Astrofizică stelară
Cursul 4

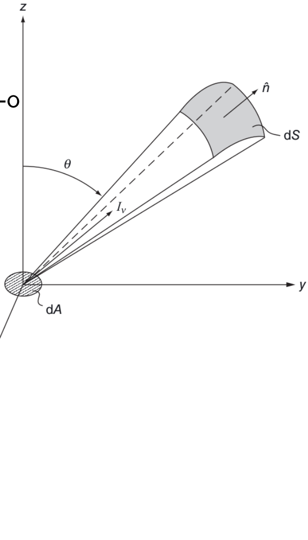
Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Conținutul cursului

Capitolul III. Transferul radiativ

III.1. Intensitatea câmpului radiativ.
III.1.1. Intensitatea specifică



- **Intensitatea specifică** I_ν definește intensitatea câmpului de radiație printr-o anumită suprafață pe o direcție dată.
- Cantitatea de radiație emanată de suprafața **dA** centrată pe vectorul de poziție **r**, emisă sub un unghi solid $d\Omega$ centrat pe direcția **n**, în domeniul de frecvență ν și $\nu + d\nu$, per unitatea de timp, este:

$$I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) \cos\theta dA d\Omega d\nu dt.$$

- $[I_\nu]_{\mathrm{SI}} = \mathrm{W/Hz\,m^2\,sr}$.[1]
- Exceptând stadiile de evoluție stelară rapidă, I_ν nu depinde de timp.
- I_ν reprezintă intensitatea unei raze infinit de subțiri, care în absența opacității sau surselor din mediu rămâne constantă de-a lungul razei.

[1]Sterradianul sr este unitatea de măsură a unghiului solid.

III.1.2. Momentele câmpului radiativ.

- Momentele câmpului radiativ prin suprafața $\mathbf{dA} = \mathbf{n}_A dA$ sunt

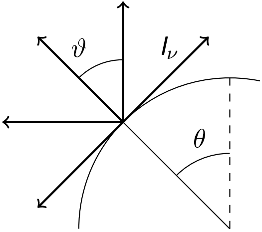
$$M_\nu^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{n}_A, t) = \frac{1}{4\pi} \oint d\Omega\, I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_A)^s. \qquad (1)$$

- **Intensitatea medie**: $J_\nu = M_\nu^{(0)} = \dfrac{1}{4\pi} \oint d\Omega\, I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$.
- **Densitatea de energie** cu frecvență ν: $U_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu$.
- **Fluxul radiativ monocromatic**: $F_\nu = \oint d\Omega\, I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_A)$.
- **Fluxul Eddington**: $H_\nu = M_\nu^{(1)} = \dfrac{F_\nu}{4\pi}$.
- **Fluxul radiativ integrat**: $F \equiv F(\mathbf{r}, \mathbf{n}_A, t) = \displaystyle\int_0^\infty d\nu\, F_\nu$.
- **Integrala K**: $K_\nu = M_\nu^{(2)} = \oint d\Omega\, I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_A)^2$.
- **Luminozitatea** L_* (măsurată în W) a unei suprafețe închise Σ reprezintă puterea radiativă totală emanată de aceasta:

$$L(\Sigma, t) = \oint_\Sigma dA\, F(\mathbf{r}, \mathbf{n}_A, t), \qquad (2)$$

unde $\mathbf{r}$ reprezintă vectorul de poziție al elementului $d\Sigma$.

III.1.3. Exemplu: Sfera izotropă.



- Să considerăm o sferă de rază r a cărei suprafață emite radiație înspre mediul exterior vid având intensitatea specifică

$$I_\nu(r,\theta,\varphi;\vartheta,\phi) = f_\nu \times \begin{cases} 1, & \vartheta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \vartheta > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

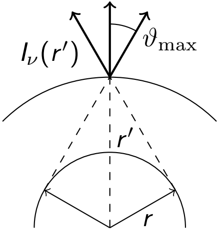
- Pentru simplitate, f_ν nu depinde de poziția pe sferă (θ,φ) sau de direcția de emisie (ϑ,ϕ).
- Momentele acestui câmp radiativ într-un punct de pe suprafața sferei sunt:

$$J_\nu(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{2} f_\nu, \qquad H_\nu(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4} f_\nu. \tag{3}$$

- Luminozitatea totală la suprafața sferei este

$$L(r) = \int d\Sigma(r,\theta,\varphi) F(r,\theta,\varphi) = 4\pi^2 r^2 \int_0^\infty d\nu\, f_\nu. \tag{4}$$

III.1.4. Emisia izotropică sferică.



- Fie o sferă de rază $r' > r$, concentrică cu cea de rază r.
- Orice punct de pe sfera de rază r' primește radiație dinspre sfera interioară doar într-un interval $0 \leq \vartheta < \vartheta_{\max}$:

$$I_\nu(r', \theta, \varphi; \vartheta, \phi) = f_\nu \times \begin{cases} 1, & \vartheta < \vartheta_{\max}, \\ 0, & \vartheta > \vartheta_{\max}. \end{cases}$$

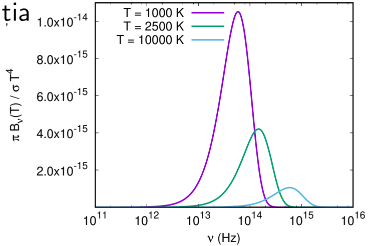
- $\cos \vartheta_{\max} = \sqrt{1 - r^2/r'^2}$ este unghiul făcut de tangenta la sfera interioară care trece prin punctul de observație.
- Momentele câmpului radiativ pe suprafața sferei sunt:

$$J_\nu(r', \theta, \varphi) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{r'^2}}\right) f_\nu, \qquad H_\nu(r', \theta, \varphi) = \frac{r^2}{4r'^2} f_\nu.$$

- Întrucât $d\Sigma(r', \theta, \varphi) = \frac{r'^2}{r^2} d\Sigma(r, \theta, \varphi)$, luminozitatea satisface $L(r') = L(r)$.

III.1.5. Funcția Planck pentru radiația corpului negru.

- Un corp care absoarbe toată radiația incidentă asupra sa se numește **corp negru**.
- Radiația emisă de un corp negru este datorată exclusiv energiei termice a acestuia, având I_ν egală cu funcția Planck $B_\nu(T)$:

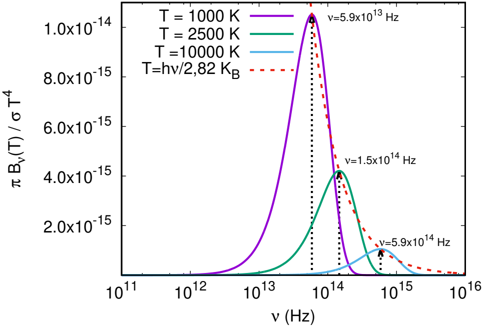


$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left[\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right]^{-1}, \tag{5}$$

unde ν este frecvența radiației emise iar T e temperatura corpului.

- În interiorul corpului negru, radiația este izotropă, astfel încât I_ν nu depinde de $\mathbf{n}$, ci doar de $\mathbf{r}$ prin temperatura locală, $T(\mathbf{r})$.
- Figura reprezintă $\pi B_\nu(T)/\sigma T^4$ pentru diferite valori ale lui T (vezi mai jos semnificația factorului $\sigma T^4/\pi$).

III.1.6. Legea de deplasare a lui Wien



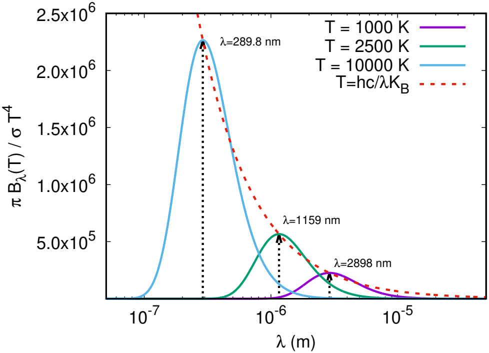
- Frecvența $\nu_{\max}$ la care corpul negru radiază maximul de energie este dată de ecuația:

$$\partial_\nu B_\nu(T)\rfloor_{\nu=\nu_{\max}} = 0 \Rightarrow \frac{h\nu}{k_B T} = 3\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)\right].$$

- Soluția ecuației se obține cu metode numerice:

$$\nu_{\max} = 2,82144\frac{k_B T}{h}. \tag{6}$$

- $\nu_{\max}$ crește liniar cu temperatura T.



- Funcția Planck în lungimi de undă, B_λ, se definește prin:

$$|B_\lambda d\lambda| = |B_\nu d\nu| \Rightarrow B_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} B_\nu = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T} \right) - 1 \right]^{-1} .$$

- Rezultă $(hc/\lambda k_B T)_{\max} \simeq 4.96511$, adică $\lambda_{\max} = 0.002898\, T^{-1}$, unde $\lambda_{\max}$ este în m când T este dat în K.
- S-a obținut **legea lui Wien**, conform căreia $\lambda_{\max}$ este invers proporțional cu T.

III.1.7. Legea Stefan-Boltzmann.

- În interiorul corpului negru avem:

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \oint d\Omega\, B_\nu = B_\nu, \qquad F_\nu = \oint d\Omega\, B_\nu \cos\theta = 0. \tag{7}$$

- La suprafața corpului negru, alegând elementul de suprafață $\mathbf{dA} = \mathbf{k}\, dA$, avem:

$$I_\nu(\mathbf{n}) = \begin{cases} B_\nu, & \cos\theta > 0, \\ 0, & \cos\theta < 0. \end{cases} \tag{8}$$

- Rezultă:

$$J_\nu = \frac{1}{2} B_\nu, \qquad F_\nu = B_\nu \int_0^1 d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\theta = \pi B_\nu. \tag{9}$$

- Fluxul total de radiație F prin elementul de suprafață a corpului negru în unitatea de timp este:

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{2k_B^4 \pi^5}{15 c^2 h^3} \simeq 5.67037 \times 10^{-8}\, \mathrm{W\, m^{-2} K^{-4}}.$$

- **Legea Stefan-Boltzmann.** Fluxul total de radiație a corpului negru este proporțional cu T^4. Constanta de proporționalitate σ poartă numele de constanta Stefan-Boltzmann.

III.1.8. Temperatura efectivă.

- **Luminozitatea** L_* reprezintă puterea radiativă totală emanată de suprafața stelară.
- $[L_*]_{\mathrm{SI}} = \mathrm{W} = \mathrm{J/s}$.
- Luminozitatea unei stele de suprafață Σ se calculează după cum urmează:
$$L(\Sigma, t) = \oint_\Sigma dA\, F(\mathbf{r}, \mathbf{n}_A, t), \tag{10}$$
unde $\mathbf{r}$ reprezintă vectorul de poziție al elementului $d\Sigma$.
- În cazul corpului negru sferic de rază R la temperatura T, $F = \sigma T^4$ pe toată suprafața acestuia iar $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$.
- **Temperatura efectivă** T_{ef} a unei stele reprezintă temperatura corpului negru având raza și luminozitatea egale cu cele ale stelei:
$$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_{\mathrm{ef}}^4 \Rightarrow T_{\mathrm{ef}} = \left(\frac{L_*}{4\pi R_*^2 \sigma}\right)^{1/4}, \tag{11}$$
unde R_* reprezintă raza stelei iar $\sigma \simeq 5,67037 \times 10^{-8}\,\mathrm{K}^{-4}$ este constanta Stefan-Boltzmann.
- **Fluxul radiativ integrat** la o distanță $r > R_*$ de centrul unei stele sferice este
$$F(r > R_*) = \frac{L_*}{4\pi r^2}. \tag{12}$$

III.2. Ecuația transferului radiativ.
III.2.1. Aproximația plan-paralelă a atmosferei stelare.

- În straturile exterioare ale atmosferei stelare, curbura acestora este neglijabilă.
- În **aproximația plan-paralelă**, atmosfera stelară este considerată omogenă după direcțiile x și y, care sunt perpendiculare pe direcția radială z.
- $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) \to I_\nu(z, u)$, unde $u = \cos\theta$ iar dependența temporală poate fi neglijată când steaua se găsește în echilibru.
- Rezultă:

$$
\begin{aligned}
J_\nu(z) =& \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} du\, I_\nu(z, u), \\
F_\nu(z) =& 2\pi \int_{-1}^{1} du\, u\, I_\nu(z, u), \\
H_\nu(z) =& \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} du\, u\, I_\nu(z, u), \\
K_\nu(z) =& \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} du\, u^2\, I_\nu(z, u).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

III.2.2. Ecuația transferului radiativ în aproximația plan-paralelă.

- Să considerăm un element de volum $dV = d\Sigma ds$, unde $\mathbf{d\Sigma} = \mathbf{n} d\Sigma$ este paralel cu direcția de propagare a radiației $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$.
- În urma propagării prin acest volum, intensitatea fasciculului scade datorită absorbției și crește datorită emisiei:

$$dI_\nu = -k_\nu \rho I_\nu ds + j_\nu \rho ds, \tag{14}$$

unde ρ este densitatea de masă. Mai sus au fost introduse notațiile:

Opacitatea monocromatică: $k_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$;
Opacitatea datorată absorbției: κ_ν;
Opacitatea datorată împrăștierilor: σ_ν;
Emisivitatea monocromatică: j_ν.

- Ținând cont că $ds = dz/\cos\theta$, rezultă:

$$\frac{u}{\rho} \frac{dI_\nu(z, u)}{dz} = -k_\nu I_\nu(z, u) + j_\nu. \tag{15}$$

- În cazul corpului negru, mediul emite tot atâta radiație câtă absoarbe iar j_ν poate fi aproximat prin:

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu. \tag{16}$$

III.2.3. Adâncimea optică τ_ν.

- **Adâncimea optică** τ_ν este un număr adimensional care reflectă efectul absorbției asupra radiației e.m. pe o anumită traiectorie.
- În aproximația plan-paralelă, τ_ν se măsoară de la suprafața stelei $(z = R_*)$ înspre interiorul acesteia:

$$\tau_\nu(z) = -\int_{R_*}^{z} dz\, k_\nu\, \rho, \tag{17}$$

unde $k_\nu \rho dz$ reprezintă atenuarea intensității specifice pe segmentul de lungime dz iar semnul $-$ reflectă faptul că z scade înspre interiorul stelei.

- Prin convenție, $\tau_\nu(z = R_*) = 0$.
- Cu ajutorul opacității, ec. (14) se poate scrie:

$$u\frac{dI_\nu(\tau_\nu, u)}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu, \tag{18}$$

unde $S_\nu = j_\nu / k_\nu$ poartă numele de **funcția sursă**.

- Aproximând pe j_ν folosind ec. (16) rezultă:

$$S_\nu(\tau_\nu) = \frac{\kappa_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu}. \tag{19}$$

III.2.4. Echilibrul radiativ.

- **Echilibrul radiativ** reprezintă starea în care transportul de energie are loc exclusiv prin transfer radiativ.
- Integrând ec. (15) după Ω și ν rezultă:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dF}{dz} = \int_0^\infty d\nu \oint d\Omega(-k_\nu I_\nu + j_\nu). \qquad (20)$$

- În atmosferele stelare, nu există nici surse și nici pierderi de energie.
- În aproximația plan-paralelă, $F = \sigma T_{\mathrm{ef}}^4 = \mathrm{const}$ la orice adâncime optică.
- Ținând cont că k_ν nu depinde de Ω, rezultă:

$$\int_0^\infty d\nu\, k_\nu J_\nu = \int_0^\infty d\nu\, k_\nu S_\nu. \qquad (21)$$

- Înlocuind aproximația (19) pentru S_ν rezultă:

$$\int_0^\infty d\nu\, \kappa_\nu (J_\nu - B_\nu) = 0. \qquad (22)$$

- Această ecuație stabilește o relație între temperatura locală (de care depinde B_ν) și intensitatea medie J_ν.

III.2.5. Soluția în absența surselor.

- În absenței surselor ($S_\nu = 0$), ec. (18) se reduce la:

$$u \frac{dI_\nu(\tau_\nu, u)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu, u). \tag{23}$$

- Ecuația se poate rezolva analitic, având soluția

$$I_\nu(\tau_\nu, u) = I_\nu(\tau'_\nu, u) e^{(\tau_\nu - \tau'_\nu)/u}. \tag{24}$$

- Presupunând că nu există flux incident asupra suprafeței stelei dinspre exterior, $I_\nu(0, u < 0) = 0$ și astfel

$$I_\nu(\tau_\nu, u < 0) = 0. \tag{25}$$

- Pentru $u > 0$, la suprafața stelei avem $I_\nu(0, u) = I_\nu(\tau_\nu, u) e^{-\tau_\nu/u}$.

III.2.6. Soluția generală a ecuației transferului radiativ.

- Soluția ecuației transferului radiativ (18) pentru S_ν arbitrar este:

$$I_\nu(\tau_{\nu,1},u) = I_\nu(\tau_{\nu,2},u)e^{(\tau_{\nu,1}-\tau_{\nu,2})/u} + \int_{\tau_{\nu,1}}^{\tau_{\nu,2}} \frac{dt}{u} S_\nu(t)\, e^{(\tau_{\nu,1}-t)/u}. \tag{26}$$

- Contribuțiile la $I_\nu(\tau_{\nu,1},u)$ cu $u>0$ (emergente) provenind de la adâncimi optice cu $\tau_{\nu,2} > \tau_{\nu,1}$ sunt atenuate exponențial.
- Pentru $u<0$, I_ν se poate exprima în funcție de un punct de pe suprafața stelei ($\tau_{\nu,2}=0$), unde presupunem că $I_\nu(0,u<0)=0$:

$$I_\nu(\tau_\nu,u<0) = -\int_0^{\tau_\nu} \frac{dt}{u} S_\nu(t) e^{(\tau_\nu-t)/u}. \tag{27}$$

- În cazul când $\tau_{\nu,2}\to\infty$ ($u>0$), se poate neglija primul termen din ec. (26):

$$I_\nu(\tau_\nu,u>0) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} \frac{dt}{u} S_\nu(t) e^{(\tau_\nu-t)/u}. \tag{28}$$

III.2.7. Intensitatea emisă prin suprafața stelară.

- La suprafață stelară, $\tau_{\nu,1} = 0$.
- Presupunând că adâncimea optică în centrul stelei este infinită ($\tau_{\nu,2} \to \infty$), rezultă:

$$I_\nu(\tau_\nu = 0, u > 0) = \int_0^\infty \frac{dt}{u}\, S_\nu(t)\, e^{-t/u}, \tag{29}$$

  în timp ce $I_\nu(\tau_\nu = 0, u < 0) = 0$.
- Factorul $e^{-t/u}$ atenuează exponențial contribuțiile care provin de la straturile interioare pe măsură ce adâncimea optică crește.
- Contribuția dominantă la I_ν este datorată **straturilor superficiale** ($\tau_\nu \lesssim 1$).
- Drept urmare, clasificarea spectrală a stelelor ține cont doar de temperatura straturilor lor exterioare.
- Deoarece τ_ν depinde de ν, radiația corespunzătoare frecvențelor cu k_ν mare (de ex., ν corespunzătoare unei linii spectrale) provin din straturi mai de suprafață decât cea corespunzătoare frecvențelor cu k_ν mic (de ex., ν din jurul acestor linii).

III.2.8. Ecuațiile Schwarzschild-Milne.

- Pornind de la ec. (27) și (28), rezultă:

$$J_\nu(\tau_\nu) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{du}{u}\int_0^{\tau_\nu} dt\, S_\nu(t) e^{\frac{\tau_\nu - t}{u}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u}\int_{\tau_\nu}^{\infty} dt\, S_\nu(t) e^{\frac{\tau_\nu - t}{u}}. \tag{30}$$

- Integrala se poate scrie folosind funcția exponențială $E_n(x)$:

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dt\, S_\nu(t) E_1(|t-\tau_\nu|), \qquad E_n(x) = \int_1^\infty \frac{dy}{y^n} e^{-xy}. \tag{31}$$

- Ecuația (31) poartă numele de **ecuația Schwarzschild**.
- Expresia similară pentru H_ν poartă numele de **ecuația Milne**:

$$H_\nu(\tau_\nu) = \Phi_\nu[S_\nu], \qquad \Phi_\nu[S_\nu] = \frac{1}{2}\int_0^\infty dt\, S_\nu(t) E_2(|t-\tau_\nu|) \mathrm{sgn}(t-\tau_\nu), \tag{32}$$

  unde $\Phi_\nu[f]$ poartă numele de **operatorul phi**.
- Funcția K se poate scrie similar:

$$K_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dt\, S_\nu(t) E_3(|\tau - \tau_\nu|). \tag{33}$$

III.2.9. Transferul radiativ la adâncimi optice mari.

- La τ mare, $\lambda_{\rm mij}$ al γ este relativ mic, câmpul radiativ fiind determinat preponderent de proprietățile locale ale mediului.
- Funcția sursă poate fi dezvoltată în jurul lui B_ν:

$$S_\nu(t) = B_\nu(\tau_\nu) + (t-\tau_\nu)\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}(\tau_\nu) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-\tau_\nu)^n}{n!}\frac{d^n B_\nu}{d\tau_\nu^n}(\tau_\nu). \tag{34}$$

- Înlocuind în ec. (28) se obține:

$$I_\nu(\tau_\nu, u>0) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} \frac{dt}{u} S_\nu(t) e^{(\tau_\nu - t)/u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \frac{d^n B_\nu}{d\tau_\nu^n}(\tau_\nu). \tag{35}$$

- Înlocuind în ec. (27) se obține:

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu, u<0) &= -\int_0^{\tau_\nu} \frac{dt}{u} S_\nu(t) e^{(\tau_\nu - t)/u} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n \frac{d^n B_\nu}{d\tau_\nu^n}(\tau_\nu) \left[1 - e^{\tau_\nu/u} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(-\frac{\tau_\nu}{u}\right)^i\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

- Când $\tau_\nu/u \to -\infty$, exponențiala este neglijabilă, recuperându-se expresia din ec. (35).

- Indiferent de semnul lui u, avem

$$I_\nu(\tau_\nu, u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \frac{d^n B_\nu}{d\tau_\nu^n}(\tau_\nu). \tag{37}$$

- Integrând ecuația de mai sus se pot obține momentele câmpului radiativ:

$$J_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{d^{2n} B_\nu}{d\tau_\nu^{2n}}, \qquad K_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \frac{d^{2n} B_\nu}{d\tau_\nu^{2n}},$$

$$H_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \frac{d^{2n+1} B_\nu}{d\tau_\nu^{2n+1}}. \tag{38}$$

- Observând că $B_\nu(\tau_\nu) \equiv B_\nu[h\nu/k_B T(\tau_\nu)]$ și presupunând că $T(\tau_\nu) \propto \tau_\nu^{\alpha_\nu}$ (unde $\alpha_\nu > 0$), rezultă:

$$\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \tau_\nu} = \frac{\alpha_\nu h\nu}{\tau_\nu k_B T}\left(1 + \frac{c^2 B_\nu}{2h\nu^3}\right) B_\nu. \tag{39}$$

- Conform legii lui Wien, $h\nu/k_B T = 2,82$ când B_ν atinge val. max, în timp ce $c^2 B_\nu/2h\nu^3 < (e^{2,82} - 1)^{-1} \simeq 0,063$.
- Deoarece $dB_\nu/d\tau_\nu \approx \frac{B_\nu}{\tau_\nu}$, termenii de ordin superior pot fi neglijați:

$$I_\nu \simeq B_\nu + u\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}, \quad J_\nu \simeq B_\nu, \quad H_\nu \simeq \frac{1}{3}\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}, \quad K_\nu(\tau_\nu) \simeq \frac{B_\nu}{3}. \tag{40}$$

Legea lui Fick

- Deoarece $H_\nu \propto T_{\rm ef}^4$ iar $B_\nu \propto T^4$, relația $H_\nu \simeq \frac{1}{3} dB_\nu/d\tau_\nu$ indică $T \simeq T_{\rm ef}\tau^{1/4}$ (deci $\alpha_\nu = 1/4$).
- Importanța anizotropiei în I_ν se poate estima analizând raportul:

$$\frac{1}{B_\nu}\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \simeq \frac{3H_\nu}{B_\nu} \simeq \frac{T_{\rm ef}^4}{T^4} \ll 1, \tag{41}$$

  unde s-a ținut cont de faptul că $T \gg T_{\rm ef}$ când $\tau_\nu \gg 1$.
- Folosind $d\tau_\nu = -k_\nu \rho dz$, rezultă:

$$H_\nu \simeq \frac{1}{3}\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} = -\frac{1}{3k_\nu\rho}\frac{dB_\nu}{dT}\frac{dT}{dz}. \tag{42}$$

- Termenul k_ν^{-1} indică că H_ν este mai mare la frecvențele pentru care opacitatea k_ν este mai mică.
- Deoarece $H_\nu \sim -dT/dz$, ec. (42) poartă numele de **aproximația difuziei** (H_ν satisface **legea lui Fick**).

III.2.10. Accelerația radiativă.

- Densitatea de energie absorbită în unitatea de timp de plasma stelară este:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty d\nu \, \frac{dE_\nu}{dt}, \qquad \frac{dE_\nu}{dt} = \int d\Omega \, k_\nu \rho I_\nu. \qquad (43)$$

- Această densitate energie transmite în unitatea de timp o densitate de impuls de-a lungul axei z:

$$\frac{d\mathfrak{p}_\nu}{dt} = \int d\Omega \frac{u}{c}(k_\nu \rho I_\nu) = \frac{4\pi\rho}{c} k_\nu H_\nu. \qquad (44)$$

- Acest impuls se traduce prin apariția unei **accelerații radiative**:

$$g_{\mathrm{rad};\nu} = \frac{1}{\rho}\frac{d\mathfrak{p}_\nu}{dt} = \frac{4\pi}{c} k_\nu H_\nu. \qquad (45)$$

- Această accelerație se opune accelerației gravitaționale, modificând ecuația echilibrului hidrostatic:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(g - g_{\mathrm{rad}}), \qquad g_{\mathrm{rad}} = \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty d\nu \, k_\nu H_\nu. \qquad (46)$$

- În cazul în care opacitatea este dominată de împrăștierea Thomson, opacitatea monocromatică k_ν se poate aproxima prin:

$$k_\nu = \frac{n_e}{\rho}\sigma_{\mathrm{Th}}, \tag{47}$$

unde n_e este densitatea electronilor liberi iar $\sigma_{\mathrm{Th}} \simeq 66,5\ \mathrm{fm}^2$.
- Deoarece k_ν nu depinde de ν, avem

$$g_{\mathrm{rad}} = \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty d\nu\, k_\nu H_\nu = \frac{\sigma T_{\mathrm{ef}}^4}{c}\frac{n_e\sigma_{\mathrm{Th}}}{\rho}. \tag{48}$$

- Steaua nu mai poate reține straturile exterioare când $g_{\mathrm{rad}} \geq g = GM_*/R_*^2$ pe suprafața acesteia, mai exact când temperatura efectivă depășește valoarea

$$T_{\mathrm{ef}} = \left(\frac{GM_*\rho c}{\sigma n_e \sigma_{\mathrm{Th}} R_*^2}\right)^{1/4}. \tag{49}$$

- Dacă atmosfera e complet ionizată, $n_e = \frac{\rho}{m_H}(X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z)$ și

$$g_{\mathrm{rad}} = 0,075\left(X + \tfrac{Y+Z}{2}\right)\left(\frac{T_{\mathrm{ef}}}{10^4\ \mathrm{K}}\right)^4 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \qquad g = 274\frac{M_*}{M_\odot}\left(\frac{R_\odot}{R_*}\right)^2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$T_{\mathrm{ef}} = 77.700\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{1/4}\left(\frac{R_\odot}{R_*}\right)^{1/2}\left(X + \frac{Y}{2} + \frac{Z}{2}\right)^{-1/4}\mathrm{K}. \tag{50}$$

III.4.11. Presiunea radiativă.

- Interpretând g_{rad} ca o presiune, se poate scrie $P_{\mathrm{tot}} = P + P_{\mathrm{rad}}$, unde

$$\frac{dP_{\mathrm{tot}}}{dr} = -\rho(r)g(r), \tag{51}$$

de unde rezultă

$$\frac{dP_{\mathrm{rad}}}{dr} = -\rho(r)g_{\mathrm{rad}}(r) = -\frac{4\pi\rho}{c}\int_0^\infty d\nu\, k_\nu H_\nu. \tag{52}$$

- Înmulțind ec. (18) cu u și integrând după u, se obține

$$u^2\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = u(I_\nu - S_\nu) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = H_\nu, \tag{53}$$

unde s-a ținut cont că S_ν nu depinde de u.

- Ținând cont că $d/d\tau_\nu = -(k_\nu\rho)^{-1}d/dr$, rezultă:

$$\frac{dP_{\mathrm{rad}}}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{4\pi}{c}\int_0^\infty d\nu\, K_\nu\right) \Rightarrow P_{\mathrm{rad}} = \frac{4\pi}{c}K. \tag{54}$$

- La adâncimi optice mari, $K_\nu \simeq \frac{1}{3}B_\nu$, astfel încât:

$$P_{\mathrm{rad}} = \frac{4\sigma T^4}{3c}. \tag{55}$$

Probleme

1. Un nor interstelar are grosimea z_0 și densitatea

$$\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 + \rho_0 \left(\frac{z}{z_0}\right).$$

Presupunând că opacitatea k_ν este constantă, să se calculeze adâncimea optică pentru $0 \leq z \leq z_0$, știind că $\tau_\nu(z=0) = 0$. Să se găsească adâncimea optică totală a norului.
[R: $\tau_\nu(z) = k_\nu \rho_0 z_0 [\frac{1}{3}(\frac{z}{z_0})^3 + \frac{1}{2}(\frac{z}{z_0})^2]$; $\tau_\nu(z_0) = \frac{5}{6} k_\nu \rho_0 z_0$]

2. Doi nori interstelari adiacenți de grosime d_1 și d_2 sunt traversați de un fascicul de radiație emis de o sursă astrofizică. La intrarea în primul nor, intensitatea specifică are valoarea I_ν^0. Să se calculeze în aproximația plan-paralelă intensitatea specifică la ieșirea din cel de-al doilea nor, presupunând că densitățile ρ_1 și ρ_2, precum și opacitățile $k_{\nu,1}$ și $k_{\nu,2}$, sunt constante (se neglijează emisivitatea în interiorul norilor). [R: $I_\nu^0 \exp\{-\frac{1}{u}(\rho_1 k_{\nu,1} d_1 + \rho_2 k_{\nu,2} d_2)\}$ pentru $\nu > 0$]

Probleme

3. Un fascicul de radiație traversează un nor interstelar de grosime z_0, de emisivitate neglijabilă, a cărui opacitate este $k_\nu \rho = \sqrt{z}/4\xi$, unde z este coordonata măsurată de la intrarea în nor iar ξ este o constantă. Știind că intensitatea specifică pe direcția de observație ($u = 1$) la ieșirea din nor este o miime din intensitatea specifică la intrare (I_ν^0), să se găsească z_0. [R: $z_0 \simeq 12\xi^{2/3}$]
4. Un fascicul de intensitate specifică I_ν^0 parcurge un nor interstelar cu densitate ρ, opacitate k_ν și emisivitate j_ν constante. Să se calculeze $I_\nu(z)$, unde z măsoară adâncimea față de intrarea în nor. Să se găsească expresia lui I_ν la adâncimi optice mari.
[R: $I_\nu = S_\nu + (I_\nu^0 - S_\nu)e^{-k_\nu \rho z/u}$]
5. În aproximația plan-paralelă a atmosferei unei stele, intensitatea specifică are forma $I_\nu(z,u) = a_\nu(z) + b_\nu(z)u$, unde $a_\nu(z)$ și $b_\nu(z)$ sunt funcții independente de u. Să se calculeze $F_\nu(z)$.
[R: $F_\nu(z) = \frac{4\pi}{3} b_\nu(z)$]

Probleme

6. Să se calculeze intensitatea specifică la suprafața unei stele semiinfinite formate dintr-un gaz la temperatură constantă care emite ca un corp negru și pentru care se neglijează procesele de împrăștiere. [R: $I_\nu(0, u) = B_\nu$]
7. Presupunând că funcția sursă a unei atmosfere stelare este $S_\nu(\tau_\nu) = a_\nu + b_\nu \tau_\nu$, să se calculeze $I_\nu(0, u > 0)$. [R: $I_\nu(0, u > 0) = S_\nu(\tau_\nu = u) \equiv$ relația Eddington-Barbier]
8. În stratul exterior al unei stele, opacitatea este dominată de împrăștierea Thomson ($k_\nu \simeq n_e \sigma_{\rm Th}/\rho$, $\sigma_{\rm Th} \simeq 66,5\ \rm fm^2$). Presupunând că $n_e = 10^{16}\ \rm cm^{-3}$, să se găsească distanța la care atmosfera stelei devine opacă. Să se raporteze răspunsul la raza Soarelui. [R:$z/R_\odot \simeq 0,21\%$]

Probleme

9. Un fascicul de radiație pătrunde într-un nor interstelar de grosime $10~\mathrm{u.a.}$ La o anumită frecvență, o tranziție poate cauza emisia stimulată de radiație. Dacă intensitatea la ieșirea din nor este de 20 de ori mai mare decât la intrarea în acesta, să se găsească valoarea produsului $k_\nu \rho$ pe această frecvență, presupunând că emisivitatea este nulă iar opacitatea și densitatea sunt pretutindeni constante.
10. Să se calculeze temperatura efectivă maximă pe care o poate avea o stea la suprafața căreia predomină atomii de HeIII iar opacitatea este dominată de împrăștierea Thomson, știind că accelerația gravitațională la suprafața acesteia este:
    a) $g = 274~\mathrm{m/s^2}$; [R: 92.400 K]
    b) $g = 0.274\mathrm{m/s^2}$. [R: 16.400 K]