinetică suficient de mare pentru a ioniza atomii de hidrogen aflați în prima stare excitată. [R: $4,8\%$]