Astrofizică stelară
Cursul 1

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Conținutul cursului

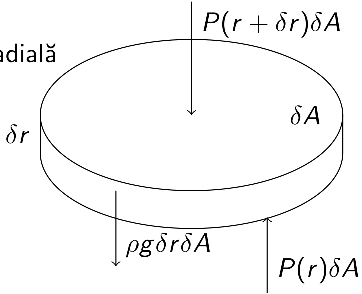
Capitolul I. Geneza stelară

- I.1. Geneza stelelor
- I.2. Echilibrul hidrostatic
- I.3. Teorema virialului
- I.4. Criteriul Jeans
- I.5. Durata colapsului

1.1. Geneza stelelor

- Stelele se formează în urma colapsului gravitațional al norilor interstelari de gaz, cu condiția ca aceștia să fie suficient de masivi (cf. criteriului Jeans).
- Colapsul transformă parțial (aprox. 50%) energia potențială gravitațională în energie internă (cf. teoremei virialului).
- Dacă masa M a obiectului format în urma colapsului depășește $0.08 M_{\odot}$, presiunea gravitațională poate declanșa procesele de fuziune nucleară, astfel dând naștere unei protostele.
- Colapsul încetează când gradienții de presiune echilibrează forța gravitațională.
- Pe secvența principală, stelele se află în echilibru energetic, adică rata de producere a energiei nucleare e egală cu luminozitatea stelei.

1.2. Echilibrul hidrostatic



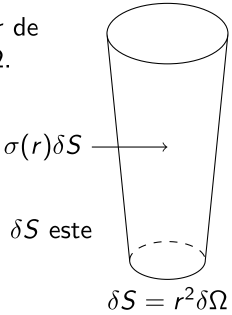
- Fie un cilindru așezat pe direcție radială la o distanță r de centrul stelei.
- δA este aria suprafețelor plane iar δr este înălțimea cilindrului.
- Forțele de presiune pe suprafațele superioară: $P(r+\delta r)\delta A$, respectiv inferioară: $P(r)\delta A$.
- Forța de greutate: $\rho(r)g(r)\delta r\,\delta A$.
- Steaua este în echilibru hidrostatic dacă forța totală se anulează:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)g(r), \qquad g(r) = \frac{GM(r)}{r^2},$$

$$M(r) = \int d^3x\,\rho(x) = \int_0^r dr\,r^2 \int d\Omega\,\rho(r) = 4\pi \int_0^r dr\,r^2\,\rho(r). \quad (1)$$

- Ec. (1) reprezintă ecuația de echilibru hidrostatic, fiind una dintre ecuațiile fundamentale ale structurii stelare. Aceasta reprezintă o condiție de stabilitate care leagă gradienții de presiune dP/dr de distribuția de masă $\rho(r)$.
- Atenție! $dP/dr < 0$ fiindcă P scade pe măsură ce r crește.

1.2. Echilibrul hidrostatic



- Fie $\delta S = r^2 \delta\Omega$ o suprafață aflată la distanța r de centrul stelei, care subîntinde unghiul solid $\delta\Omega$.
- Masa coloanei care se sprijină pe δS este

$$\delta m = \int_{\delta\Omega} d\Omega \int_r^{R_*} dr' \, r'^2 \rho(r').$$

- Densitatea superficială de masă care apasă pe δS este

$$\sigma(r) = \frac{\delta m}{\delta S} = \int_r^{R_*} dr' \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \rho(r').$$

- Înlocuind $(d\sigma/dr) = -\rho(r) - 2(\sigma/r)$ în ec. (1), rezultă:

$$\frac{dP}{d\sigma} = g(r)\left(1 + \frac{2\sigma}{\rho r}\right)^{-1}. \qquad (2)$$

- În atmosfera stelară $(r = R_* - \delta r,\ \delta r \ll R_*)$, $g(r) \simeq \mathrm{const}$ iar

$$\sigma(r) \simeq \frac{\rho}{3r^2}(R_*^3 - r^3).$$

$\Rightarrow$ presiunea crește pe măsură ce crește masa pe coloană.

1.3. Teorema virialului

- Teormea virialului face legătura dintre energia totală cinetică (internă) U și energia potențială Ω a unui sistem stabil.
- Vom obține teorema virialului pentru cazul unei stele cu simetrie sferică în echilibru hidrostatic.
- Presupunem că constituenții stelei satisfac ecuația gazului ideal:

$$P = nK_B T = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

  unde $\varepsilon = \frac{3}{2}nK_B T$ este densitatea de energie.
- Energia internă totală va fi dată de

$$U = \int_{V_*} \varepsilon dV = \frac{3}{2}\int_{V_*} PdV, \tag{3}$$

  unde integrarea se face pe întreg volumul V_* al stelei.
- Pentru a afla energia potențială Ω, ținem cont de faptul că steaua are simetrie sferică, astfel că:

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}, \qquad \Omega = -\int_0^{M_*} \frac{GM(r)}{r} dM. \tag{4}$$

1.3. Teorema virialului

- Pornim prin înmulțirea ec. (1) cu volumul $V(r) = 4\pi r^3/3$:

$$VdP = -\frac{1}{3}\frac{GM(r)}{r}dM, \tag{5}$$

  unde s-a introdus elementul de masă $dM = 4\pi r^2 \rho(r) dr$.
- Mai departe, membrul stâng al ec. (5) se poate integra prin părți:

$$\int_{r=0}^{R_*} VdP = (VP)\rfloor_{r=0}^{r=R^*} - \int_{V_*} PdV = -\frac{2}{3}U.$$

- Observăm că membrul drept al ec. (5) este chiar Ω (4), astfel încât:

$$2U + \Omega = 0. \tag{6}$$

- Ec. (6) reprezintă expresia matematică a **teoremei virialului**.
- Conform ec. (6), o scădere cu $\Delta\Omega$ a lui Ω duce la o creștere cu $\Delta\Omega/2$ a lui U.
- Pentru o stea în formare, teorema virialului nu se aplică exact deoarece sistemul nu este în echilibru hidrostatic, însă din ec. (6) rezultă că **aproximativ** jumătate din energia potențială gravitațională se transformă în energie internă.

1.4. Criteriul Jeans

- Criteriul Jeans (în toate formele sale) se referă la o condiție necesară pentru ca un sistem să poată colapsa sub acțiunea gravitației proprii.
- Sistemele pentru care $-\Omega > 2U$ sunt instabile și pot colapsa.
- Pentru a putea evalua Ω și U, presupunem că distribuție de masă este omogenă:

$$\rho(r) = \frac{M_*}{V_*} = \mathrm{const}, \qquad V_* = \frac{4\pi R_*^3}{3}, \tag{7}$$

  unde M_* reprezintă masa totală a sistemului iar V_* reprezintă volumul inițial (considerat sferic) ocupat de M_*.
- Ω se poate evalua analitic:

$$\Omega = -\int_0^{M_*} \frac{GM(r)}{r} dM = -G\left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^{1/3} \int_0^{M_*} M^{2/3} dM = -\frac{3}{5}\frac{GM_*^2}{R_*}, \tag{8}$$

  unde s-a ținut cont de relația $M(r) = \rho V(r) = 4\pi r^3 \rho/3$.
- Energia internă pentru un gaz ideal este $U = \frac{3}{2} N K_B \overline{T}$, unde $N = M/\mu m_H$ este numărul total de constituenți, unde μ este masa moleculară medie în unități atomice, m_H reprezintă masa atomului de hidrogen iar $\overline{T}$ este temperatura medie (efectivă) a gazului.

1.4. Criteriul Jeans

Avem în vedere următoarele 3 formulări ale criteriului Jeans:

1. Pentru ca o distribuție sferică omogenă de masă, având densitatea ρ și temperatura T, să poată colapsa, masa acesteia M trebuie să depășească **masa Jeans** M_J:

$$M > M_J = \left(\frac{5K_B T}{\mu m_H G}\right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}. \tag{9}$$

2. Pentru ca o distribuție sferică omogenă de masă, având masa totală M și temperatura T, să poată colapsa, densitatea acesteia ρ trebuie să depășească **densitatea Jeans** ρ_J:

$$\rho > \rho_J = \left(\frac{5K_B T}{\mu m_H G}\right)^{3} \left(\frac{3}{4\pi M^2}\right). \tag{10}$$

3. Pentru ca o distribuție sferică omogenă de masă, având densitatea ρ și temperatura T, să poată colapsa, raza acesteia R trebuie să depășească **raza Jeans** R_J:

$$R > R_J = \left(\frac{15K_B T}{4\pi\rho\mu m_H G}\right)^{1/2}. \tag{11}$$

1.4. Criteriul Jeans

- Pe măsură ce un nor colapsează, criteriul Jeans poate fi satisfăcut pe porțiuni mai mici, care pot colapsa pentru a forma stele.
- În general este favorizată formarea stelelor de mase mici și medii $M \simeq M_{\odot}$.
- Distribuția stelelor formate din același nor în funcție de masele lor se numește distribuția inițială masică.

1.4. Criteriul Jeans

- Să aplicăm criteriul Jeans pentru un nor de hidrogen difuz, având masa $M = 100 M_{\odot}$, temperatura $T = 100\ \mathrm{K}$ și densitatea $n = 1000$ atomi de H/cm^3.
  - Densitatea este $\rho = m_H \times 1000\,\mathrm{cm}^{-3} \simeq 1,6726 \times 10^{-18}\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$.[1]
  - Densitatea Jeans este

$$\rho_J = \left(\frac{5 K_B T}{\mu m_H G}\right)^3 \left(\frac{3}{4\pi M^2}\right), \tag{12}$$

    unde $K_B T \simeq 1,38066 \times 10^{-21}\mathrm{J}$,[2] $\mu m_H G = 1,11607 \times 10^{-37}\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$,[3] iar $M = 100 M_{\odot} = 1,9891 \times 10^{32}\mathrm{kg}$.[4]
  - $\rho_J \simeq 1,4279 \times 10^{-15}\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$.
  - Din moment ce $\rho < \rho_J$, criteriul Jeans nu este satisfăcut iar norul nu poate colapsa.

---

[1] Unitatea atomică de masă este $1\mathrm{u} = 1,660540 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$, iar $m_H = 1,0072765\mathrm{u}$.
[2] Constanta lui Boltzmann are valoarea $K_B = 1,380658 \times 10^{-23}\mathrm{J}$.
[3] Constanta gravitațională are valoarea $G = 6,67259 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3/\mathrm{kg\,s}^2$.
[4] Masa Soarelui este $M_{\odot} \simeq 1,9891 \times 10^{30}\mathrm{kg}$.

1.4. Criteriul Jeans

- Să aplicăm criteriul Jeans pentru un nor molecular cu $M = 1000 M_\odot$, $T = 10\ \mathrm{K}$ și $n = 1000$ molecule $\mathrm{H_2/cm^3}$:
  - Densitatea este $\rho = 2 m_H \times 1000\ \mathrm{cm}^{-3} \simeq 3 \times 10^{-18}\,\mathrm{kg/cm^3}$.
  - Masa Jeans este $M_J \simeq 5 \times 10^{31}\,\mathrm{kg} \simeq 20 M_\odot$.
  - Criteriul Jeans $M > M_J$ este satisfăcut iar norul poate colapsa.
  - Un exemplu este nebuloasa vulturului (M16 în catalogul Messier):
- Nu toți norii moleculari care satisfac criteriul Jeans colapsează, de unde rezultă că acest criteriu, deși necesar, nu e și suficient. Este necesar un mecanism care să inducă colapsul: o undă de șoc (în urma exploziei unei supernove învecinată), coliziunea cu alt nor, etc.

1.5. Durata colapsului

- Să considerăm colapsul unui nor a cărui masă M e distribuită cu simetrie sferică.
- Energia unei particule de masă m situată la marginea norului este

$$E = T(R) + V(R) = -\frac{GmM}{R},$$

unde am presupus că raza norului este R iar particula pornește din repaus ($T_R = 0$).

- La o distanță r față de centrul norului, energia particulei devine:

$$E = T(r) + V(r) = \frac{mv(r)^2}{2} - \frac{GmM}{r}.$$

- Știind că $v(r) = -dr/dt$, rezultă:

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2GM}{R}}\sqrt{\frac{R}{r} - 1}. \tag{13}$$

1.5. Durata colapsului

- Ecuația (13) se poate integra și rezultă **timpul de cădere liberă**:

$$t_{\rm cl} = -\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \int_R^0 \frac{dr}{R\sqrt{\frac{R}{r} - 1}}. \tag{14}$$

- Făcând schimbarea de variabilă $x = 1 - r/R$ rezultă:

$$t_{\rm cl} = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

- Integrala de mai sus se poate rezolva făcând substituția $x = \sin^2\theta$:

$$\int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \int_0^{\pi/2} d\theta(1 + \cos 2\theta) = \frac{\pi}{2}.$$

- Substituind în expresia pentru $t_{\rm cl}$ rezultă:

$$t_{\rm cl} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}. \tag{15}$$

- Pentru un nor molecular având $M = M_\odot$, $T = 10$ K și $\rho = \rho_J \simeq 2 \times 10^{-15}\,\mathrm{kg/m^3}$, rezultă $t_{\rm cl} \simeq 50\,000$ ani.

Probleme

1. Fie o planetă în a cărei atomsferă $\rho(z) = \rho_0(1 - z/H)$, unde z reprezintă înălțimea de la suprafața solului iar H reprezintă înălțimea de la care densitatea devine nulă. Pentru condiții izoterme și accelerație gravitațională constantă, să se găsească profilul presiunii. [R: $P(z) = \frac{1}{2}\rho_0 g H(1 - \frac{z}{H})^2$]
2. Atmosfera unei planete este alcătuită dintr-un gaz ideal, pentru care presiunea este $P = \rho k_B T/\mu m_H$, unde μ este masa moleculară medie (considerată constantă). Folosind ecuația echilibrului hidrostatic, arătați că, în condiții izoterme și pentru accelerație gravitațională g constantă, presiunea e dată de formula barometrică $P(z) = P(0)e^{-\mu m_H g z/k_B T}$, unde z reprezintă înălțimea față de sol.
3. Fie o stea de masă M_* și rază R_*, alcătuită din ioni de hidrogeni și electroni ($\mu = 1/2$) și având densitatea constantă.
   - a Folosind ecuația echilibrului hidrostatic, să se estimeze presiunea în centrul stelei. $[P \simeq 1,3 \times 10^{14}(M_*/M_\odot)^2(R_*/R_\odot)^{-4}\ \mathrm{Pa}]$
   - b Folosind ecuația gazului ideal, să se estimeze temperatura în centrul stelei. $[T_\mathrm{n} \simeq 5,74 \times 10^6(M_*/M_\odot)(R_*/R_\odot)^{-1}\ \mathrm{K}]$
   - c Pornind de la teorema virialului, să se estimeze temperatura medie a stelei. $[\overline{T} = 2T_\mathrm{n}/5]$

Probleme

4. Să se repete calculul de la problema 3 presupunând că densitatea variază liniar după legea $\rho(r) = \rho_0(1 - r/R_*)$. Să se găsească energia potențială totală a acestei stele. [R: $P \simeq 4,4 \times 10^{14}(M_*/M_\odot)^2(R_*/R_\odot)^{-4}$ Pa; $T \simeq 4,78 \times 10^6(M_*/M_\odot)(R_*/R_\odot)^{-1}$ K; $\Omega_* = -2,3 \times 10^{41}(M_*/M_\odot)^2(R_*/R_\odot)^{-1}$ J]
5. Să se găsească $P(r)$ în interiorul unei sfere de rază R_*, presupunând că densitatea ρ este constantă.
6. Să se calculeze masa Jeans pentru un nor de hidrogen difuz având masa $M = 100M_\odot$, temperatura $T = 100$ K și densitatea $n = 1000$ atomi de H/m^3. [R: $M < M_J \simeq 2900M_\odot$]
7. Fie un nor de hidrogen HII având $R = 10$ a.l.,[5] $T = 8000$ K și $n_{\mathrm{HII}} = 10^3\,\mathrm{cm}^{-3}$. Folosind criteriul Jeans, să se arate că acest nor este stabil din punct de vedere gravitațional. [R: $R < R_J \simeq 38,51$ a.l.]

[5] Anul lumină reprezintă distanța parcursă de lumină într-un an: $1\mathrm{a.l.} = 3,0856776 \times 10^{16}$ m.