

Raport științific

*privind implementarea proiectului
în perioada octombrie 2015-decembrie 2016*

Decrierea etapelor 1 și 2

Etapa 1	Tip Etapa: Etapă unică Rezultate livrate pe etapa: - O e-print pe arXiv.org	Data raportare: 07/12/2015	Buget etapă (lei): 42.220,00
Obiectiv 1.1	Denumire Obiectiv: Formalism pentru discretizarea spațiului impulsurilor folosind tetrade.		
Activitate 1.1.1	Denumire Activitate: Ecuații de transport folosind tetrade.		
Etapa 2	Tip Etapa: Etapă unică Rezultate livrate pe etapa: - O lucrare într-un jurnal cotate ISI. - Prezentarea unei lucrări la o conferință internațională.	Data raportare: 05/12/2016	Buget etapă (lei): 246.550,00
Obiectiv 2.1	Denumire Obiectiv: Formalism pentru discretizarea spațiului impulsurilor.		
Activitate 2.1.1	Denumire Activitate: Definirea cuadraturilor pe spațiul impulsurilor în raport cu câmpul de tetrade.		
Activitate 2.1.2	Denumire Activitate: Investigarea cuadraturilor pe semi-spațiu.		
Obiectiv 2.2	Denumire Obiectiv: Algoritmi pe bază de cuadraturi pentru implementarea ecuației Boltzmann.		
Activitate 2.2.1	Denumire Activitate: Aplicarea modelelor lattice Boltzmann (LB) sferice la curgeri relativiste.		
Activitate 2.2.2	Denumire Activitate: Investigarea modelelor lattice Boltzmann pe semi-spațiu pentru curgeri relativiste delimitate de frontiere.		
Activitate 2.2.3	Denumire Activitate: Dezvoltarea unui program paralel pentru implementarea modelelor lattice Boltzmann relativiste (RLB).		

Verificarea stadiului livrabilelor

În cadrul primei etape s-a elaborat lucrarea [1], care a fost publicată în Analele Universității de Vest din Timișoara - Fizică, indexată în bazele de date internaționale.

În cadrul etapei a doua s-a elaborat lucrarea [2], care a fost publicată în jurnalul Physical Review D, fiind clasat în zona galbenă după scorul de influență (AIS), respectiv în zona roșie după factorul de impact (IF).

Tot în cadrul acestei etape, a fost elaborată lucrarea [3], care acum este în curs de evaluare la Journal of Computational Physics, jurnal clasat în zona roșie atât după AIS cât și după IF.

Pe parcursul acestei etape, au fost prezentate un număr de 10 lucrări la conferințe internaționale. Pentru două dintre acestea au fost trimise articole către volumul de lucrări (cotent ISI), care au fost deja acceptate [4, 5].

Angajat	Realizat	Grad de îndeplinire
Un e-print pe ar-Xiv.org.	O lucrare publicată într-un jurnal indexat în BDI.	Rezultat livrat.
O lucrare într-un jurnal cotent ISI:	O lucrare publicată într-un jurnal cotent ISI; O lucrare trimisă spre evaluare la un jurnal cotent ISI; Două lucrări acceptate în volumul de lucrări cotent ISI al conferinței TIM-2016 (Timișoara,România)	Rezultat livrat.
Prezentarea unei lucrări la o conferință internațională:	Au fost prezentate un număr de 10 lucrări la conferințe internaționale.	Rezultat livrat.

Raport de activitate

Etapa 1

Obiectiv 1.1. Formalism pentru discretizarea spațiului impulsurilor folosind tetradе

Acest obiectiv reprezintă piatra de temelie pentru obiectivele următoare. Discretizarea spațiului impulsului exprimat în raport cu câmpul de tetradе reprezintă elementul de noutate principal pe care îl aducem comunității științifice prin prezentul Proiect. Mai multe detalii prezentăm în descrierea activității aferente acestui obiectiv și în sec. 1.

Activitate 1.1.1. Ecuatii de transport folosind tetradе. În cadrul acestei activități, a fost elaborată lucrarea [1], pe tema formalismului tetradelor aplicat pentru rezolvarea ecuației Boltzmann relativiste. Prin această lucrare am exemplificat aplicarea formalismului tetradelor pentru decuplarea spațiului impulsurilor de cel al coordonatelor la o problemă de curgere relativistă, acest pas fiind premergător demarării activităților obiectivelor ulterioare (2.1, 2.2 și 3.1).

Se poate vedea importanța rezultatelor din această activitate deoarece în cadrul etapei a doua (prezentată mai jos) au fost elaborate două lucrări [2, 5] care folosesc formularea ecuației Boltzmann în raport cu câmpul de tetradе. Mai multe detalii tehnice sunt prezentate în sec. 1.

Obiectiv 2.1. Formalism pentru discretizarea spațiului impulsurilor

În cadrul acestui obiectiv, am ales studiul curgerilor în rotație având simetrie axială. În această categorie intră o gamă largă de spații-timp, dintre care în lucrarea [2] am ales să studiem spațiile Minkowski, anti-de Sitter, de Sitter, Schwarzschild și Reissner-Nordström. În continuare vom discuta stadiul de implementare a acestui obiectiv la nivelul activităților componente.

Activitate 2.1.1. Definirea cuadraturilor pe spațiul impulsurilor în raport cu câmpul de tetrade. În lucrarea [2], am explorat o gamă largă de tetrade pentru curgerile în rotație în jurul unei axe fixe. Formalismul utilizat în această lucrare are la bază articolul [C. Y. Cardall, E. Endeve, A. Mezzacappa, Phys. Rev. D **88** (023011) 2013], unde se introduce ecuația Boltzmann în formă conservativă, împreună cu o metodă pentru construirea tetradei aferente unui observator care se deplasează de-a lungul liniei de curent. Tot în cadrul acestei lucrări am studiat și proprietățile coeficienților de transport când aproximația Marle este folosită pentru termenul de coliziune. Aceste investigații sunt preponderent de natură analitică, urmând ca rezultatele să fie folosite pentru validarea metodelor numerice care vor fi în viitor dezvoltate. Pentru realizarea acestei lucrări au contribuit membrii echipei Victor E. Ambruș și Ion I. Cotăescu.

În continuare, pentru definirea unei cuadraturi pe spațiul impulsurilor în raport cu câmpul de tetrade, am ales să studiem problema curgerii între doi cilindri coaxiali aflați în rotație. Deoarece geometria frontierei acestui sistem este curbă, problema se pretează studiului folosind sistemul de coordonate cilindric (ρ, φ, z) . Deoarece acest sistem de coordonate este necartezian, se justifică introducerea unui câmp de tip tetradic (triadic în acest caz, întrucât avem nevoie doar de trei vectori corespunzători celor trei coordonate ρ, φ și z) în raport cu care să se definească spațiul impulsurilor.

În urma introducerii câmpului triadic, definirea cuadraturii și discretizarea spațiului impulsurilor se poate face ca în cazul coordonatelor carteziane. Pentru a nu încărca această secțiune, am ales să prezentăm detaliile tehnice în secțiunea 2, unde se va vedea prin rezultatele prezentate că această activitate a fost îndeplinită cu succes.

Pentru îndeplinirea acestei activități au participat membrii echipei Victor E. Ambruș, Sergiu Busuioc, Ion I. Cotăescu și Victor Sofonea.

Activitate 2.1.2. Investigarea caudraturilor pe semi-spațiu. Această activitate continuă Activitatea 2.1.1. Deoarece curgerea Couette între doi cilindri coaxiali prezintă două frontiere curbe, definirea unei caudraturi pe semi-spațiu cu ajutorul căreia să se implementeze condițiile de reflexie difuză se poate face urmând aceiași pași ca în lucrarea [V. E. Ambruș, V. Sofonea, J. Comput. Phys. **316** (2016) 760]. Caudratura pe semi-spațiu relevantă pentru această curgere este caudratura Gauss-Hermite pe semiaxă.

Ca și înainte, lăsăm prezentarea detaliilor tehnice pentru secțiunea 2. După cum se va vedea din rezultate, tehnica utilizată pentru definirea caudraturii pe semi-axe este corectă întrucât recuperează rezultatele analitice așteptate. Drept urmare, considerăm că această activitate a fost finalizată cu succes.

Pentru implementarea acestei activități au participat Victor E. Ambruș, Sergiu Busuioc și Victor Sofonea. Rezultatul acestor investigații este în curs de redactare și ne așteptăm să putem trimite o lucrare spre publicare în cadrul etapei următoare.

Obiectiv 2.2. Algoritmi pe bază de caudraturi pentru implementarea ecuației Boltzmann

În cadrul acestui obiectiv, s-a pornit de la lucrările [V. E. Ambruș, V. Sofonea, Phys. Rev. E **86** 016708; P. Romatschke, M. Mendoza, S. Succi, Phys. Rev. C **84** (2011) 034903] pentru dezvoltarea unei familii de modele lattice Boltzmann bazate pe caudraturi de tip Gauss, cu aplicabilitate în simularea curgerilor relativiste ale particulelor fără masă.

Putem spune că acest obiectiv a fost finalizat, deoarece la finele acestei etape am reușit să trimitem lucrarea [3], prin care finalizăm activitățile 2.2.1 și 2.2.3. Mai multe detalii despre conținutul acestei lucrări și legătura acesteia cu planul de realizare a proiectului prezentăm în sec. 3.

Activitate 2.2.1. Aplicarea modelelor lattice Boltzmann (LB) sferice la curgeri relativiste. Extensia modelelor introduse în lucrarea [V. E. Ambruș, V. Sofonea, Phys. Rev. E **86** 016708] pentru cazul curgerilor relativiste poate fi făcută, metodele de cuadratură prezentând similarități importante cu cele din lucrarea menționată anterior. Lăsând detaliile tehnice pentru Sec. 3, putem spune că această activitate a fost încheiată cu succes, întrucât modelele LB sferice au fost aplicate cu succes la curgerile relativiste.

Pentru finalizarea acestei activități au participat membrii echipei Robert Blaga și Victor E. Ambruș.

Activitate 2.2.2. Investigarea modelelor lattice Boltzmann pe semispațiu pentru curgeri relativiste delimitate de frontiere. În cazul curgerilor relativiste delimitate de frontiere, soluția este găsirea unei cuadraturi pe semispațiu după unghiul zenit θ . În urma unui studiu de fezabilitate, avem indicații ferme că astfel de cuadraturi se pot construi, după cum se poate vedea parcurgând materialul din Sec. 4. Pentru fructificarea rezultatului pozitiv obținut în urma acestei analize, vom urmări implementarea unei curgeri în teoria relativității generale în cadrul activității 3.1.2 a etapei 3 a proiectului.

Pentru derularea acestei activități, participă membrul echipei Victor E. Ambruș.

Activitate 2.2.3. Dezvoltarea unui program paralel pentru implementarea modelelor lattice Boltzmann relativiste (RLB). În cadrul etapei 2016 a implementării proiectului *Modele lattice Boltzmann pentru simularea curgerii gazelor rarefiate în regim relativist* a fost dezvoltat un program bazat pe modelele prezentate în lucrările [4, 3]. Programul a fost testat și validat prin compararea rezultatelor obținute cu soluții analitice, precum și cu rezultate disponibile în literatura de specialitate. Dovadă a faptului că această activitate s-a încheiat cu succes o reprezintă cele două lucrări [4, 3], dintre care [4] a fost deja acceptată spre publicare.

Mai multe detalii despre acest program prezentăm în sec. 3.

Pentru realizarea acestei activități au participat membrii echipei Robert Blaga și Victor E. Ambruș.

1 Formalismul tetradelor aplicat ecuației Boltzmann

Formalismul tetradelor permite decuplarea spațiului impulsurilor de metrica spațiu-timpului. În plus, datorită invarianței câmpului de tetrade la transformări Lorentz, ecuația Boltzmann se poate scrie în așa-numitul sistem propriu al mediului fluid, în raport cu care viteza macroscopică este nulă.

Această proprietate este explorată în lucrările [1, 2], unde sunt investigate proprietățile unui gaz aflat în rotație rigidă în jurul unei axe fixe, mai întâi pe spațiul Minkowski [1] după care pe orice spațiu cu simetrie sferică [2].

Elementul de linie pe un spațiu cu simetrie sferică este [2]:

$$ds^2 = w^2 \left[-dt^2 + \frac{dr^2}{u^2} + \frac{r^2}{v^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (1)$$

unde u , v și w depind doar de coordonata r . Câmpul de viteze al unui fluid în rotație aflat în echilibru termodinamic este:

$$u^\mu = \frac{\gamma}{w(r)} (1, 0, 0, \Omega)^T, \quad (2)$$

unde factorul Lorentz γ este dat prin:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho \Omega}{v} \right)^2}}, \quad (3)$$

unde $\rho = r \sin \theta$.

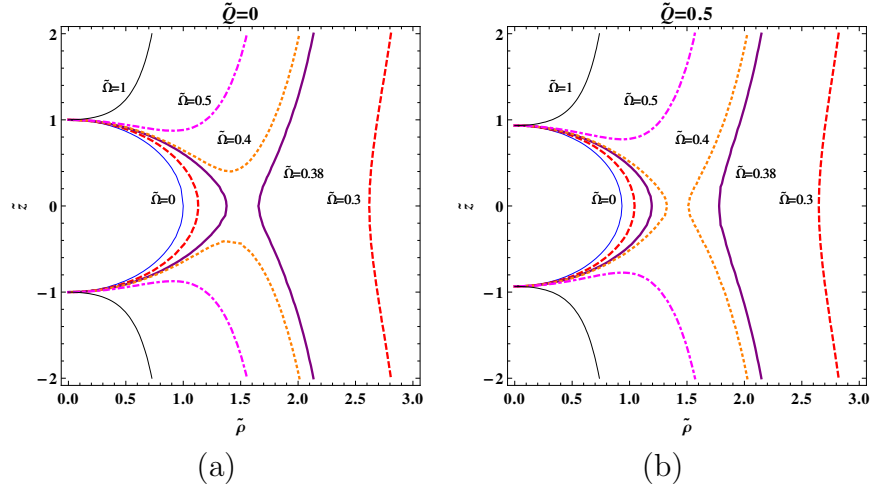


Figura 1: Structura orizonturilor de rotație în spațiul Reissner-Nordström pentru raportul $\tilde{Q} = Q/M$ având valorile (a) $\tilde{Q} = 0$ și (b) $\tilde{Q} = 0.5$. Pe axa verticală e reprezentat raportul $\tilde{z} \equiv z/2M$ (distanța de-a lungul z în unități $2M$), în timp ce pe axa orizontală avem distanța $\tilde{\rho} = r \sin \theta / 2M$ măsurată perpendicular pe axa de rotație. Conturile reprezintă orizonturile de rotație.

1.1 Orizonturi de rotație

Să ne imaginăm un fluid în rotație rigidă față de axa z , astfel că viteza elementului de fluid crește liniar cu distanța ρ față de axa z . La o distanță suficient de mare, viteza fluidului se apropie de viteza luminii, iar factorul Lorentz (3) tinde spre infinit. Locul geometric al punctelor unde $\gamma \rightarrow \infty$ datorită rotației poartă numele de *orizont de rotație*. În figura 1 sunt reprezentate câteva orizonturi de rotație pentru felurite valori ale vitezei unghiulare a rotației Ω , pentru cazurile metricii Schwarzschild (a) și Reissner-Nordström (b).

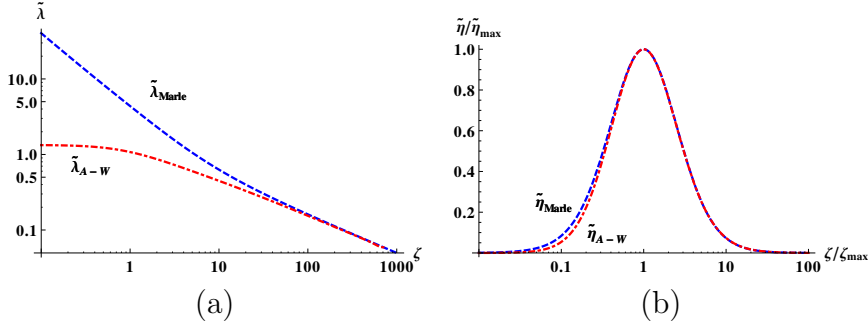


Figura 2: Comparația între coeficienții de (a) conductivitate termică λ și (b) vâscozitate dilatațională η obținuți în cadrul modelelor Marle și Anderson-Witting. Se observă că curbele corespunzătoare lui η (b) sunt suprapuse când se folosește relația (4).

1.2 Coeficienții de transport

Fluidele relativiste, la fel ca cele nerelativiste, prezintă fenomene disipative caracterizate prin următorii coeficienți de transport:

- Coeficientul de vâscozitate volumetrică η (dilatațională);
- Coeficientul de vâscozitate dinamică μ ;
- Coeficientul de conductivitate termică λ .

Caracteristicile acestor coeficienți depind de fluidul studiat. În ecuația Boltzmann relativistă, proprietățile mediului fluid sunt influențate de către termenul de coliziune, care descrie interacțiunea dintre constituenții acestuia. În mod uzual, sunt folosite două modele pentru simplificarea termenului de coliziune, și anume modelul Marle și modelul Anderson-Witting. În lucrarea [5], am făcut o comparație a proprietăților coeficienților de transport în aceste două modele pentru curgeri pe spații-timp arbitrare. Două rezultate remarcabile merită amintite: în primul rând, coeficientul redus de conductivitate termică $\tilde{\lambda} = \sigma\lambda$ (unde σ este secțiunea eficace de împrăștiere) tinde spre $4/3$ în linia ultrarelativistă a modelului Anderson-Witting, în timp ce în modelul Marle, $\tilde{\lambda}$ tinde la infinit. Al doilea rezultat remarcabil este că $\tilde{\eta} = \sigma\eta/m$

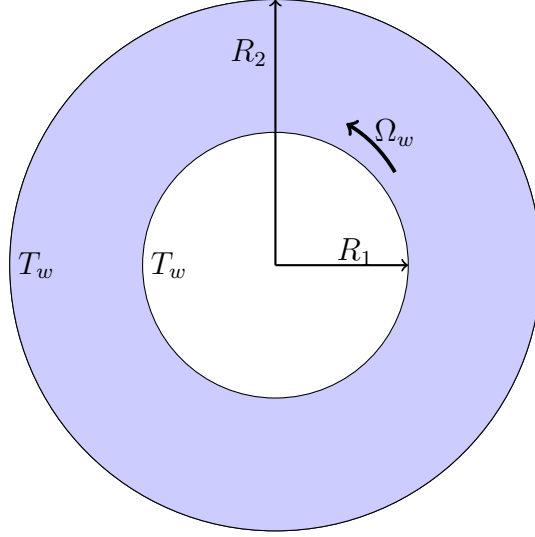


Figura 3: Geometria curgerii Taylor-Couette.

(unde m este masa particulelor constituyente) în modelul Anderson-Witting este cu o foarte bună aproximație legat de $\tilde{\eta}$ în modelul Marle prin următoarea transformare de similaritate:

$$\frac{\tilde{\eta}_{A-W}(\zeta/\zeta_{\max;A-W})}{\tilde{\eta}_{A-W}(\zeta_{\max;A-W})} \simeq \frac{\tilde{\eta}_M(\zeta/\zeta_{\max;M})}{\tilde{\eta}_M(\zeta_{\max;M})}. \quad (4)$$

Aceste rezultate sunt ilustrate în Fig. 2, mai multe detalii fiind date în ref. [5].

2 Curgerea Couette circulară

Figura 3 prezintă schematic geometria curgerii Taylor-Couette. Curgerea are loc între doi cilindri coaxiali, raza cilindrului interior fiind R_1 iar cea a celui exterior fiind R_2 . Temperatura pereților este menținută la valoarea constantă $T_w = 1$. Curgerea este antrenată de cilindrul interior, care se rotește în sens trigonometric cu viteza unghiulară constantă Ω_w , în timp ce cilindrul exterior rămâne fix.

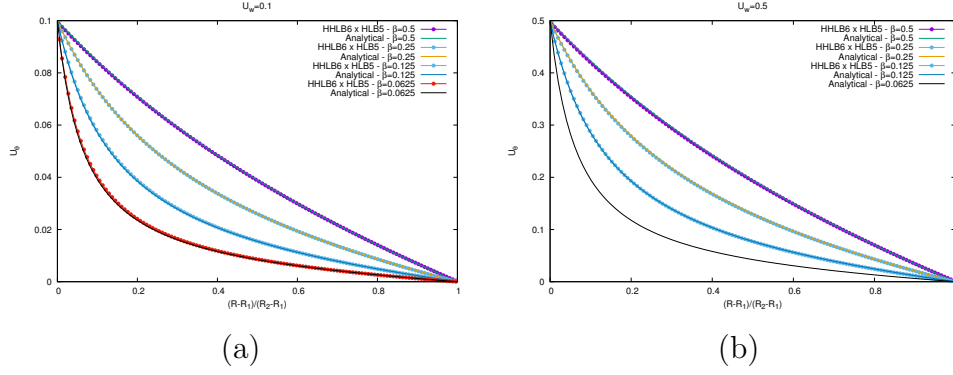


Figura 4: Profilul componentei tangențiale U_θ a vitezei pentru cazul când cilindrul exterior este în repaus iar cel interior se rotește cu viteza tangențială (a) $u_w = 0.1$; (b) $u_w = 0.5$. Rezultatele numerice sunt comparate cu formula analitică (8a) pentru diferite valori ale raportului $\beta = R_1/R_2$ dintre raza cilindrului interior și a celui exterior.

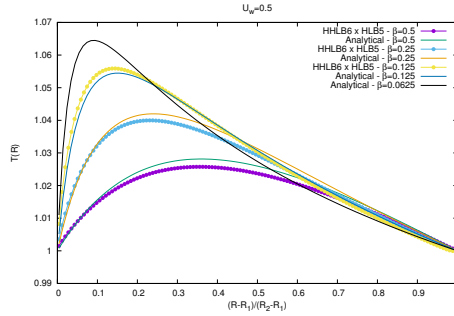


Figura 5: Profilul temperaturii T pentru cazul când cilindrul exterior este în repaus iar cel interior se rotește cu viteza tangențială $u_w = 0.5$. Rezultatele numerice sunt comparate cu formula analitică (8b) pentru diferite valori ale raportului $\beta = R_1/R_2$ dintre raza cilindrului interior și a celui exterior.

Elementul de linie în coordonate cilindrice se scrie:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (5)$$

Acest sistem admite următorul câmp triadic:

$$\begin{aligned} e_{\hat{\rho}} &= \partial_{\rho}, & e_{\hat{\varphi}} &= \frac{1}{\rho} \partial_{\varphi}, & e_{\hat{z}} &= \partial_z, \\ \omega^{\hat{\rho}} &= d\rho, & \omega^{\hat{\varphi}} &= \rho d\varphi, & \omega^{\hat{z}} &= dz. \end{aligned} \quad (6)$$

În raport cu acest sistem, se pot defini impulsurile corespunzătoare componentelor radială $p^{\hat{\rho}}$, azimutală $p^{\hat{\varphi}}$ și verticală $p^{\hat{z}}$. Presupunând că curgerea este omogenă de-a lungul coordonatelor z și φ , ecuația Boltzmann se poate scrie în formă conservativă urmând formalismul introdus în [Cardall et al., Phys. Rev. D **88** (023011) 2013]:

$$\frac{\partial(f\rho)}{\partial t} + \frac{p^{\hat{\rho}}}{m} \frac{\partial(f\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{m} \left[(p^{\hat{\varphi}})^2 \frac{\partial f}{\partial p^{\hat{\rho}}} - p^{\hat{\rho}} \frac{\partial(f p^{\hat{\varphi}})}{\partial p^{\hat{\varphi}}} \right] = -\frac{\rho}{\tau} (f - f^{(\text{eq})}). \quad (7)$$

Validăm implementarea cuadraturilor folosind tetrada (6) studiind limita hidrodinamică a ec. 7, când profilele vitezei $U_{\theta}(R)$ și a temperaturii $T(R)$ se pot obține analitic:

$$U_{\theta}(R) = \frac{U_w \beta}{1 - \beta^2} \left(\frac{R_2}{R} - \frac{R}{R_2} \right), \quad (8a)$$

$$T(R) = T_w - \frac{1}{2} \frac{\Omega_w^2 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{\ln \frac{R}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} - \frac{R_1^{-2} - R^{-2}}{R_1^{-2} - R_2^{-2}} \right), \quad (8b)$$

unde $\beta = \frac{R_1}{R_2}$ reprezintă raportul dintre raza cilindrului interior și a celui exterior.

Rezultatele numerice au fost obținute folosind o cuadratură pe semiaxă (semispațiu) pe direcția radială (cea care e perpendiculară pe suprafețele cilindrilor). Metoda de cuadratură folosită se numește quadratura Gauss-

Hermite pe semiaxă și a fost introdusă în [V. E. Ambruș, V. Sofonea, J. Comput. Phys. **316** (2016) 760]. În Fig. 4 reprezentăm profilul vitezei obținut cu modelele noastre, comparat cu soluția analitică (8a). Se observă o suprapunere excelentă. Mai departe, profilul temperaturii obținut cu modelele noastre este comparat cu soluția analitică (8b) în Fig. 5 și din nou se observă o suprapunere excelentă.

Concluzionăm că formalismul tetradelor a fost utilizat cu succes iar implementarea ecuației Boltzmann folosind cuadratura Gauss-Hermite pe semispațiu a fost corectă, astfel că activitățile 2.1.1 și 2.1.2 ale obiectivului 2 au fost îndeplinite cu succes.

Rezultatele prezentate în această secțiune sunt în curs de redactare și sperăm să trimitem o lucrare spre publicare în cadrul etapei următoare a proiectului.

3 Modele LB bazate pe cuadraturi sferice pentru curgeri relativiste

În lucrarea [3], echipa noastră a propus o familie de modele lattice Boltzmann (LB) pentru studierea curgerilor relativiste ale particulelor fără masă. La baza construcției modelelor stau cuadraturile Gauss-Laguerre și Gauss-Hermite.

Pentru validarea modelelor astfel introduse, am efectuat simulări a unui caz particular a problemei Riemann, denumită problema lui Sod. Configurația inițială constă în două incinte separate printr-o membrană subțire, în cea din stânga găsim un fluid mai dens decât cel din incinta dreaptă. La momentul inițial $t = 0$, membrana este scoasă iar fluidul din partea stângă se propagă sub forma unei unde de șoc în incinta din dreapta.

Pentru a ilustra capabilitățile modelelor noastre, am pregătit trei seturi de grafice care se referă la profilele densității și a presiunii la un moment ulterior eliminării membranei. În Fig. 6, comparăm rezultatele simulărilor

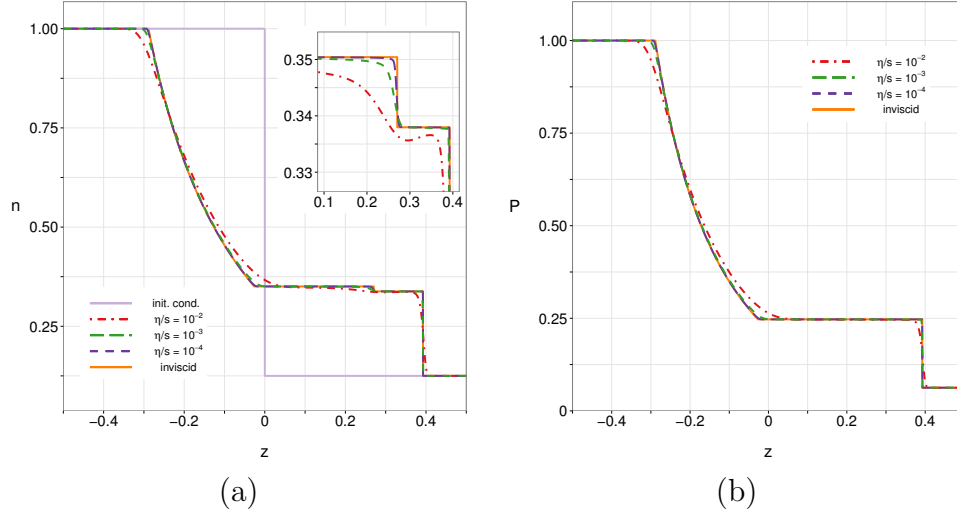


Figura 6: Profilul densității (a) și profilul presiunii (b) la momentul de timp $t = 0.5$ în propagarea unei unde de șoc într-un mediu fluid cu difuzivitate redusă (limita fluidului ideal). Se pot distinge clar unda de rarefacție, discontinuitatea de contact (în cazul densității), platoul central (în cazul presiunii) și frontul de undă.

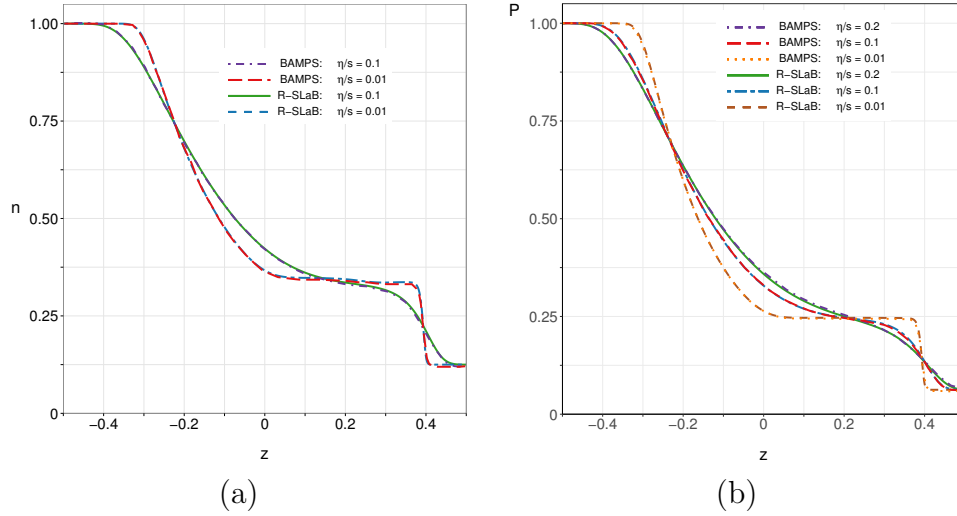


Figura 7: Profilul densității (a) și profilul presiunii (b) la momentul de timp $t = 0.5$ în propagarea unei unde de șoc într-un mediu fluid vâscos. Se poate observa efectul vâscozității de a netezi profilele, aplătizând frontul de undă și discontinuitatea de contact.

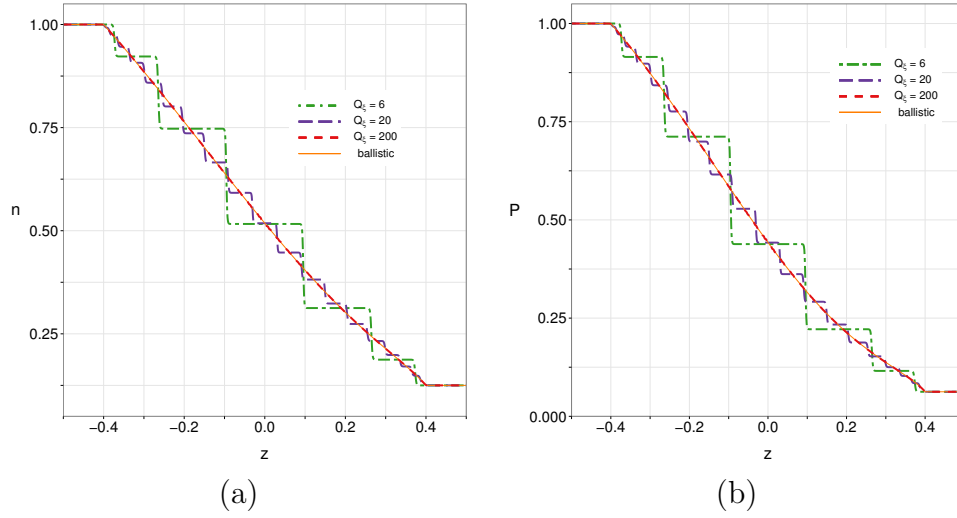


Figura 8: Profilul densității (a) și profilul presiunii (b) la momentum de timp $t = 0.5$ în propagarea undei de șoc într-un mediu fluid rarefiat (limita balistică). Se poate vedea că, deoarece particulele călătoresc libere fără a se ciocni cu alți constituenți, se formează un număr de paliere egal cu ordinul cuadraturii Q_ξ . În cazul când Q_ξ e mare, tranziția dintre paliere este netedă și rezultatul simulării reproduce formula analitică.

cu soluția analitică pentru fluidul ideal (limita $\eta/s \rightarrow 0$). Se observă că pe măsură ce η/s tinde spre 0, rezultatele numerice se apropie de rezultatul analitic obținut în cazul ideal.

Mai departe, în Fig. 6, valoarea lui η/s este suficient de mare pentru ca efectele vâscozității să ducă la o netezire a profilelor în zona frontului de undă. Pentru validarea profilelor pe care le-am obținut, am reprezentat rezultatele obținute cu metoda BAMPS (Boltzmann approach to multiparton scattering) din [I. Bouras et al., Phys. Rev. C **82** (2010) 024910]. Se observă o suprapunere excelentă între cele două metode.

Poate cel mai spectaculos rezultat este că modelele noastre sunt capabile să recupereze limita balistică a ecuației Boltzmann. După cum se poate vedea în Fig. 8, cheia pentru realizarea acestei performanțe este permiterea creșterii ordinului de cuadratură Q_ξ la valori suficient de mari (de ordinul ~ 100), ceea ce pentru modelele noastre nu reprezintă deloc o problemă.

Având în vedere realizările de mai sus, care au fost recent trimise spre publicare [3], precum și rezultatele preliminare prezentate în lucrarea [4], putem concluziona că activitățile 2.2.1 și 2.2.3 au fost îndeplinite cu succes.

4 Cuadraturi pe semispațiu pentru curgeri relativiste

Să considerăm o curgere între doi pereți plani paraleli perpendiculari pe axa z , situați la $z = \pm L/2$. Pentru a calcula fluxul de particule incident pe peretele de la $z = L/2$, trebuie să evaluăm următoarea integrală:

$$\mathcal{F}_+ = \int \frac{d^3p}{p^0} \theta(p^z) f p^z \Big|_{z=L/2}. \quad (9)$$

În cazul particulelor fără masă, integrala de mai sus devine:

$$\mathcal{F}_+ = \int_0^\infty dp p^2 \int_{-1}^1 d \cos \theta \theta(p \cos \theta) \cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi f \Big|_{z=L/2}. \quad (10)$$

Presupunând că curgerea este omogenă în planul xOy , se poate presupune că f nu depinde de φ , astfel că integrala după φ va da automat 2π . Integrala după p se face normal (așa cum e prezentat în ref. [3]), în timp ce funcția treaptă $\theta(p \cos \theta)$ restricționează intervalul de integrare după $\cos \theta$ la domeniul $[0, 1]$:

$$\mathcal{F}_+ = 2\pi \int_0^\infty dp p^2 \int_0^1 d\xi x i f \Big|_{z=L/2}. \quad (11)$$

Se observă că integrala după ξ acoperă doar calota nordică a sferei având planul ecuatorial perpendicular pe axa z . Astfel de integrale se pot recupera folosind o variantă modificată a cuadraturii Gauss-Legendre prin efectuarea schimbării de variabilă $\zeta = 2\xi - 1$:

$$\int_0^1 d\xi f(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\zeta f\left(\frac{\zeta+1}{2}\right) = \sum_{j=1}^{Q_\zeta} w_j^\zeta f(\xi_j) \quad (12)$$

unde ξ_j sunt cele Q_ζ puncte de cuadratură care se scriu în funcție de rădăcinile ζ_j ale polinomului Legendre P_{Q_ζ} de ordinul Q_ζ astfel:

$$\xi_j = \frac{\zeta_j + 1}{2}. \quad (13)$$

Ponderile de cuadratură se pot obține utilizând următoarea formulă:

$$w_j^\zeta = \frac{1 - \zeta^2}{[(Q_\zeta + 1)P_{Q_\zeta+1}(\zeta_j)]^2}. \quad (14)$$

Studiul de fezabilitate de mai sus arată că construirea cuadraturilor pe semispațiu pentru curgerile relativiste este realizabilă. Concluzionăm deci că activitatea 2.2.3 a fost încheiată cu succes. Ca și aplicație propunem

încercarea implementării unei curgeri în teoria relativității generale în cadrul activității 3.1.2 a etapei a treia a proiectului.

Mulțumiri. Rezultatele prezentate în acest Raport au fost obținute cu sprijinul CNCS-UEFISCDI acordat prin grantul cu numărul PN-II-RU-TE-2014-4-2910. Pe această cale doresc să mulțumesc membrului de echipă Nistor Nicolaevici pentru participarea la toate activitățile desfășurate prin discuții științifice și sugestii valoroase.

Bibliografie

- [1] V. E. Ambruș, R. Blaga, *Relativistic Rotating Boltzmann Gas Using the Tetrad Formalism*, Annals of West University of Timisoara - Physics **58** (2015) 89–108, DOI:10.1515/awutp-2015-0211.
- [2] V. E. Ambruș, I. I. Cotăescu, *Maxwell-Jüttner distribution for rigidly rotating flows in spherically symmetric spacetimes using the tetrad formalism*, Phys. Rev. D **94** (2016) 085022, DOI:10.1103/PhysRevD.94.085022.
- [3] R. Blaga, V. E. Ambruș, *High-order quadrature-based lattice Boltzmann models for the flow of ultrarelativistic rarefied gases*, J. Comput. Phys., în curs de evaluare (adresă preprint: arXiv:1612.01287 [physics.flu-dyn]).
- [4] R. Blaga, V. E. Ambruș, *Quadrature-based Lattice Boltzmann Model for Relativistic Flows*, AIP Conf. Proc., în curs de publicare în volumul de lucrări ale conferinței TIM15-16, 26–28 mai 2016, Timișoara (adresă preprint: arXiv:1608.03004 [physics.flu-dyn]).
- [5] V. E. Ambruș, *Anderson-Witting transport coefficients for flows in general relativity*, AIP. Conf. Proc., în curs de publicare în volumul de lucrări ale conferinței TIM15-16, 26–28 mai 2016, Timișoara (adresă preprint: arXiv:1608.01400 [astro-ph.HE]).