

Astrofizică stelară

Cursul 3

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Conținutul cursului

Capitolul II. Nucleosinteza și evoluția stelară

- ▶ II.1. Diagrama H-R.
- ▶ II.2. Traiectul evolutiv al stelelor pe diagrama H-R.
- ▶ II.3. Nove, supernove și rămășițe stelare.
- ▶ **II.4. Fundamentele fuziunii nucleare în stele.**
- ▶ **II.5. Reacții nucleare pe secvența principală.**
- ▶ **II.6. Reacții nucleare în stadii avansate ale evoluției stelare.**
- ▶ **II.7. Sinteza elementelor grele.**

II.4. Fundamentele fuziunii nucleare în stele.

II.4.1. Fuziunea ca sursă de energie.

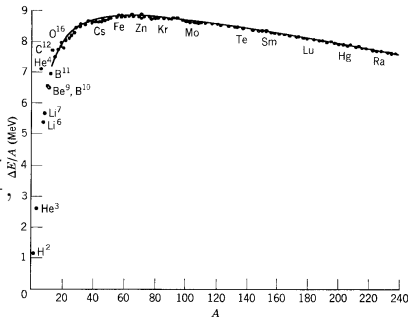
- ▶ Prin definiție, stelele sunt corpuri cerești cu lumină proprie, în interiorul cărora au (sau au avut) loc procese de fuziune termonucleară.
- ▶ Fuziunea nucleară este procesul prin care două sau mai multe nuclee se unesc pentru a produce unul sau mai multe nuclee mai grele.
- ▶ Reacțiile de fuziune nucleară sunt exoterme dacă energia de legătură per nucleon din starea finală este superioară celei din starea inițială. Astfel de procese reprezintă o sursă de energie care permite stelelor să mențină o temperatură suficient de mare în interiorul lor pentru a preveni colapsul gravitațional.
- ▶ Energia de legătură per nucleon atinge un maxim pentru elementele din vecinătatea Fe (V, Cr, Mn, Fe, Co și Ni). Reacțiile de fuziune care implică aceste nuclee în starea inițială sunt în mod necesar endoterme și deci nu pot furniza energie stelei.
- ▶ Cele mai importante reacții sunt cele care implică nucleele de ^1H .

II.4.2. Modelul picăturii.

- Conform modelului picăturii, masa de repaus a unui nucleu cu Z protoni și $N = A - Z$ neutroni este

$$m(Z, A) = m_p Z + m_n N - \frac{\Delta E}{c^2},$$

$$\Delta E = E_v + E_s + E_c + E_{as} + E_\delta,$$



unde componența fenomenologică a **energiei de legătură** ΔE este:

$$E_v = a_v A, \quad E_s = -a_s A^{2/3}, \quad E_c = -a_c Z^2 / A^{1/3},$$

$$E_{as} = -a_{as} (Z - A/2)^2 / A, \quad E_\delta = [(-1)^Z + (-1)^N] a_\delta / 2\sqrt{A}.$$

- Constantele a_* se determină fitînd ΔE pe datele experimentale (în unități uc^2):

$$a_v = 0.01691, \quad a_s = 0.01911, \quad a_c = 0.000763,$$

$$a_{as} = 0.10175, \quad a_\delta = 0.012.$$

II.4.3. Energia emisă prin fuziune.

- ▶ Energia emisă în urma unei reacții nucleare se obține folosind:

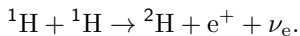
$$E = (m_i - m_f)c^2,$$

unde $m_i c^2$ și $m_f c^2$ reprezintă energiile de repaus ale configurațiilor inițială și finală.

- ▶ Energiile de repaus ale electronului, protonului și neutronului sunt:

$$m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}, \quad m_p c^2 = 938,3 \text{ MeV}, \quad m_n c^2 = 939,6 \text{ MeV}.$$

- ▶ Să considerăm următoarea reacție:



- ▶ Energia emisă în această reacție este:

$$E = (2m_{^1\text{H}} - m_{^2\text{H}} - m_e)c^2 = 0,420 \text{ MeV}.$$

- ▶ Parte din această energie este transferată către ν_e sub formă de energie cinetică. Deoarece neutrinii interacționează foarte slab cu materia, această energie se pierde către spațiul exterior stelei. În reacția de mai sus, energia tipică a neutrinelui este 0,263 MeV.
- ▶ Pe de altă parte, e^+ va întâlni în scurt timp un e^- liber în plasma stelară cu care se va anihila, furnizând $2m_e c^2 = 1,022 \text{ MeV}$.
Energia totală eliberată va fi $E_{\text{total}} = 1,179 \text{ MeV}$.

II.4.4. Sistemul centrului de masă.

- ▶ Să considerăm două populații de nuclee A și B de mase m_A și m_B .
- ▶ Rata procesului de interacției nucleare este:

$$r_{AB} = \frac{1}{1 + \delta_{AB}} \int d^3 v_A \int d^3 v_B [f_A f_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| \sigma_{\text{tot}}(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B)],$$

unde tensorul Kronecker are valoarea 1 când A și B fac parte din aceeași specie și 0 altfel, $\mathbf{v}_A$ și $\mathbf{v}_B$ sunt vitezele celor două nuclee, σ_{tot} este secțiunea totală eficace de ciocnire (depinde doar de viteza relativă) iar distribuțiile f_A și f_B sunt de tip Maxwellian:

$$f_A f_B = n_A n_B \Phi_A(\mathbf{v}_A) \Phi_B(\mathbf{v}_B), \quad \Phi_a(\mathbf{v}) = \left(\frac{m_a}{2\pi K_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_a \mathbf{v}^2}{2K_B T} \right).$$

- ▶ În sistemul centrului de masă, definit de:

$$\mathbf{V} = \frac{m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B}{m_A + m_B}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B,$$
$$m_{\text{red}} = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}, \quad M = m_A + m_B.$$

produsul $\Phi_A \Phi_B$ devine:

$$\Phi_A(\mathbf{v}_A) \Phi_B(\mathbf{v}_B) = \Phi_M(\mathbf{V}) \Phi_{\text{red}}(\mathbf{v}).$$

II.4.5. Secțiunea diferențială totală.

- ▶ Știind că $d^3v_A d^3v_B = d^3V d^3v$, integrala după $\mathbf{V}$ se face imediat:

$$r_{AB} = \frac{n_A n_B}{1 + \delta_{AB}} \lambda_{AB}, \quad \lambda_{AB} = \int d^3v \Phi_{\text{red}}(\mathbf{v}) v \sigma_{\text{tot}}(\mathbf{v}),$$

unde λ_{AB} poartă numele de rată de reacție per pereche de particule.

- ▶ Procesul de fuziune se desfășoară secvențial după cum urmează:
 - ▶ învingerea barierei de potențial a respingerii Coulombiene;
 - ▶ producerea reacției nucleare.
- ▶ Fiecărei etape îi corespunde o probabilitate de realizare, astfel încât:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_N P_C,$$

- ▶ Particulelor incidente le corespund lungimile de undă de Broglie:

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1}, \quad \lambda_2 = \frac{h}{p_2}.$$

- ▶ În sistemul centrului de masă, $p_1 = p_2 = \sqrt{2m_{\text{red}}E}$.
- ▶ Deoarece $\sigma_N \sim$ aria ocupată de cele două particule, avem:

$$\sigma_N \sim \pi(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \Rightarrow \sigma_N = \frac{S(E)}{E}.$$

- ▶ Factorul astrofizic $S(E)$ se măsoară experimental.

II.4.6. Bariera Coulomb.

- ▶ Înălțimea barierei de potențial dintre A și B este:

$$W_C = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0(A_A^{1/3} + A_B^{1/3})r_0} = W_C(^1\text{H}, ^1\text{H}) \times \frac{2Z_A Z_B}{A_A^{1/3} + A_B^{1/3}},$$

unde $r_0 \simeq 1.2$ fm reprezintă raza unui nucleon iar

$W_C(^1\text{H}, ^1\text{H}) \simeq 0,554$ MeV este bariera Coulomb când $A = B = ^1\text{H}$.

- ▶ Pentru ^{12}C și ^4He avem $W_C \simeq 3,43$ MeV.
- ▶ Pornind de la relația $\bar{E} = \frac{3}{2}K_B T \simeq 0,554$ MeV, rezultă $T = 4,8 \times 10^9$ K (în Soare, $T_{\text{centru}} \simeq 1,5 \times 10^7$ K).
- ▶ Din punct de vedere clasic, numai particulele cu $E > W_C$ pot interacționa nuclear.
- ▶ În Soare, doar $\sim 10^{-60}$ din totalul de particule au $E > W_C$.
- ▶ Mecanismul dominant prin care are loc fuziunea în stele este tunelarea cuantică.

II.4.7. Efectul tunel.

- Să considerăm ecuația Schrödinger staționară:

$$H\psi = E\psi.$$

- În sistemul centrului de masă, $V(r) = q_A q_B / 4\pi\epsilon_0 r$, ceea ce permite folosirea coordonatelor sferice.
- Separând partea unghiulară de cea radială, $\psi \rightarrow R_\ell(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ și:

$$\frac{1}{r^2 R_\ell} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_\ell}{dr} \right) = \frac{2m_{\text{red}}}{\hbar^2} (V - E) + \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}.$$

- Pentru $\ell > 0$, potențialul efectiv crește $\Rightarrow$ analizăm doar cazul $\ell = 0$.
- Notând $R_0 = r^{-1} \mathfrak{R}_0 e^\phi$ ($\mathfrak{R}_0 = \text{const}$), ecuația Schrödinger devine:

$$\phi'' + (\phi')^2 = \frac{2m_{\text{red}}}{\hbar^2} (V - E).$$

- Luând $\phi' = A_\phi + iB_\phi$ și ținând cont că membrul drept e real, rezultă:

$$A'_\phi + A_\phi^2 - B_\phi^2 = \frac{2m_{\text{red}}}{\hbar^2} (V - E), \quad B'_\phi + 2A_\phi B_\phi = 0.$$

II.4.8. Aproximația Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB).

- Probabilitatea de tunelare este dată de:

$$P_C = \left| \frac{r_n R_0(r = r_n)}{r_0 R_0(r = r_0)} \right|^2 = \exp \left[2 \int_{r_0}^{r_n} A_\phi(r) dr \right],$$

unde r_n este distanța de la care forțele interacției tari întrec forța Coulomb iar r_0 este soluția ecuației $V(r_0) = E$ (distanța minimă de apropiere din punct de vedere clasic).

- Să dezvoltăm pe A_ϕ și B_ϕ într-o serie de puteri ale lui $\hbar$:

$$A_\phi = \frac{1}{\hbar} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \hbar^k, \quad B_\phi = \frac{1}{\hbar} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \hbar^k,$$

- Aproximația WKB este o metodă iterativă cu ajutorul căreia se poate rezolva perturbativ ecuația Schrödinger în puteri ale lui $\hbar$.
- Ordinului $\hbar^{-2}$ îi corespunde:

$$A_0 B_0 = 0, \quad A_0^2 - B_0^2 = 2m_{\text{red}}(V - E).$$

- $A_0 = 0$ implică $E > V$ (regiunea permisă clasic).
- Pentru efectul tunel ne interesează regiunea $V > E$, unde $B_0 = 0$ și

$$A_0 = \sqrt{2m_{\text{red}}(V - E)}.$$

- Primul ordin în WKB este suficient pentru a obține o estimare a ratei de reacție nucleară. Rezultă probabilitatea:

$$\ln P_C = \sqrt{\frac{8m_{\text{red}}E}{\hbar^2}} \int_{r_0}^{r_n} \sqrt{\frac{V}{E} - 1} dr.$$

- Facem schimbarea de variabilă $u = E/V = 4\pi\epsilon_0 rE/q_A q_B$. Capetele de integrare devin $u_0 = 1$ și $u_n = E/W_C \ll 1$:

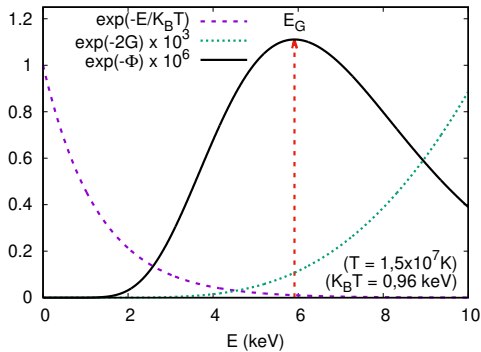
$$\ln P_C = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \sqrt{\frac{8m_{\text{red}}}{E}} \int_1^{u_n} du \sqrt{u^{-1} - 1} = -2G \left(1 - \frac{4}{\pi} \sqrt{u_n} + \dots \right),$$

unde **factorul Gamow** $G(E)$ este:

$$G(E) = \frac{q_A q_B}{8\hbar\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m_{\text{red}}}{E}} = \pi\eta(E), \quad \eta(E) = \alpha Z_A Z_B \sqrt{\frac{m_{\text{red}} c^2}{2E}},$$

unde $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c \simeq 1/137$ este constanta structurii fine iar $\eta(E)$ poartă numele de **parametrul Sommerfeld**.

II.4.9. Funcția lui Gamow.



Factorul Boltzmann $e^{-E/K_B T}$, factorul e^{-2G} și funcția lui Gamow $e^{-\Phi}$ pentru fuziunea a două nuclee de hidrogen ($Z_A = Z_B = 1$, $2A_{\text{red}} = 1$), la temperatura $T = 1,5 \times 10^7 \text{ K}$ (aproximativ condițiile din centrul Soarelui).

- Rata λ_{AB} per pereche de particule devine:

$$\lambda = \left[\frac{8}{\pi m_{\text{red}} (K_B T)^3} \right]^{1/2} \int_0^\infty dE S(E) e^{-\Phi(E)},$$

unde $\Phi = \frac{E}{K_B T} + 2G$.

- Exponențiala $e^{-\Phi(E)}$ poartă numele de funcția lui Gamow (reprezentată în figură).

- ▶ Forma funcției $S(E)$ în condițiile stelare este imposibil de măsurat experimental, deoarece λ este foarte mic (în stele, n și scala de timp a procesului sunt mult mai mari decât în laborator).
- ▶ Exponentul integrandului depinde de funcția Φ ,

$$\Phi = \frac{E_G}{K_B T} \left(\frac{E}{E_G} + 2\sqrt{\frac{E_G}{E}} \right),$$

care-și atinge minimumul $\Phi_G = 3E_G/K_B T$ pentru energia Gamow E_G :

$$E_G = \left(\frac{\sqrt{m_{\text{red}}}}{4\hbar\epsilon_0\sqrt{2}} Q_A Q_B K_B T \right)^{2/3} = K_B T \left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}} Z_A Z_B \right)^{2/3} \left(\frac{m_{\text{red}} c^2}{K_B T} \right)^{1/3}.$$

- ▶ λ_{AB} se poate obține aproximativ folosind metoda celei mai rapide descreșteri, dezvoltând pe Φ în jurul $E = E_G$:

$$\lambda \simeq \frac{S_0}{K_B T} \sqrt{\frac{32E_G}{3m_{\text{red}}}} e^{-3E_G/K_B T} \left(1 - \frac{1}{2} \text{erfc} \sqrt{\frac{3E_G}{4K_B T}} \right).$$

- ▶ Deoarece $\frac{1}{2} \text{erfc } x \gtrsim 0,01$ doar când $x \lesssim 1,65$, termenul din paranteză e neneglijabil când $T > T_c$, unde T_c e dat de relațiile:

$$\sqrt{\frac{3E_G}{4K_B T_c}} = 1,65 \Rightarrow T_c = 2A_{\text{red}} Z_A^2 Z_B^2 \times T_H, \quad T_H \simeq 3 \times 10^7 \text{ K}.$$

- ▶ Energia Gamow poate fi pusă sub forma:

$$E_G \simeq 5,907 \left(Z_A Z_B \sqrt{2A_{\text{red}}} \frac{T}{T_\odot} \right)^{2/3} \text{ keV}, \quad A_{\text{red}} = \frac{A_A A_B}{A_A + A_B},$$

în timp ce energia termică este $K_B T \simeq 1,29 (T/T_\odot) \text{ keV}$.

- ▶ Raportul $E_G/K_B T \simeq 4,57 (Z_A Z_B \sqrt{2A_{\text{red}}})^{2/3} (T/T_\odot)^{-1/3}$ scade cu puterea 1/3 a temperaturii, ceea ce induce o creștere a ratei reacției nucleare cu creșterea temperaturii.
- ▶ Raportul dintre λ_{AB} și λ_{pp} (corespunzător cazului $A = B = {}^1\text{H}$) este:

$$\frac{\lambda_{AB}}{\lambda_{pp}} = \frac{S_{AB}}{S_{pp}} \left(\frac{Z_A Z_B}{2A_{\text{red}}} \right)^{1/3} \exp \left[-13,71 \frac{(2A_{\text{red}} Z_A^2 Z_B^2)^{1/3} - 1}{(T/T_\odot)^{1/3}} \right].$$

- ▶ Valori tipice ale factorilor astrofizici sunt:¹

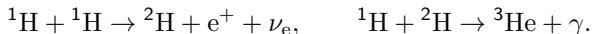
$$S_{pp} \simeq 4 \times 10^{-22} \text{ keV} \cdot \text{b}, \quad S_{pd} \simeq 2 \times 10^{-4} \text{ keV} \cdot \text{b}, \\ S_{33} \simeq 5 \times 10^3 \text{ keV} \cdot \text{b},$$

unde „d” corespunde deuteriului ${}^2\text{H}$ iar „3” corespunde nucleului ${}^3\text{He}$ ($1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$).

¹E. G. Adelberger et al, *Solar fusion cross sections. II. The pp chain and CNO cycles*, Rev. Mod. Phys. **83** (2011) 195–245.

II.4.10. Echilibrul secular

- Să considerăm reacțiile nucleare:



- Prima reacție duce la producerea deuteriului, cea de-a doua duce la distrugerea acestuia:

$$\frac{dn_d}{dt} = r_{pp} - r_{pd} = \frac{n_p^2}{2} \lambda_{pp} - n_p n_d \lambda_{pd}.$$

- Densitatea de deuteriu se stabilizează datorită celor două procese atunci când $dn_d/dt = 0$:

$$\frac{n_d}{n_p} = \frac{\lambda_{pp}}{2\lambda_{pd}} \simeq 4,4 \times 10^{-18},$$

foarte aproape de valoarea 3×10^{-18} estimată într-o analiză recentă.¹

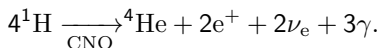
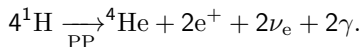
- Ecuația $dn_A/dt = 0$ poartă numele de ecuația echilibrului secular pentru specia A .

¹E. G. Adelberger et al, *Solar fusion cross sections. II. The pp chain and CNO cycles*, Rev. Mod. Phys. **83** (2011) 195–245.

II.5. Reacții nucleare pe secvența principală.

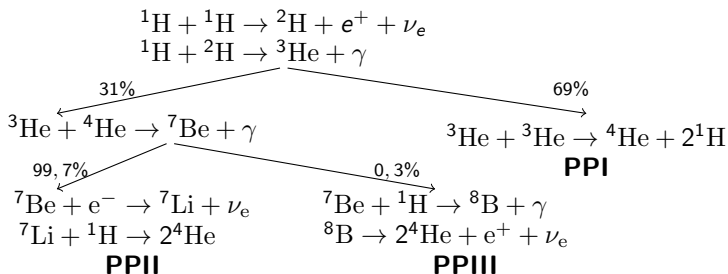
II.5.1. Generalități.

- ▶ Stelele petrec cea mai mare parte a vieții pe SP, unde sursa principală de energie este fuziunea nucleelor de ^1H în nuclee de ^4He .
- ▶ În funcție de temperatura centrală, fuziunea ^1H poate avea loc prin lanțurile proton-proton (PP) sau prin ciclurile carbon-azot-oxigen (CNO).
- ▶ Reacția redusă este:



- ▶ Energia totală are următoarea componență:
 - ▶ Energia de legătură $(4m_{\text{H}} - m_{\text{He}} - 2m_e)c^2 \simeq 24,688\text{MeV}$;
 - ▶ Energia eliberată în urma anihilării pozitronilor $4m_e c^2 \simeq 2,044\text{MeV}$;
 - ▶ Energia neutrinilor, care sunt emiși direct în spațiul interstelar.

II.5.2. Lanțurile PP.



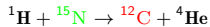
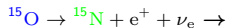
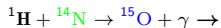
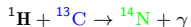
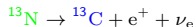
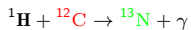
- ▶ ν_e din ciclul PPI au $\sim 0,263\text{MeV}$ per neutrino (2% din total);
- ▶ ν_e din penultima reacție din PPII are $\sim 0,8\text{MeV}$ (4% din total);
- ▶ ν_e din ultima reacție din PPIII are $\sim 7,2\text{MeV}$ (27,9% din total).
- ▶ La $T = 3 \times 10^7\text{K}$, energia eliberată (inclusiv ν_e) și ratele pe PPI sunt:



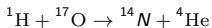
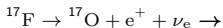
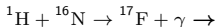
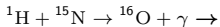
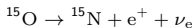
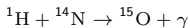
- ▶ Energia per ${}^4\text{He}$ este $26,2\text{MeV}$ ($6,54\text{MeV}$ / nucleon).

II.5.3. Ciclurile CNO.

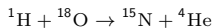
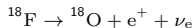
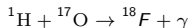
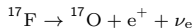
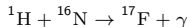
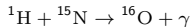
CNOI



CNOII



CNOIII



Energiile și ratele de reacție pentru CNOI și CNOII sunt:

Reacția	MeV	$T = 1,5 \times 10^7 \text{K}$	$T = 2 \times 10^7 \text{K}$	$\nu_e(\text{MeV})$
${}^1\text{H} + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{13}\text{N} + \gamma$	1,94	$\sim 10^6 \text{ani}$	$\sim 5 \times 10^3 \text{ani}$	0,71
${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e$	2,22	15min		
${}^1\text{H} + {}^{13}\text{C} \rightarrow {}^{14}\text{N} + \gamma$	7,55	$2 \times 10^5 \text{ani}$	$2 \times 10^3 \text{ani}$	
${}^1\text{H} + {}^{14}\text{N} \rightarrow {}^{15}\text{O} + \gamma$	7,29	$2 \times 10^8 \text{ani}$	10^6ani	1
${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e$	2,76	3min		
${}^1\text{H} + {}^{15}\text{N} \rightarrow {}^{12}\text{C} + {}^4\text{He}$	4,97	10^4ani	30ani	
${}^1\text{H} + {}^{15}\text{N} \rightarrow {}^{16}\text{O} + \gamma$	12,1	4ani	$3 \times 10^{-3} \text{ani}$	
${}^1\text{H} + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{17}\text{F} + \gamma$	0,60	$2 \times 10^{10} \text{ani}$	$5 \times 10^7 \text{ani}$	
${}^{17}\text{F} \rightarrow {}^{17}\text{O} + e^+ + \nu_e$	2,76	1,5min		
${}^1\text{H} + {}^{17}\text{O} \rightarrow {}^{14}\text{N} + {}^4\text{He}$	1,19	$2 \times 10^{10} \text{ani}$	10^6ani	

II.5.4. Energia emisă pe PPI.

- Rata ε_{AB} de producere a energiei în urma unui proces care furnizează ΔE_{AB} per reacție este:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{r_{AB}}{\rho} \Delta E_{AB} = \frac{\rho X_A X_B}{1 + \delta_{AB}} \frac{\lambda_{AB}}{m_A m_B} \Delta E_{AB},$$

unde X_A și X_B sunt fracțiile masice ale elementelor A și B .

- Pentru lanțul PPI, trebuie luate în considerare trei reacții:

$$\varepsilon_{\text{PPI}} = \varepsilon_{\text{pp}} + \varepsilon_{\text{pd}} + \varepsilon_{33} = \rho X^2 \frac{\lambda_{\text{pp}}}{4m_H^2} \Delta E_{\text{PPI}},$$

unde $\Delta E_{\text{PPI}} = 2\Delta E_{\text{pp}} + 2\Delta E_{\text{pd}} + \Delta E_{33} \simeq 26,2 \text{ MeV}$ iar abundențele sunt date prin ecuațiile de echilibru secular:

$$\begin{aligned} \frac{dn_d}{dt} = r_{\text{pp}} - r_{\text{pd}} = 0 &\Rightarrow n_d = \frac{\lambda_{\text{pp}} n_p}{2\lambda_{\text{pd}}}, \\ \frac{dn_3}{dt} = r_{\text{pd}} - 2r_{33} = 0 &\Rightarrow n_3 = n_p \sqrt{\frac{\lambda_{\text{pp}}}{2\lambda_{33}}}. \end{aligned}$$

II.5.5. Comparație între PPI și CNOI.

- ▶ Ținând cont că

$$\lambda_{\text{PP}} \simeq 5,57 \times 10^{-38} T_9^{-2/3} \exp(-3,38/T_9^{1/3}) [\text{m}^3/\text{s}],$$

unde $T_9 = T/10^9 \text{ K}$, rezultă:

$$\varepsilon_{\text{PPI}} \simeq 2,4 \times 10^{-3} \rho X^2 T_9^{-2/3} \exp(-3,38/T_9^{1/3}) [\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{s})],$$

unde ρ este densitatea în unități SI (kg/m^3).

- ▶ Similar, rezultă următoarea estimare pentru rata de energie produsă în ciclul CNO:

$$\varepsilon_{\text{CNO}} = 4,4 \times 10^{18} \rho X Z T_9^{-2/3} \exp(-15,2/T_9^{1/3}) [\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{s})],$$

unde s-a presupus că concentrațiile C, N și O $\sim Z$.

- ▶ Raportul puterii corespunzătoare celor două procese este:

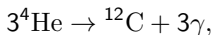
$$\frac{\varepsilon_{\text{PPI}}}{\varepsilon_{\text{CNO}}} \simeq 0,55 \times 10^{-21} \frac{X}{Z} e^{11,82/T_9^{1/3}}.$$

- ▶ Pentru $X = X_{\odot} \simeq 0,7381$, $Z = Z_{\odot} \simeq 0,0134$ rezultă că cele două procese contribuie egal la generarea de energie pentru $T \simeq 1,82 \times 10^7 \text{ K}$ (față de $T_{\odot} \simeq 1,5 \times 10^7 \text{ K}$).

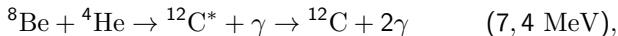
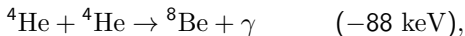
II.6. Reacții nucleare în stadii avansate ale evoluției stelare.

II.6.1. Fuziunea heliului.

- ▶ Reacția care guvernează fuziunea heliului este **Procesul triplu-alfa**:



- ▶ Desfășurat, procesul triplu-alfa constă în următoarele reacții:

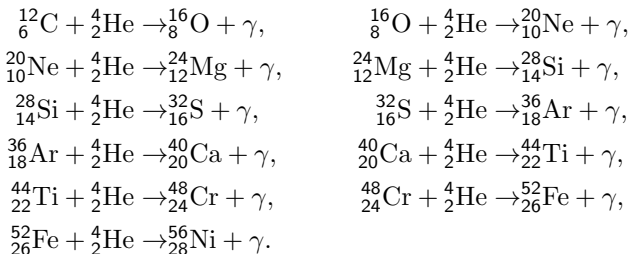


unde $^{12}\text{C}^*$ reprezintă nucleul de carbon într-o stare nucleară excitată.

- ▶ În urma procesului triplu-alfa se eliberează 7,275 MeV per nucleu de ^{12}C , adică 0,606 MeV/nucleon, aproximativ de 10 ori mai puțin decât în urma proceselor de fuziune a hidrogenului.
- ▶ Când începe procesul de fuziune a heliului, steaua este deja în faza de gigantă roșie, când luminozitatea sa depășește luminozitatea de pe SP cu un factor de ~ 1000 .
- ▶ Drept urmare, combustibilul pe bază de heliu se epuizează mult mai repede, această fază durând semnificativ mai puțin decât SP.
- ▶ Temperatura de “aprindere” a reacției este $\sim 10^8 \text{ K}$ și poate fi atinsă de stele cu $M \gtrsim 0,6M_{\odot}$.

II.6.2. Procesele alpha

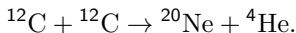
- ▶ Nulceele de Helium (particulele alpha) participă la o multitudine de reacții de fuziune care implică nuclee mai grele.
- ▶ Aceste procese de captură a particulelor alpha poartă numele de *procesele alpha*, ducând la formarea așa-numitelor *elemente alpha*:



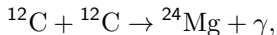
- ▶ Energia eliberată în aceste reacții este emisă preponderent sub forma razelor γ .
- ▶ Reacțiile alpha care implică ${}^{56}_{28}\text{Ni}$ sunt endoterme și deci nu pot furniza energie stelei.

II.6.3. Fuziunea carbonului.

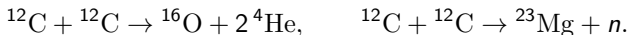
- ▶ În stelele având masa inițială $M_* \gtrsim 8M_\odot$, temperatura centrală depășește pragul declanșării reacțiilor de fuziune ale carbonului ($T \gtrsim T_C = 5 \times 10^8$ K).
- ▶ Nucleele stelelor cu $8M_\odot \lesssim M_* \lesssim 11M_\odot$ devin degenerate după epuizarea He $\Rightarrow$ când $T \simeq T_C$, fuziunea ${}^{12}_6\text{C}$ are loc aproape instantaneu (sub 1 ms), fenomenul purtând numele de *străfulgerarea carbonului*.
- ▶ În stelele cu $M_* \gtrsim 11M_\odot$, nucleul nu devine degenerat astfel încât fuziunea carbonului are loc treptat.
- ▶ Reacția dominantă care implică C devine:



- ▶ O serie de alte reacții mai sunt posibile, printre care



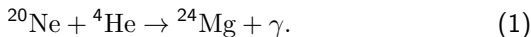
precum și reacții endoterme, cum ar fi:



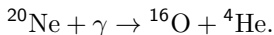
- ▶ Neutronul rezultat din ultima reacție de mai sus poate fi absorbit de nuclee mai grele, ducând la crearea unor nuclee și mai grele prin procesul s (lent).

II.6.4. Fuziunea neonului.

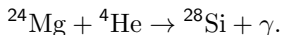
- ▶ Prima reacție implicând Ne care apare în stea este



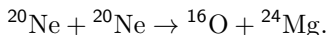
- ▶ Această reacție emite 9,316 MeV și are loc în faza de fuziune a He.
- ▶ După ce C este complet epuizat în nucleu, acesta nu mai conține nuclee de He, astfel încât reacția de mai sus nu mai e posibilă.
- ▶ La temperaturile din nucleu corespunzătoare acestei faze, fotonii sunt suficienți de energetici pentru a produce fotodezintegrarea Ne:



- ▶ Reacția de mai sus e endotermă ($-4,73$ MeV), însă furnizează un nucleu de He care poate participa la (1).
- ▶ Nucleele de He eliberate prin fotodezintegrarea Ne pot participa și la următoarea reacție:

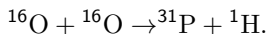
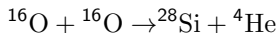
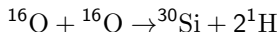


- ▶ În cele din urmă, temperaturile centrale devin suficient de mari ($\gtrsim 1,2 \times 10^9$ K) pentru a permite reacția:

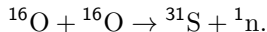


II.6.5. Fuziunea oxigenului.

- ▶ În urma fuziunii carbonului și a neonului, crește concentrația oxigenului în nucleu.
- ▶ Când $T_{\text{centru}} \gtrsim 1,5 - 2,6 \times 10^9 \text{ K}$, cele mai importante reacții la care participă oxigenul sunt:



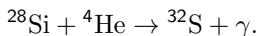
- ▶ Mai e posibilă și următoarea reacție, în urma căreia se crează sulfur:



- ▶ Neutronul eliberat poate participa la formarea elementelor grele prin procesul s.

II.6.6. Fuziunea siliciului.

- ▶ După epuizarea $^{16}_8\text{O}$ din nucleu, temperatura acestuia crește.
- ▶ Când $T_{\text{centru}} \gtrsim 2,7 - 3,5 \times 10^9 \text{ K}$, fotonii pot participa în procese de fotodezintegrare care duc la eliberarea protonilor sau particulelor α din nucleele grele.
- ▶ Datorită reintroducerii nucleelor de He, procesele α se reiau, începând cu:



- ▶ Această reacție este continuată în lanț de reacții cu alte nuclee de heliu până la crearea elementelor din preajma fierului:



- ▶ Deoarece e instabil, ^{56}Ni se dezintegrează:



- ▶ Mai e posibilă captura electronică:



II.7. Sinteza elementelor grele.

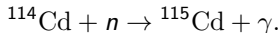
- ▶ Formarea elementelor mai grele decât Fe se explică prin absorbția de neutroni (incrementând A) intercalată cu dezintegrări β^- , adică $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ (incrementând Z).
- ▶ Absorbția n este eficace, deoarece neutralitatea acestuia elimină necesitatea tunelării barierei Coulomb.
- ▶ În urma unor reacții din stadiile avansate ale evoluției stelare se eliberează neutroni, de exemplu:



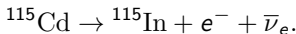
- ▶ Distingem trei tipuri de procese în urma cărora se formează nuclee grele:
 - ▶ Procese s (lente): în care fluxul de neutroni prezent în plasma stelară este slab;
 - ▶ Procese r (rapide): în care fluxul de neutroni prezent în plasma stelară este puternic;
 - ▶ Procese p: în urma cărora se produc nuclee bogate în protoni.
- ▶ Fluxurile rapide de neutroni pot apărea la temperaturi mari $T > 10^9\text{K}$, când radiația termică e suficient de energetică pentru a smulge neutroni din nuclee ($^m\text{X} + \gamma \rightarrow ^{m-1}\text{X} + n$), sau în faza de neutronizare a nucleului unei supernove ($p + e^- \rightarrow n + \nu_e$).

II.7.1. Procesul s (lent).

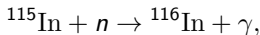
- ▶ Să considerăm evoluția unui nucleu de ^{114}Cd prin procese s:



- ▶ ^{115}Cd este instabil la β^- cu timpul de înjumătățire de 54h:



- ▶ Mai departe, ^{115}In poate absorbi un neutron:

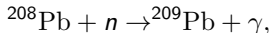
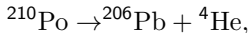
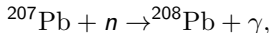
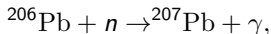
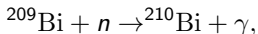


- ▶ Timpul de înjumătățire al ^{116}In la dezintegrarea β^- este de doar 14s:



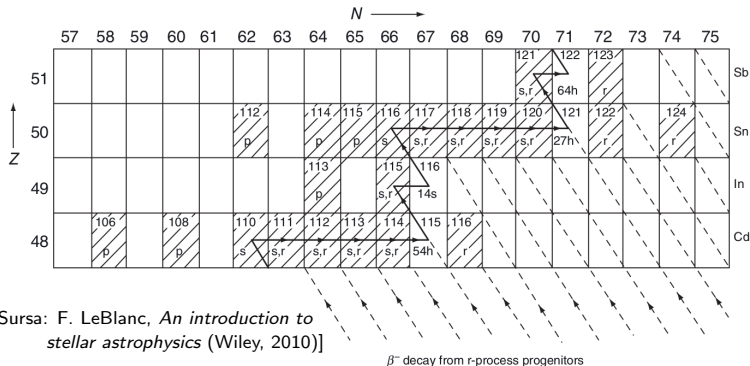
- ▶ Izotopii ^{117}Sn , ^{118}Sn , ^{119}Sn și ^{120}Sn sunt stabili, putând fi creați prin absorbții succesive de n .

- ▶ Procesul s se oprește la ^{209}Bi datorită lanțului:



lanțul închizându-se cu dezintegrarea β^- : $^{209}\text{Pb} \rightarrow ^{209}\text{Bi} + e^- + \bar{\nu}_e$.

II.7.2. Procesul r (rapid).



- Unii izotopi stabili, cum ar fi ^{116}Cd , ^{122}Sn , ^{124}Sn și ^{123}Sb , nu pot fi creați prin procesul s.
- În general, timpul de înjumătățire scade pe măsură ce $A - Z$ crește.
- În timpul procesului r, absorbția neutronilor poate fi mai rapidă decât timpul de înjumătățire $\Rightarrow$ se pot atinge *insule de stabilitate* (^{238}U și ^{232}Th).
- ^{122}Sn poate fi creat în urma absorbției rapide a șapte neutroni de către ^{115}In , urmată de o dezintegrare β^- .

Mecanismele procesului r: Supernova vs Kilonova



Supernova



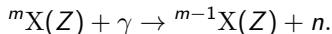
Kilonova

youtube.com/watch?v=EtIkOjq0_50

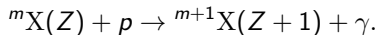
- ▶ **Supernova:** fluxul intens de neutrini cauzat de neutronizarea nucleului stelei interacționează cu protonii din stea, transformându-i în neutroni prin reacția $\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$ (și reacția inversă, $\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$, este posibilă) $\Rightarrow$ poate avea loc procesul r.
- ▶ **Kilonova:** reprezintă emisia de energie în urma fuziunii a două stele neutronice sau a unei stele neutronice cu o gaură neagră.
- ▶ Fuziunea GW170817 a două stele neutronice, detectată în 2017 prin emisiile de unde gravitaționale și electromagnetice, se presupune că a produs echivalentul a câteva mase M_P de aur și platină.

II.7.3. Procesele p.

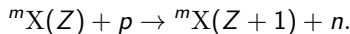
- ▶ Categoria proceselor p se referă la procese în urma cărora se formează nuclee bogate în protoni.
- ▶ Un prim mecanism se referă la extracția neutronilor dintr-un nucleu greu de către fotonii energetici:



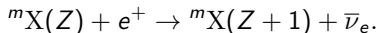
- ▶ Un alt mecanism presupune absorbția protonilor liberi din plasma stelară:



- ▶ Un proces mai improbabil presupune absorbția unui proton simultan cu emisia unui neutron:



- ▶ În fine, când temperatura din centrul steii e suficient de mare, în câmpul de radiație pot apărea fotoni suficient de energetici pentru crearea de perechi $e^- - e^+$, pozitronul putând fi absorbit de un nucleu:



Probleme

1. Conform teoremei virialului, jumătate din energia potențială gravitațională câștigată în urma colapsului gravitațional se transformă în energie internă. În situația ipotetică în care singura sursă de energie a Soarelui este cea gravitațională, să se estimeze vârsta t_{KH} a acestuia presupunând că luminozitatea rămâne la valoarea constantă $L = L_{\odot}$.² Valoarea t_{KH} definește scala de timp **Kelvin-Helmholtz**. [R: $t_{KH} \sim 10^7$ ani.]
2. Energia de legătură a ${}^4\text{He}$ este $E_l = 26,731$ MeV.
 - a) Să se calculeze ce procent reprezintă E_l din masa de repaus a 4 nuclee de ${}^1\text{H}$.³ [R: 0.71%]
 - b) Presupunând că Soarele a fost inițial compus doar din ${}^1\text{H}$ și că doar 10% din masa sa inițială se va găsi în zona unde fuziunea nucleară poate avea loc, să se calculeze energia totală E_{nucl} disponibilă. [R: 8×10^{62} MeV]
 - c) Să se calculeze durata de viață t_{nucl} a Soarelui presupunând că-și va menține luminozitatea constantă $L = L_{\odot}$. [R: 1×10^{10} ani]

² $L_{\odot} = 3,84 \times 10^{26}$ W.

³ $m_p = 1,67262158 \times 10^{-27}$ kg.

Probleme

3. Considerând sistemul centrului de masă al unui sistem format din două nuclee, să se găsească:
- a) Energia E astfel încât distanța de apropiere minimă r_0 să fie egală cu lungimea de Broglie $\lambda = h/\sqrt{2m_{\text{red}}E}$;
 - b) Temperatura $T = 2E/3K_B$ corespunzătoare acestei energii în cazul sistemului format din doi protoni. [R: $9,7 \times 10^6$ K]
4. Să se calculeze energia emisă în urma procesului triplu-alfa.⁴ [R: 7,4 MeV]
5. Să se calculeze energia emisă în reacția $^1\text{H} + ^2\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + \gamma$. [R: 5,49 MeV]
6. Să se calculeze energia emisă în reacția $^{12}\text{C} + ^4\text{He} \rightarrow ^{16}\text{O} + \gamma$. [R: 7,16 MeV]
7. Să se calculeze energia necesară pentru reacția $^4\text{He} + ^4\text{He} \rightarrow ^8\text{Be} + \gamma$. [R: 95 keV]
8. Să se estimeze timpul pe care Soarele îl va petrece pe ramura orizontală presupunând că fuziunea ^4He are loc exclusiv prin procesul triplu-alfa (luminozitatea Soarelui va fi $\sim 100L_{\odot}$). [R: 10^7 ani]

⁴Pentru masele atomice (inclusiv a electronilor), consultați <https://www.ndc.jaea.go.jp/NuC/index.html>. Energia de legătură a electronilor e neglijabilă ($\sim$ eV).