

Raport științific sintetic

*privind implementarea proiectului
în perioada Octombrie 2015–Septembrie 2017*

1 Etapele de implementare a proiectului

Etapa 1	Tip Etapă: Etapă unică Rezultate livrate pe etapa: - Un e-print pe arXiv.org	Data raportare: 07/12/2015
Obiectiv 1.1	Formalism pentru discretizarea spațiului impulsurilor folosind tetrade.	
Activitate 1.1.1	Ecuatii de transport folosind tetrade.	
Etapa 2	Tip Etapă: Etapă unică Rezultate livrate pe etapa: - O lucrare într-un jurnal cotate ISI. - Prezentarea unei lucrări la o conferință internațională.	Data raportare: 05/12/2016
Obiectiv 2.1	Formalism pentru discretizarea spațiului impulsurilor.	
Activitate 2.1.1	Definirea cuadraturilor pe spațiul impulsurilor în raport cu câmpul de tetrade.	
Activitate 2.1.2	Investigarea caudraturilor pe semi-spațiu.	
Obiectiv 2.2	Algoritmi pe bază de cuadraturi pentru implementarea ecuației Boltzmann.	
Activitate 2.2.1	Aplicarea modelelor lattice Boltzmann (LB) sferice la curgeri relativiste.	
Activitate 2.2.2	Investigarea modelelor lattice Boltzmann pe semi-spațiu pentru curgeri relativiste delimitate de frontiere.	
Activitate 2.2.3	Dezvoltarea unui program paralel pentru implementarea modelelor lattice Boltzmann relativiste (RLB).	
Etapa 3	Tip etapă: Etapă unică Rezultate livrate pe etapa: - Două lucrări în jurnale cotate ISI. - Prezentarea unei lucrări la o conferință internațională.	Data raportare: 30/09/2017
Obiectiv 3.1	Aplicarea metodologiei dezvoltate la Obiectivul 2.2 la curgeri relativiste.	
Activitate 3.1.1	Compararea rezultatelor RLB cu cele din literatură.	
Activitate 3.1.2	Aplicarea modelelor RLB la curgeri în teoria relativității generale (TRG).	

2 Verificarea stadiului livrabilelor

2.1 În cadrul primei etape:

- S-a elaborat lucrarea [1], publicată în Analele Universității de Vest din Timișoara - Fizică (indexată în BDI).

2.2 În cadrul etapei a doua:

- S-a elaborat lucrarea [2], publicată în jurnalul Physical Review D (indexat ISI, în zona galbenă după AIS, respectiv în zona roșie după IF).
- A fost elaborată lucrarea [3], trimisă spre publicare la Journal of Computational Physics. În urma unei decizii nefavorabile a editorilor, lucrarea a fost retrimisă spre publicare la Physical Review C în cadrul etapei a treia.
- Au fost prezentate 10 lucrări la conferințe internaționale (7 prezentări orale [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10], o prezentare invitată [11] și două postere [12, 13]). Pentru prezentările [5, 7] au fost publicate articolele [14], respectiv [15], în jurnalul AIP Conference Proceedings (indexat în ISI Proceedings).

2.3 În cadrul etapei a treia:

- S-au elaborat lucrările [16, 17], publicate în Physics Letters B (zonă roșie), respectiv în Classical and Quantum Gravity (zonă roșie).
- Au fost elaborate lucrările [18, 19], fiind momentan în evaluare la Physical Review C și Physical Review E.
- Au fost prezentate 10 lucrări la conferințe internaționale (9 prezentări orale [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29] și un poster [30]). Pentru

prezentarea [23], lucrarea [20] a fost acceptată pentru publicare în AIP Conference Proceedings (indexat în ISI Proceedings).

Angajat	Realizat	Grad de îndeplinire
Un e-print pe arXiv.org.	O lucrare publicată într-un jurnal indexat în BDI.	Rezultat livrat.
3 lucrări în jurnale cotate ISI:	3 lucrări publicate în jurnale ISI; 3 lucrări trimise spre evaluare la jurnale ISI;	Rezultat livrat.
Prezentarea a două lucrări la conferințe internaționale:	20 de lucrări prezentate la conferințe internaționale (17 prezentări orale și 3 postere); 2 lucrări publicate și una acceptată în AIP Conf. Proc. (indexat în ISI Proceedings).	Rezultat livrat.

3 Raport de activitate

3.1 Obiectivul 1.1. Formalism pentru discretizarea spațiului impulsurilor folosind tetradе

Discretizarea spațiului impulsului definit în raport cu câmpul de tetradе reprezintă elementul de noutate principal pe care îl aducem comunității științifice.

Activitatea 1.1.1. Ecuații de transport folosind tetradе. Utilizând formalismul introdus în lucrarea [31] privind scrierea ecuației Boltzmann folosind un câmp de tetradе, am studiat proprietățile distribuțiilor particulelor de tip Maxwell-Jüttner, Fermi-Dirac și Bose-Einstein cu masă arbitrară aflate în echilibru termodinamic într-o stare de rotație rigidă pe spațiul Minkowski (plat). Pe această temă a fost elaborată lucrarea [1], aceasta reprezentând un punct de plecare pentru activitatea 2.1.1.

3.2 Obiectivul 2.1. Formalism pentru discretizarea spațiului impulsurilor

În continuarea obiectivului 1.1, în cadrul acestui obiectiv am studiat ecuația Boltzmann relativiste scrisă în raport cu câmpul de tetradе. Caracterul acestui obiectiv este unul teoretic, algoritmi pentru rezolvarea ecuației Boltzmann fiind implementați în cadrul obiectivului 2.2.

Activitate 2.1.1. Definirea cuadraturilor pe spațiul impulsurilor în raport cu câmpul de tetradе. Pentru studierea proprietăților ecuației Boltzmann relativiste scrisă în raport cu sistemul de tetradе, am investigat sistemele mezoscopice în rotație utilizând ecuația Boltzmann și câmpurile de tetradе, pornind de la lucrarea [31], precum și de la lucrarea [1], publicată în cadrul obiectivului 1.1 descris anterior. Au rezultat lucrările [2, 15, 16, 17],

precum și prezentările orale [4, 6, 7], respectiv posterele [12, 13]. În lucrările [2, 15] și prezentările [4, 7, 13] am explorat o gamă largă de tetrade pentru curgerile în rotație în jurul unei axe fixe. În lucrarea [16] și prezentările [6, 12] s-au studiat corecțiile cuantice în sistemele mezoscopice în rotație pe spațiul Minkowski. În lucrările [17, 20] și prezentarea [23] s-au studiat corecțiile cuantice în sistemele mezoscopice statice pe spațiul anti-de Sitter. În toate cazurile, analiza clasică (necuantică) a sistemelor mezoscopice a fost făcută utilizând ecuația Boltzmann relativistă scrisă în raport cu câmpurile de tetrade pentru particule având masă arbitrară.

Activitate 2.1.2. Investigarea cuadraturilor pe semi-spațiu. Pentru studierea cuadraturilor pe semi-spațiu implementate în raport cu câmpurile tetradice, am recurs la probleme de curgere a fluidelor nerelativiste. După scrierea ecuației Boltzmann nerelativiste în raport cu câmpurile de tetrade, am continuat cu studiul curgerii Couette circulare între doi cilindri coaxiali în rotație, a transferului termic în geometrii necarteziene și a curgerii într-o cavitate de tip element cilindric cu capac glisant, pentru care este necesară utilizarea cuadraturilor pe semi-spațiu definite în raport cu câmpul de tetrade. Această activitate este premergătoare activităților 2.2.2 și 3.1.1.

3.3 Obiectivul 2.2. Algoritmi pe bază de cuadraturi pentru implementarea ecuației Boltzmann

În cadrul acestui obiectiv, s-a dezvoltat o familie de modele lattice Boltzmann bazate pe cuadraturi de tip Gauss, cu aplicabilitate în simularea curgerilor relativiste ale particulelor fără masă, precum și o metodologie privind implementarea cuadraturilor pe semi-spațiu în cazul curgerilor nerelativiste în geometrii curbe (necarteziene).

Activitate 2.2.1. Aplicarea modelelor lattice Boltzmann (LB) sferice la curgeri relativiste. Pornind de la lucrările [32, 33], în cadrul

acestei activități a fost pusă baza teoretică a modelelor R-SLB (Relativistic Spherical Lattice Boltzmann). Această activitate exploratorie a servit ca bază pentru realizarea activității 2.2.3 privind implementarea algoritmului lattice Boltzmann într-un program de simulare numerică, respectiv a obiectivului 3.1.

Activitate 2.2.2. Investigarea modelelor lattice Boltzmann pe semi-spațiu pentru curgeri relativiste delimitate de frontiere. Întrucât nu am reușit să identificăm o aplicație în cadrul curgerii fluidelor relativiste de suficient interes științific pentru validarea implementării cuadraturilor pe semi-spațiu, am ales să căutăm aplicații în curgerea fluidelor nerelativiste.

Pornind de la rezultatele obținute în cadrul activității 2.1.2 referitoare la formularea ecuației Boltzmann în raport cu câmpurile de tetrade pentru curgerile nerelativiste în geometrii curbe, am formulat un model lattice Boltzmann bazat pe cuadraturile Gauss-Hermite pe semi-axe (pentru direcțiile perpendiculare pe frontieră), respectiv pe toată axa (pentru direcțiile de-a lungul cărora curgerea este omogenă sau periodică). Implementarea acestui program a fost efectuată în cursul activității 2.2.3, discutată mai jos.

Activitate 2.2.3. Dezvoltarea unui program paralel pentru implementarea modelelor lattice Boltzmann relativiste (RLB). Pornind de la cuadraturile dezvoltate în cadrul activităților 2.2.1 și 2.2.2, în cadrul acestei activități au fost dezvoltate două programe lattice Boltzmann: unul pentru simularea curgerilor relativiste ale particulelor fără masă și unul pentru simularea curgerilor nerelativiste în geometrii curbe. Întrucât curgerile relativiste studiate în cadrul acestui proiect au fost exclusiv unidimensionale, programul aferent a fost dezvoltat în regim uniprocessor folosind limbajul C++. Programul pentru curgerile nerelativiste, dezvoltat în limbajul C, utilizează librăria PETSc [34, 35] pentru calculul paralel.

Rezultatele preliminare obținute în cadrul acestei activități referitoare la curgerile relativiste au fost diseminate prin prezentările orale [5, 10, 11].

3.4 Obiectivul 3.1. Aplicarea metodologiei dezvoltate la Obiectivul 2.2 la curgeri relativiste

Acest obiectiv este dedicat validării metodelor dezvoltate în cadrul obiectivelor anterioare folosind rezultate disponibile în literatură. De asemenea, în cadrul acestui obiectiv am utilizat programele dezvoltate în cadrul activității 2.2.3 pentru aplicații de interes fizic, mai exact: studiul coeficienților de transport al fluidelor relativiste în contextul atenuării unei unde longitudinale [18]; propagarea undelor de șoc cu simetrii cilindrică și sferică [5, 24]; transferul termic în geometrii necarteziane [21, 29]; curgerea într-o cavitate de tip element cilindric antrenată de către cilindrul interior [27].

Activitate 3.1.1. Compararea rezultatelor RLB cu cele din literatură. Pentru a valida metoda lattice Boltzmann dezvoltată pentru simularea curgerilor relativiste ale particulelor de masă nulă, am efectuat simularea propagării unei unde de șoc plane, având ca direcție de propagare axa z , curgerea fiind omogenă după direcțiile x și y . Am validat metoda noastră prin comparație cu soluții analitice corespunzătoare regimurilor ideal (vâscozitate și conductivitate termică neglijabile) și balistic (termen de coliziune neglijabil). În regimul intermediar (vâscozitate neneglijabilă, respectiv regimul de tranziție către regimul balistic) am validat rezultatele noastre prin comparație cu rezultatele obținute folosind metoda BAMPS (Boltzmann Approach to Multi-Parton Scattering) [36, 37, 38]. Rezultatele noastre au fost diseminate prin prezentări orale [5, 11, 10, 22, 24] și de tip poster [30]. De asemenea, aceste rezultate au fost trimise spre publicare sub forma lucrării [3], care momentan este în curs de evaluare.

Am continuat validarea metodei dezvoltate în lucrarea [3] prin analiza atenuării unei unde longitudinale în contextul ecuației Boltzmann relativiste. Prin comparația rezultatelor numerice cu cele obținute analitic prin rezolvarea ecuațiilor Navier-Stokes relativiste de ordinul 1 și 2, am reușit să demonstrăm că metoda noastră capturează cu o bună precizie atenuarea disipativă

(datorată vâscozității și conductivității termice) și dispersivă (în regim balistic) a acestui tip de unde, rezultatele fiind trimise spre publicare [18]. De asemenea, aceste rezultate au fost diseminate prin prezentarea orală [24].

Pentru validarea implementării cuadraturilor pe semi-spațiu în cazul curgerilor nerelativiste, am efectuat simulări ale curgerii Couette circulare între doi cilindri coaxiali în rotație. În regimurile hidrodinamic și balistic am validat schema folosind soluțiile analitice ale ecuațiilor Navier-Stokes, respectiv a ecuației Boltzmann în regim balistic. În regimul de tranziție (grad de rarefacție mediu și crescut), am validat rezultatele noastre prin comparație cu rezultatele publicate în lucrarea [39]. Rezultatele au fost diseminate comunității academice prin prezentările orale [21, 26, 27] și se regăsesc în lucrarea [19], care momentan este în curs de evaluare.

Tot aferentă metodei descrisă anterior, am considerat o aplicație a metodei triadelor pentru investigarea transferului termic între două corpuri la temperaturi diferite. Astfel, am considerat transferul termic între două plăci plan-paralele, doi cilindri coaxiali și două sfere concentrice și am utilizat rezultatele din literatură pentru validare [40, 41]. Rezultatele preliminare au fost prezentate la conferința ICMES-2017 [29].

Activitate 3.1.2. Aplicarea modelelor RLB la curgeri în teoria relativității generale (TRG). Prima aplicație pe care am abordat-o a fost studiul evoluției unui fluid în cursul expansiunii longitudinale invariante la boosturi (curgerea Bjorken). Descrierea acestei curgeri este echivalentă cu o curgere staționară pe spațiul Milne. Rezultatele obținute pe acest spațiu sunt incluse în lucrarea [3].

Expansiunea longitudinală reprezintă un model propus de Bjorken [42] pentru descrierea evoluției plasmei quarc-gluon în urma ciocnirii a două nuclee cu energii foarte mari (astfel de experimente se fac în acceleratoarele de particule de înaltă energie). De asemenea de interes este curgerea solitonă descrisă printr-o stare statică în spațiul $\text{adS}_2 \otimes S_2$, care este echivalentă

(printr-o transformare conformă a metricii) unei expansiuni sferice pe spațiul Minkowski [43]. Programul dezvoltat în cadrul acestui proiect a fost adaptat la simularea curgerii pe acest spațiu, rezultatele preliminare fiind prezentate la conferința DSFD-2017 [25].

3.5 Concluzii și posibile extensii

Pe parcursul acestui proiect, au fost puse bazele unei metode pentru construirea modelelor lattice Boltzmann pentru simularea numerică a ecuației Boltzmann relativistă pe spații curbe folosind câmpuri tetradice. Totodată, am considerat și extensia experienței dobândite în contextul relativist la probleme nerelativiste, punând bazele unei metode de descriere a curgerilor rarefiate în geometrii curbe folosind câmpuri triadice.

Pe viitor, aceste modele pot fi extinse la studiul curgerilor relevante din punct de vedere astrofizic (de tip acreție pe gaură neagră sau stea neutronică, propagarea jeturilor relativiste emise de stelele neutronice sau exploziile de supernovă), cosmologic (simularea evoluției perturbațiilor din spectrul radiației de fond) sau al evoluției plasmei quarc-gluon, prin includerea mai multor specii de particule (fiind necesare statisticile Fermi-Dirac și Bose-Einstein pentru descrierea quarcurilor, respectiv a gluonilor).

În secțiunile următoare urmează o scurtă descriere în limbaj tehnic a rezultatelor obținute pe parcursul acestui proiect.

4 Formalismul tetradelor aplicat ecuației Boltzmann

4.1 Ecuația Boltzmann în formă conservativă

Ecuația Boltzmann pe un spațiu curb descris de metrica $g_{\mu\nu}$ se scrie [45]:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^i_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \frac{\partial f}{\partial p^i} = J[f], \quad (1)$$

unde $f \equiv f(x^\mu, p^i)$ reprezintă funcția de distribuție a particulelor de impuls p^μ , $J[f]$ reprezintă termenul de coliziune iar $\Gamma^\mu_{\nu\kappa} = g^{\mu\lambda} \Gamma_{\lambda\nu\kappa}$ sunt simbolurile Christoffel [46]:

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}). \quad (2)$$

În spațiul impulsurilor, componenta p^0 nu este independentă, ci ea este determinată din condiția de fâșie de masă:

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2. \quad (3)$$

Drept urmare, p^0 poate fi scris ca [45]:

$$p^0 = \frac{p_0 - g_{0i} p^i}{g_{00}}, \quad p_0 = -\sqrt{-m^2 g_{00} - (g_{00} g_{ij} - g_{0i} g_{0j}) p^i p^j}. \quad (4)$$

Pe un spațiu arbitrar, p^0 este o funcție complicată nu doar de componentele spațiale p^i ale impulsului, ci și de coordonate prin intermediul metricii.

O simplificare considerabilă apare atunci când se introduce tetrada ortogonală $e_{\hat{\alpha}} \equiv e_{\hat{\alpha}}^\mu \partial_\mu$, definită prin:

$$g_{\mu\nu} e_{\hat{\alpha}}^\mu e_{\hat{\beta}}^\nu = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}, \quad (5)$$

unde $\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ este metrica spațiului Minkowski. Definind unu-

formele $\omega^{\hat{\alpha}}$ asociate vectorilor $e_{\hat{\alpha}}$ din tetradă prin:

$$\langle \omega^{\hat{\alpha}}, e_{\hat{\beta}} \rangle = \omega_{\mu}^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\beta}}^{\mu} = \delta^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}, \quad \omega_{\mu}^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\alpha}}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu}, \quad (6)$$

rezultă relația:

$$\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \omega_{\mu}^{\hat{\alpha}} \omega_{\nu}^{\hat{\beta}} = g_{\mu\nu}. \quad (7)$$

În raport cu câmpul de tetrade, condiția (3) devine:

$$\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} p^{\hat{\alpha}} p^{\hat{\beta}} = -(p^{\hat{0}})^2 + \mathbf{p}^2 = -m^2, \quad (8)$$

unde componentele tetradice $p^{\hat{\alpha}}$ se calculează folosind:

$$p^{\hat{\alpha}} = \omega_{\mu}^{\hat{\alpha}} p^{\mu}, \quad (9)$$

iar componenta $p^{\hat{0}}$ se determină simplu, doar în funcție de $p = |\mathbf{p}|$:

$$p^{\hat{0}} = \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (10)$$

Ecuția Boltzmann (1) scrisă în raport cu câmpul de tetrade devine [31]:

$$p^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\alpha}}^{\mu} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\hat{i}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} p^{\hat{\alpha}} p^{\hat{\beta}} \frac{\partial f}{\partial p^{\hat{i}}} = J[f], \quad (11)$$

unde coeficienții de conexiune $\Gamma^{\hat{\sigma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta^{\hat{\sigma}\hat{\gamma}} \Gamma_{\gamma\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ sunt dați prin relația:

$$\Gamma_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \frac{1}{2}(c_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}\hat{\beta}} + c_{\hat{\gamma}\hat{\beta}\hat{\alpha}} - c_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}}). \quad (12)$$

Coeficienții Cartan $c_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\sigma}} = \eta^{\hat{\sigma}\hat{\gamma}} c_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}}$ se calculează folosind relația [46]:

$$c_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\gamma}} = \omega_{\mu}^{\hat{\gamma}} (e_{\hat{\alpha}}^{\nu} \partial_{\nu} e_{\hat{\beta}}^{\mu} - e_{\hat{\beta}}^{\nu} \partial_{\nu} e_{\hat{\alpha}}^{\mu}). \quad (13)$$

Ecuția (11) are dezavantajul că ascunde legile de conservare ($\nabla_{\hat{\alpha}} N^{\hat{\alpha}} = 0$, $\nabla_{\hat{\sigma}} T^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} = 0$). Acest dezavantaj se vede și în implementările numerice,

unde erorile numerice se reflectă în pierderi de masă sau energie, de regulă proporționale cu o putere a pasului de rețea, respectiv a pasului de timp. Pentru remedierea acestui neajuns, ec. (11) poate fi scrisă în formă conservativă [2, 31]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}e^\mu_{\hat{\alpha}}p^{\hat{\alpha}}f) - \frac{p^{\hat{0}}}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial}{\partial p^{\tilde{i}}}\left(P^{\tilde{i}}_{\hat{i}}\Gamma^{\hat{i}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\frac{p^{\hat{\alpha}}p^{\hat{\beta}}}{p^{\hat{0}}}f\sqrt{\lambda}\right) = J[f], \quad (14)$$

unde $p^{\tilde{i}} \equiv p^{\tilde{i}}(p^{\hat{i}})$ reprezintă o parametrizare arbitrară a spațiului impulsurilor în funcție de componentele tetradice $p^{\hat{i}}$ ale acestuia (un exemplu este parametrizarea în coordonate sferice prezentate în sec. 4.3. Matricea $P^{\tilde{i}}_{\hat{i}} \equiv \partial p^{\tilde{i}}/\partial p^{\hat{i}}$ reprezintă derivatele componentelor $p^{\tilde{i}}$ în raport cu $p^{\hat{i}}$.

4.2 Termenul de coliziune $J[f]$

Să începem prin a investiga ecuațiile macroscopice care derivă din ecuația Boltzmann relativistă. Pentru aceasta, se introduc fluxul de particule N^μ și tensorul energie impuls $T^{\mu\nu}$ ca momente ale funcției de distribuție:

$$N^\mu = \sqrt{-g} \int \frac{d^3p}{-p_0} f p^\mu, \quad T^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \int \frac{d^3p}{-p_0} f p^\mu p^\nu. \quad (15)$$

Din definițiile de mai sus rezultă că N^μ și $T^{\mu\nu}$ au o dependență de coordonate atât prin f cât și prin termenul $-p_0$ de la numitorul integrandului. Din aceste motive, definirea unei cuadraturi care să recupereze exact integralele din ec. (15) este dificilă (mai multe detalii despre cuadraturi se găsesc în sec. 4.3). Luând în considerare trecerea de la componentele p^μ la componentele tetradice $p^{\hat{\alpha}}$, ec. (15) devine:

$$N^{\hat{\alpha}} = \int \frac{d^3p}{p^{\hat{0}}} f p^{\hat{\alpha}}, \quad T^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} = \int \frac{d^3p}{p^{\hat{0}}} f p^{\hat{\alpha}} p^{\hat{\sigma}}. \quad (16)$$

Se vede că acum integrarea pe spațiul impulsurilor nu mai prezintă o dependență intrinsecă de coordonate. Aceste ecuații se pretează calculului folosind cuadraturi de tip Gauss, după cum vom arăta în sec. 4.3.

Înmulțind ec. (14) cu $1/p^{\hat{0}}$, respectiv cu $p^{\hat{\sigma}}/p^{\hat{0}}$ și integrând după d^3p pe întreg spațiul impulsurilor, se poate arăta că rezultă ecuațiile:

$$\nabla_{\hat{\alpha}} N^{\hat{\alpha}} = \int \frac{d^3p}{p^{\hat{0}}} J[f], \quad \nabla_{\hat{\alpha}} T^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} = \int \frac{d^3p}{p^{\hat{0}}} J[f] p^{\hat{\sigma}}. \quad (17)$$

Pentru a asigura conservarea numărului de particule și a tensorului energie-impuls, este necesar ca integralele din partea dreaptă a relațiilor de mai sus să se anuleze:

$$\int \frac{d^3p}{p^{\hat{0}}} J[f] = 0, \quad \int \frac{d^3p}{p^{\hat{0}}} J[f] p^{\hat{\sigma}} = 0. \quad (18)$$

Astfel, mărimile $\{1, p^{\hat{\sigma}}\}$ poartă numele de invarianti de coliziune.

Termenul de coliziune $J[f]$ controlează interacțiunile dintre particulele constituate. În formularea lui Boltzmann, $J[f]$ ia în calcul doar interacțiunile binare approximate ca fiind punctuale și instantanee. Ipoteza cea mai importantă făcută de Boltzmann cu ajutorul căreia a reușit să demonstreze legea a doua a termodinamicii a fost cea a haosului molecular, conform căreia funcțiile de distribuție ale particulelor care interacționează sunt complet necorelate.

În general, calcularea termenului $J[f]$ este foarte dificilă. De aceea, este foarte convenabil ca $J[f]$ să fie modelat printr-o expresie mai simplă. În comunitatea lattice Boltzmann, dar și în comunitatea celor care studiază teoria cinetică a gazelor, este foarte comună aproximația timpului de relaxare. În regim relativist, două astfel de aproximații au devenit uzuale: cea a lui Marle [47] și cea propusă de Anderson și Witting [48]:

$$J[f]_{\text{Marle}} = -\frac{m}{\tau}(f - f^{(\text{eq})}), \quad J[f]_{\text{A-W}} = \frac{p \cdot u}{\tau}(f - f^{(\text{eq})}), \quad (19)$$

unde $f^{(\text{eq})}$ reprezintă distribuția care descrie echilibrul termodinamic local:

$$f^{(\text{eq})} = Z \left[\exp \left(-\frac{p \cdot u_{(\text{eq})} + \mu_{(\text{eq})}}{T_{(\text{eq})}} \right) + \epsilon \right], \quad (20)$$

unde $u^{\hat{\alpha}}$ este viteza macroscopică a fluidului, T este temperatura locală, μ reprezintă potențialul chimic, Z reprezintă numărul de grade de libertate ($Z = 16$ în cazul gluonilor), iar ϵ ia valorile 0, 1 și -1 pentru statisticile Maxwell-Jüttner, Fermi-Dirac, respectiv Bose-Einstein.

Termenul de coliziune Marle reprezintă extensia directă a aproximației BGK, propusă de Bhatnagar, Gross și Krook [49], de la regimul nerelativist la cel relativist. Asigurarea păstrării invariantilor de coliziune (18) impune pentru termenul de coliziune Marle ecuațiile:

$$\frac{1}{m} T^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}} = \frac{1}{m} T^{\hat{\alpha}}_{(\text{eq});\hat{\alpha}}, \quad N^{\hat{\alpha}} = N^{\hat{\alpha}}_{(\text{eq})}, \quad (21)$$

în timp ce în cazul termenului de coliziune Anderson-Witting avem:

$$N^{\hat{\alpha}} u_{\hat{\alpha}} = N^{\hat{\alpha}}_{(\text{eq})} u_{\hat{\alpha}}, \quad T^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} u_{\hat{\sigma}} = T^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}_{(\text{eq})} u_{\hat{\sigma}}. \quad (22)$$

În general, se poate arăta că $N^{\hat{\alpha}}_{(\text{eq})}$ și $T^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}_{(\text{eq})}$ au întotdeauna forma:

$$N^{\hat{\alpha}}_{(\text{eq})} = n_{(\text{eq})} u^{\hat{\alpha}}_{(\text{eq})}, \quad T^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}_{(\text{eq})} = E_{(\text{eq})} u^{\hat{\alpha}}_{(\text{eq})} u^{\hat{\sigma}}_{(\text{eq})} + P \Delta^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}_{(\text{eq})}, \quad (23)$$

unde $\Delta^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} \equiv \Delta^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}(u) = \eta^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} + u^{\hat{\alpha}} u^{\hat{\sigma}}$ reprezintă proiectorul pe hipersuprafața ortogonală pe vectorul u .

În hidrodinamica relativistă, viteza macroscopică $u^{\hat{\alpha}}$ nu reprezintă o cantitate univoc definită, ea fiind legată de transferul macroscopic de particule și deci de energie. Deoarece în relativitatea specială, masa și energia sunt corelate, apare o ambiguitate în definirea vitezei macroscopice, care poate juca un rol similar cu cel al fluxului de căldură $q^{\hat{\alpha}}$. Cu toate acestea, există o diferență fundamentală între $u^{\hat{\alpha}}$ și $q^{\hat{\alpha}}$, și anume $u^{\hat{\alpha}}$ este întotdeauna un

vector temporal ($u^2 = -1$), în timp ce $q^{\hat{\alpha}}$ este spațial ($q^2 \geq 0$), acesta fiind ortogonal pe u :

$$q \cdot u = q_{\hat{\alpha}} u^{\hat{\alpha}} = 0. \quad (24)$$

În general, $N^{\hat{\alpha}}$ se poate pune sub forma [16, 38]:

$$N^{\hat{\alpha}} = n u^{\hat{\alpha}} + V^{\hat{\alpha}}, \quad (25)$$

unde $n = -u_{\hat{\alpha}} N^{\hat{\alpha}}$ este densitatea de particule iar fluxul de particule în sistemul propriu $V^{\hat{\alpha}}$ este:

$$V^{\hat{\alpha}} = \Delta^{\hat{\alpha}}_{\hat{\sigma}} N^{\hat{\sigma}}. \quad (26)$$

Descompunerea lui $T^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}$ în raport cu $u^{\hat{\alpha}}$ se face unic după cum urmează:

$$T^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} = E u^{\hat{\alpha}} u^{\hat{\sigma}} + (P + \bar{\omega}) \Delta^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} + W^{\hat{\alpha}} u^{\hat{\sigma}} + W^{\hat{\sigma}} u^{\hat{\alpha}} + \pi^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}, \quad (27)$$

unde presiunea dinamică $\bar{\omega}$, fluxul de energie în sistemul propriu $W^{\hat{\alpha}}$ și deviatorul de presiune $\pi^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}$, împreună cu $V^{\hat{\alpha}}$, reprezintă termeni de neechilibru care nu se regăsesc în forma lui $N^{\hat{\alpha}}_{(\text{eq})}$ și $T^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}_{(\text{eq})}$. În fine, fluxul de căldură $q^{\hat{\alpha}}$ se definește prin [16, 38]:

$$q^{\hat{\alpha}} = W^{\hat{\alpha}} - \frac{E + P}{n} V^{\hat{\alpha}}. \quad (28)$$

În continuare vom discuta despre două repere. Primul poartă numele de reperul Eckart, cunoscut și sub numele de reperul particulei [45, 50, 51], deoarece $u^{\hat{\alpha}}_e$ este definită ca versorul paralel cu $N^{\hat{\alpha}}$:

$$N^{\hat{\alpha}} = n_e u^{\hat{\alpha}}_e, \quad (29)$$

astfel că fluxul de particule în sistemul propriu este nul: $V^{\hat{\alpha}}_e = 0$. Conform ec. (28), $q^{\hat{\alpha}}_e = W^{\hat{\alpha}}_e$, unde $W^{\hat{\alpha}}_e$ este în principiu arbitrar, astfel încât observatorii vor detecta în sistemul propriu al reperului Eckart un flux nenul de căldură. Comparând ec. (23) și (29), se vede că relația (21) impune ca viteza

macroscopică $u_{(\text{eq})}^{\hat{\alpha}}$ să fie egală cu viteza din reperul Eckart:

$$u_{(\text{eq})}^{\hat{\alpha}} = u_e^{\hat{\alpha}}. \quad (30)$$

Mai departe, relația dintre $T^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}}$ și $T^{\hat{\alpha}}_{(\text{eq});\hat{\alpha}}$ (21) definește temperatura de echilibru $T_{(\text{eq})}$.

O problemă a termenului de coliziune al lui Marle este că în cazul masei nule, $J[f]_{\text{Marle}} = 0$, ceea ce este nefizic deoarece chiar și particulele fără masă prezintă interacțiuni (un exemplu ar fi cel al gluonilor, care interacționează copios prin intermediul forței tari). Pentru a rezolva ecuațiile (22) referitoare la păstrarea invariantilor de coliziune, trebuie să discutăm despre cel de-al doilea reper: reperul Landau, supranumit și reperul energiei [45, 50, 52]. În acest caz, viteza macroscopică $u_L^{\hat{\alpha}}$ se definește ca fiind vectorul propriu al lui $T^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}}$ corespunzător valorii proprii reale și pozitive care va reprezenta energia Landau E_L :

$$T^{\hat{\alpha}}_{\hat{\sigma}} u_L^{\hat{\sigma}} = -E_L u_L^{\hat{\alpha}}. \quad (31)$$

Din definiția de mai sus rezultă că fluxul de căldură în sistemul propriu definit de reperul Landau se anulează ($W_L^{\hat{\alpha}} = 0$), însă fluxul de particule în sistemul propriu va fi în general nenul, având expresia: $V_L^{\hat{\alpha}} = -\frac{n_L}{E_L + P_L} q_L^{\hat{\alpha}}$. Deoarece, conform ec. (23), $T^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}_{(\text{eq})} u_{(\text{eq});\hat{\sigma}} = -E_{(\text{eq})} u_{(\text{eq})}^{\hat{\alpha}}$, rezultă că păstrarea invariantilor de coliziune (22) impune ca $u^{\hat{\alpha}} = u_{(\text{eq})}^{\hat{\alpha}} = u_L^{\hat{\alpha}}$ iar $n_{(\text{eq})} = n_L$ și $E_{(\text{eq})} = E_L$.

4.3 Tehnici de cuadratură

Cuadraturile reprezintă metode de evaluare a unor integrale folosind sume ale unui număr finit de termeni. Pe noi ne interesează evaluarea integralelor (16) pentru obținerea fluxului de particule și a tensorului energie-impuls. Pentru aceasta, introducem coordonatele sferice $p^{\tilde{i}} \in \{p, \theta, \varphi\}$ în spațiul impulsurilor, după cum urmează:

$$p^{\hat{1}} = p \sin \theta \cos \varphi, \quad p^{\hat{2}} = p \sin \theta \sin \varphi, \quad p^{\hat{3}} = p \cos \theta, \quad (32)$$

în timp ce $p^{\hat{0}} = \sqrt{p^2 + m^2}$. Integralele din ec. (16) se pot factoriza în raport cu coordonatele sferice din spațiul impulsurilor după cum urmează:

$$\begin{aligned} N^{\hat{\alpha}} &= \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{p^{\hat{0}}} \int_{-1}^1 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi f p^{\hat{\alpha}}, \\ T^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} &= \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{p^{\hat{0}}} \int_{-1}^1 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi f p^{\hat{\alpha}} p^{\hat{\sigma}}, \end{aligned} \quad (33)$$

unde $\xi = \cos \theta$. Pe partea unghiulară, integrala după φ se poate recupera folosind cuadratura propusă de Mysovskih [32, 33, 53]:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi (\sin \varphi)^m (\cos \varphi)^n \simeq \sum_{i=1}^{Q_\varphi} w_i^\varphi (\sin \varphi_i)^m (\cos \varphi_i)^n, \quad (34)$$

unde Q_φ reprezintă numărul de puncte de cuadratură distribuite echidistant în intervalul $[0, 2\pi]$: $\varphi_i = \varphi_0 + 2\pi(i-1)/Q_\varphi$ (φ_0 este o constantă arbitrară), în timp ce ponderile de cuadratură w_i^φ sunt:

$$w_i^\varphi = \frac{2\pi}{Q_\varphi}. \quad (35)$$

Egalitatea din ec. (34) este exactă când Q_φ satisface:

$$Q_\varphi > n + m. \quad (36)$$

Integrarea după ξ se face folosind cuadratura Gauss-Legendre:

$$\int_{-1}^1 d\xi g_s(\xi) \simeq \sum_{j=1}^{Q_\xi} w_j^\xi g_s(\xi_j), \quad (37)$$

unde $g_s(\xi)$ este un polinom de ordinul s iar Q_ξ reprezintă numărul de puncte de cuadratură alese ca fiind rădăcinile polinomului legendre $P_{Q_\xi}(\xi)$ de ordinul

Q_ξ . Ponderile de cuadratură se calculează folosind formula [54]:

$$w_j^\xi = \frac{2(1 - \xi^2)}{[(Q_\xi + 1)P_{Q_\xi+1}(\xi_j)]^2}. \quad (38)$$

Egalitatea din ec. (37) este exactă dacă

$$2Q_\xi > s. \quad (39)$$

Pentru efectuarea integralei după p , distingem două cazuri importante: cel al particulelor cu masă nulă și cel al particulelor cu masă nenulă. În primul caz, $p^{\hat{0}} = p$, astfel că se poate aplica cuadratura Gauss-Laguerre forțând un factor e^{-p/T_0} în integrand (T_0 reprezintă o temperatură de referință utilizată pentru adimensionalizarea argumentului exponențialei), după cum urmează:

$$\int_0^\infty dp p^2 e^{-p/T_0} g_s(p) = \sum_{k=1}^{Q_L} w_k^L g_s(p_k), \quad (40)$$

unde $g_s(p)$ este un polinom de ordinul s în p , Q_L este numărul de puncte de cuadratură alese ca și rădăcini ale polinomului Legendre de tipul al doilea și de ordin Q_L , $L_{Q_L}^{(2)}(p_k/T_0) = 0$, în timp ce ponderile de cuadratură se calculează folosind următoarea formulă [3, 54, 55]:

$$w_k^L = \frac{(Q_L + 1)(Q_L + 2)\bar{p}_k}{[(Q_L + 1)L_{Q_L+1}^{(2)}(\bar{p}_k)]^2}, \quad (41)$$

unde $\bar{p}_k = p_k/T_0$. În cazul al doilea $m \neq 0$, amintim studiul [56], în care se introduce o nouă parametrizare:

$$p^{\hat{0}} = m \cosh \zeta, \quad p = m \sinh \zeta, \quad (42)$$

astfel că integrala (40) se înlocuiește cu:

$$\int_0^\infty d\zeta e^{-m \cosh \zeta / T_0} m^2 (1 - \cosh^2 \zeta) g_s(\cosh \zeta) = \sum_{k=1}^{Q_\zeta} w_k^\zeta g_s(\cosh \zeta_k). \quad (43)$$

În acest caz, se construiește o bază de polinoame ortogonale $R_\ell(\zeta)$, primele astfel de polinoame având expresiile [56]:

$$\begin{aligned} R_0(\zeta) &= 1, \\ R_1(\zeta) &= \cosh \zeta - \frac{K_2(z_0)}{K_1(z_0)}, \\ R_2(\zeta) &= \frac{6K_1[(4 + z_0^2)K_1^2 - z_0^2 K_0^2]}{z_0(z_0^3 K_0^3 + 8z_0^2 K_0^2 K_1 + 14z_0 K_0 K_1^2 + 2(2 - z_0^2)K_1^3 - z_0^3 K_2^3)} R_1(\zeta) \\ &\quad + \cosh^2 \zeta - \frac{3K_2 + z_0 K_1}{z_0 K_1}, \end{aligned} \quad (44)$$

unde $z_0 = m/T_0$. Valorile discrete ζ_k reprezintă rădăcinile polinomului $R_{Q_\zeta}(\zeta)$, în timp ce ponderile de cuadratură se găsesc rezolvând ecuațiile:

$$\sum_{k=1}^{Q_\zeta} w_k^\zeta R_0(\zeta_k) = \frac{K_1(z_0)}{z_0}, \quad \sum_{k=1}^{Q_\zeta} w_k^\zeta R_n(\zeta_k) = 0, \quad (45)$$

unde $1 \leq n < Q_\zeta$. Momentan, aplicarea cuadraturii descrise mai sus pentru curgerile în care masa constituenților este nenulă nu a fost finalizată, de aceea în continuare vom discuta exclusiv cazul particulelor fără masă, pentru care au fost deja trimise rezultatele spre publicare.

Compatibilitatea dintre ecuația Boltzmann (14) și metodele de cuadratură descrise mai sus se poate verifica făcând următoarea dezvoltare polino-

mială a lui f și $f^{(\text{eq})}$:

$$\begin{pmatrix} f \\ f^{(\text{eq})} \end{pmatrix} = \frac{e^{-p/T_0}}{T_0^3} \sum_{\ell=0}^{Q_L-1} \frac{1}{(\ell+1)(\ell+2)} \sum_{s=0}^{Q_\xi-1} \frac{2s+1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} A_{\ell,s,0} \\ A_{\ell,s,0}^{(\text{eq})} \end{pmatrix} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\lfloor Q_\varphi/2 \rfloor - 1} \left(\begin{pmatrix} A_{\ell,s,m} \\ A_{\ell,s,m}^{(\text{eq})} \end{pmatrix} \cos m\varphi + \begin{pmatrix} B_{\ell,s,m} \\ B_{\ell,s,m}^{(\text{eq})} \end{pmatrix} \sin m\varphi \right) \right], \quad (46)$$

unde coeficienții de expansiune $A_{\ell,s,m}$ și $B_{\ell,s,m}$, respectiv $A_{\ell,s,m}^{(\text{eq})}$ și $B_{\ell,s,m}^{(\text{eq})}$, se obțin după cum urmează:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\ell,s,m} \\ \mathcal{A}_{\ell,s,m}^{(\text{eq})} \end{pmatrix} = \int_0^\infty dp L_\ell^{(2)}(p/T_0) \int_{-1}^1 d\xi P_s(\xi) \int_0^{2\pi} d\varphi \cos m\varphi \begin{pmatrix} f \\ f^{(\text{eq})} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{\ell,s,m} \\ \mathcal{B}_{\ell,s,m}^{(\text{eq})} \end{pmatrix} = \int_0^\infty dp L_\ell^{(2)}(p/T_0) \int_{-1}^1 d\xi P_s(\xi) \int_0^{2\pi} d\varphi \sin m\varphi \begin{pmatrix} f \\ f^{(\text{eq})} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

După discretizarea spațiului impulsurilor, $(p, \theta, \varphi) \rightarrow (p_k, \theta_j, \varphi_i)$ și coeficienții $A_{\ell,s,m}$ și $B_{\ell,s,m}$ se obțin folosind metode de cuadratură:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\ell,s,m} \\ \mathcal{A}_{\ell,s,m}^{(\text{eq})} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{Q_L} \sum_{j=1}^{Q_\xi} \sum_{i=1}^{Q_\varphi} L_\ell^{(2)}(p_k/T_0) P_s(\xi_j) \cos m\varphi_i \begin{pmatrix} f_{ijk} \\ f_{ijk}^{(\text{eq})} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{\ell,s,m} \\ \mathcal{B}_{\ell,s,m}^{(\text{eq})} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{Q_L} \sum_{j=1}^{Q_\xi} \sum_{i=1}^{Q_\varphi} L_\ell^{(2)}(p_k/T_0) P_s(\xi_j) \sin m\varphi_i \begin{pmatrix} f_{ijk} \\ f_{ijk}^{(\text{eq})} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Coeficienții de expansiune ai lui $f^{(\text{eq})}$ pot fi în principiu obținuți analitic, expresia acestora pentru cazul statisticii Maxwell-Jüttner fiind dată în lucrarea [3].

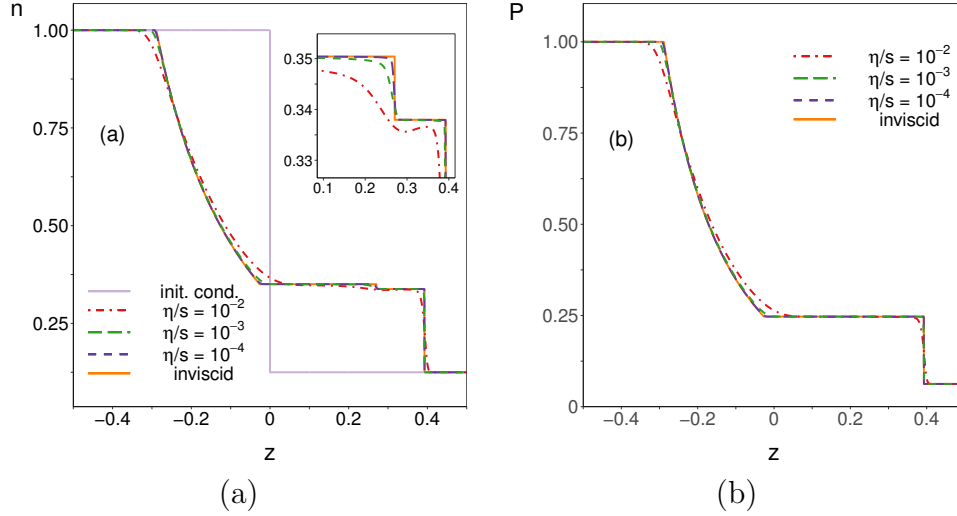


Figura 1: Profilul densității (a) și profilul presiunii (b) la momentum de timp $t = 0.5$ în propagarea undei de șoc într-un mediu fluid cu difusivitate redusă (limita fluidului ideal). Se pot distinge clar unda de rarefacție, discontinuitatea de contact (în cazul densității), platoul central (în cazul presiunii) și frontul de undă. (Graficele sunt reproduse din lucrarea [3]).

5 Curgeri relativiste

În această secțiune vor fi prezentate rezultatele obținute de grupul nostru referitoare la aplicarea metodei lattice Boltzmann descrisă în sec. 4. În subsec. 5.1 vom prezenta validarea metodei în contextul propagării unei unde de șoc plane. În subsec. 5.2 va fi discutată propagarea undelor de șoc cu simetrie cilindrică și sferică. În subsec. 5.3 va fi prezentată validarea metodei considerând problema atenuării undelor longitudinale. În fine, subsec. 5.4 este dedicată prezentării rezultatelor obținute în cazul curgerilor pe spații curbe.

5.1 Unde de șoc plane

În lucrările [3, 14], echipa noastră a propus familii de modele lattice Boltzmann (LB) pentru studierea curgerilor relativiste ale particulelor fără masă.

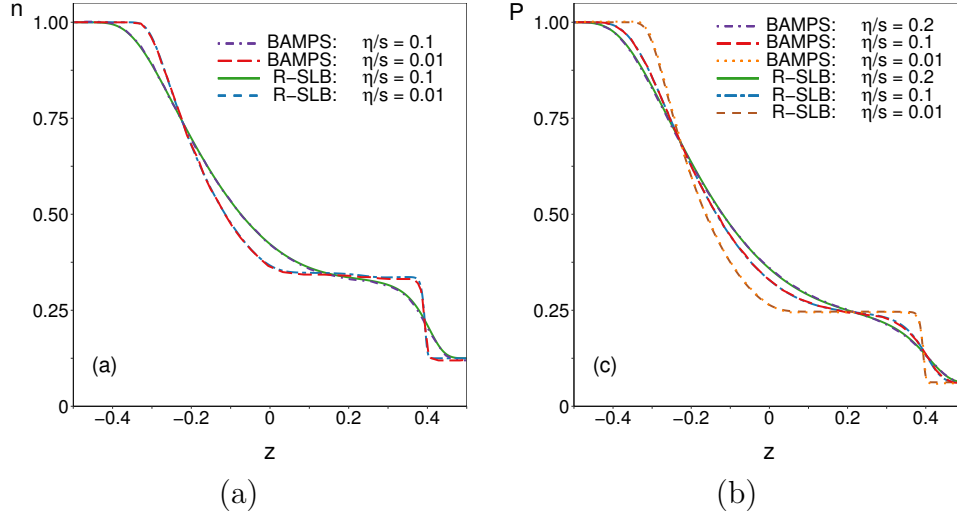


Figura 2: Profilul densității (a) și profilul presiunii (b) la momentum de timp $t = 0.5$ în propagarea undei de șoc într-un mediu fluid vâscos. Se poate observa efectul vâscozității de a netezi profilele, applatizând frontul de undă și discontinuitatea de contact. (Graficele sunt reproduse din lucrarea [3]).

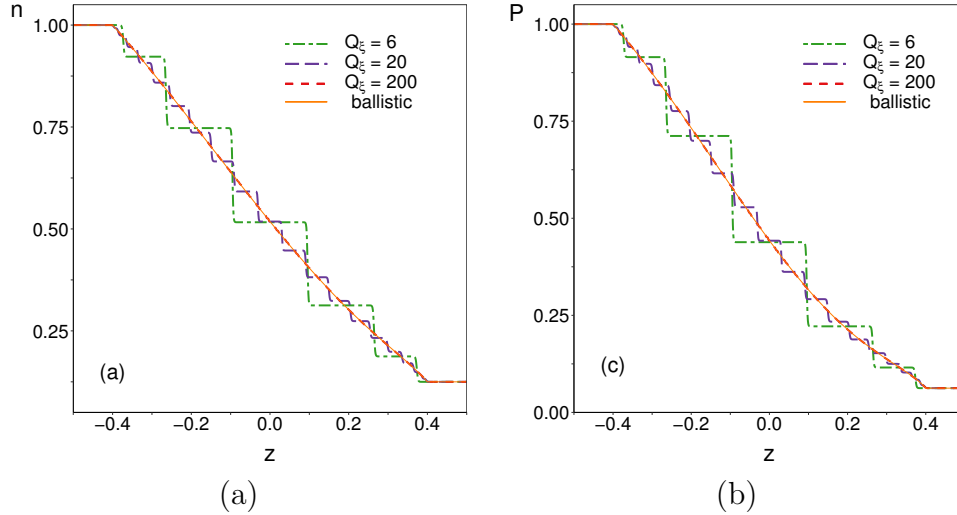


Figura 3: Profilele densității (a) și presiunii (b) la $t = 0.5$ în limita balistică. Se poate vedea că, deoarece particulele călătoresc fără a se ciocni între ele, se formează un număr de paliere egal cu ordinul cuadraturii Q_ξ . În cazul când Q_ξ e mare, tranziția dintre paliere este netedă și rezultatul simulării reproduce formula analitică. (Graficele sunt reproduse din lucrarea [3]).

La baza construcției modelelor stau cuadraturile Gauss-Laguerre și Gauss-Legendre descrise în subsec. 4.3.

Pentru validarea modelelor astfel introduse, am efectuat simulări ale unui caz particular a problemei Riemann, denumită problema lui Sod. Configurația inițială constă în două incinte separate printr-o membrană subțire, în cea din stânga găsim un fluid mai dens decât cel din incinta dreaptă. La momentul inițial $t = 0$, membrana este scoasă iar fluidul din partea stângă se propagă sub forma unei unde de șoc în incinta din dreapta. În această situație, ecuația Boltzmann relativistă (14) se simplifică considerabil:

$$\partial_t f + \xi \partial_z f = -\frac{\gamma_L}{\tau} (1 - \beta_L \xi) (f - f^{(\text{eq})}), \quad (49)$$

unde $\xi = p^z/p$, β_L este viteza Landau, γ_L este factorul Lorentz asociat lui β_L iar timpul de relaxare τ este calculat folosind următoarea formulă [3]:

$$\tau \simeq \frac{5}{52T} \left(\frac{\eta}{s} \right)_{\text{Planck}} \left[4 - \ln \left(\frac{n}{T^3} \right) \right], \quad (50)$$

unde raportul $(\eta/s)_{\text{Planck}}$ este o constantă iar n și T sunt adimensionalizate în raport cu valorile densității și temperaturii din partea stângă a canalului la momentul inițial. Deoarece problema are simetrie azimutală în spațiul impulsurilor, numărul de puncte de cuadratură după direcția φ este $Q_\varphi = 1$. Mai mult, numărul de puncte de cuadratură pe direcția radială poate fi ales ca $Q_L = 2$. Astfel, spațiul impulsurilor este discretizat folosind un număr de $Q_L \times Q_\xi \times Q_\varphi = 2Q_\xi$ vectori.

Pentru a ilustra capabilitățile modelelor noastre, am pregătit trei seturi de grafice extrase din lucrarea [3] care se referă la profilele densității și a presiunii la un moment ulterior eliminării membranei. În Fig. 1, comparăm rezultatele simulărilor cu soluția analitică pentru fluidul ideal (limita $\eta/s \rightarrow 0$). Se observă că pe măsură ce η/s tinde spre 0, rezultatele numerice se apropie de rezultatul analitic obținut în cazul ideal.

Mai departe, în Fig. 1, valoarea lui η/s este suficient de mare pentru ca

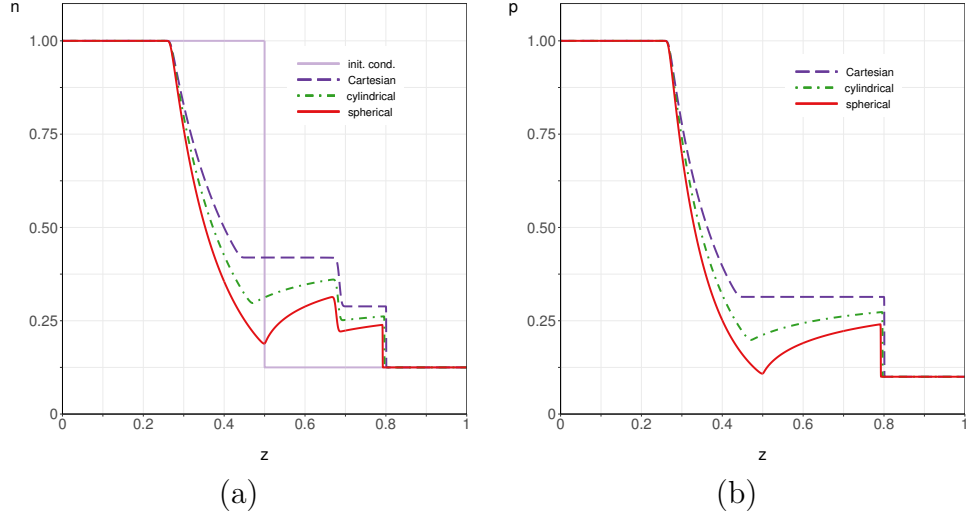


Figura 4: Densitatea (a) și presiunea (b) fluidului în problema Sod pentru geometriile carteziană, cilindrică și sferică ($\tau = 10^{-4}$). Graficele sunt trasate la $t = 0.4$, și corespund unui pas de timp $\delta t = 5 \times 10^{-5}$, obținute pe o rețea de $Z = 1000$ noduri. În starea inițială, $n_L = P_L = 1$ și $n_R = 0.125$, respectiv $P_R = 0.1$, discontinuitatea găsindu-se la $z = 0.5$.

efectele vâscozității să ducă la o netezire a profilelor în zona frontului de undă. Pentru validarea profilelor pe care le-am obținut, am reprezentat rezultatele obținute cu metoda BAMPs (Boltzmann approach to multiparton scattering) din lucrarea [38]. Se observă o suprapunere excelentă între cele două metode.

În Fig. 3 sunt prezentate profilele densității și presiunii în limita balistică. Modelele noastre recuperează soluția analitică doar la valori suficient de mari ale ordinului de cuadratură Q_ξ (de ordinul ~ 100).

Rezultatele prezentate mai sus au fost diseminate prin lucrările [3, 14], prezentările orale [5, 24], respectiv a posterului [30].

5.2 Unde de șoc cilindrice și sferice

În continuare vom considera propagarea undelor de șoc pentru care frontul de undă are simetrie cilindrică sau sferică. În primul caz, este convenabilă

utilizarea sistemului de coordonate cilindrice:

$$ds^2 = -dt^2 + dR^2 + R^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (51)$$

pentru care utilizăm următoarea tetradă:

$$\begin{aligned} e_{\hat{0}} &= \partial_t, & e_{\hat{R}} &= \partial_R, & e_{\hat{\phi}} &= R^{-1} \partial_{\phi}, & e_{\hat{z}} &= \partial_z, \\ \omega^{\hat{0}} &= dt, & \omega^{\hat{R}} &= dR, & \omega^{\hat{\phi}} &= R d\phi, & \omega^{\hat{z}} &= dz. \end{aligned} \quad (52)$$

Ecuația Boltzmann relativistă pentru cazul când curgerea are simetrie axială și este omogenă de-a lungul axei z ia forma:

$$\begin{aligned} \partial_t f + 2 \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial(fR)}{\partial R^2} - \frac{\sin \theta}{R} \partial_{\varphi}(\sin \varphi f) \\ = -\frac{1}{\tau} \left(u^{\hat{0}} - \sin \theta \cos \varphi u^{\hat{R}} \right) (f - f^{(\text{eq})}). \end{aligned} \quad (53)$$

În obținerea formei de mai sus am considerat că particulele au masă nulă și am aplicat parametrizarea din ec. (32) cu $p^{\hat{1}} = p^{\hat{R}}$, $p^{\hat{2}} = p^{\hat{\phi}}$ și $p^{\hat{3}} = p^{\hat{z}}$. În această secțiune am considerat întotdeauna $\tau = \text{const}$.

Pentru discretizarea spațiului impulsurilor, este necesar ca termenul conținând derivata după φ să fie dezvoltat în serie Fourier în raport cu unghiul φ . Să presupunem o dezvoltare a lui f în raport cu baza $(\cos m\varphi, \sin m\varphi)$:

$$f = \frac{1}{2\pi} a_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi). \quad (54)$$

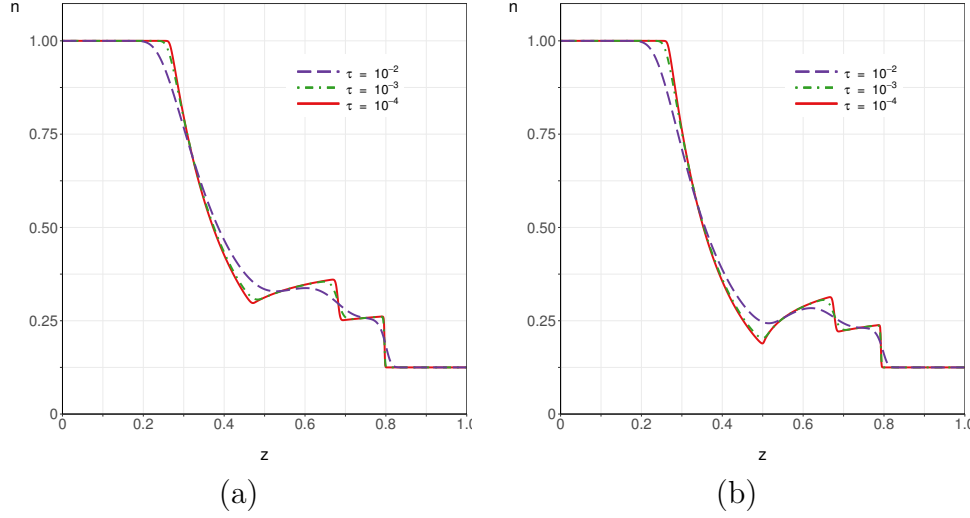


Figura 5: Profilul densității pentru valori diferite ale timpului de relaxare τ în cazurile cilindric (a), respectiv sferic (b). Graficele sunt trasate la momentul $t = 0.4$ iar parametrii simulărilor sunt identici cu cei prezentați în Fig. 4.

Înmulțind relația de mai sus cu $\sin \varphi$ și derivând după φ se obține:

$$\begin{aligned} \partial_{\varphi}(\sin \varphi f) &= \frac{1}{2\pi} a_0 \cos \varphi + \\ &\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \{a_m [(m+1) \cos(m+1)\varphi - (m-1) \cos(m-1)\varphi] \\ &\quad + b_m [(m+1) \sin(m+1)\varphi - (m-1) \sin(m-1)\varphi]\}. \end{aligned} \quad (55)$$

În urma aplicării cuadraturii Mysovskikh [53] descrisă în subsec. 4.3, ec. (54) devine:

$$[\partial_{\varphi}(\sin \varphi f)]_{i,j,k} = \sum_{i'=1}^{Q_{\varphi}} \Phi_{i,i'} f_{i',j,k}, \quad (56)$$

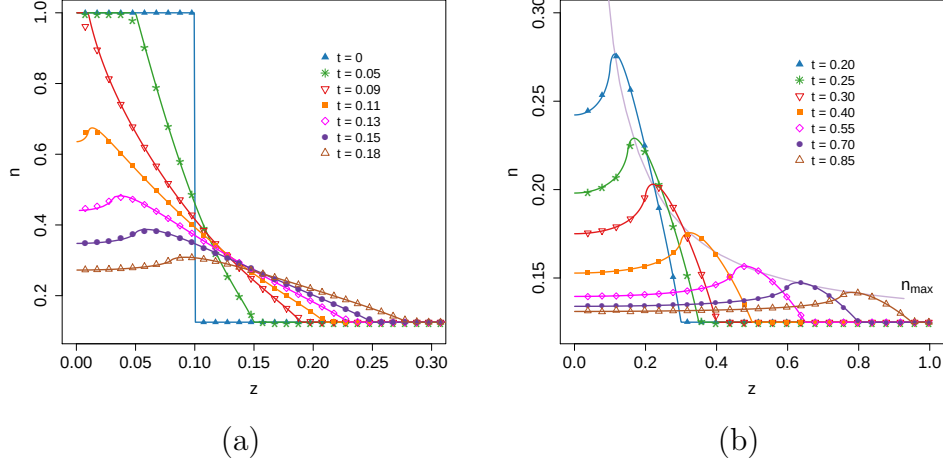


Figura 6: Evoluția temporală a undei de șoc cilindrice în regim balistic. Simbolurile reprezintă rezultatele simulărilor în timp ce liniile continue reprezintă soluția analitică.

unde matricea $\Phi_{i,i'}$ are următoarele elemente:

$$\Phi_{i,i'} = \frac{1}{Q_\varphi} \left\{ \sum_{n=1}^{\lfloor Q_\phi/2 \rfloor} n \cos[n\varphi_i - (n-1)\varphi'_i] - \sum_{n=1}^{\lfloor Q_\phi/2 \rfloor - 1} n \cos[n\varphi_i - (n+1)\varphi'_i] \right\}. \quad (57)$$

În cazul propagării undei de șoc sferice, este convenabilă utilizarea sistemului de coordonate sferic:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin \vartheta d\phi^2, \quad (58)$$

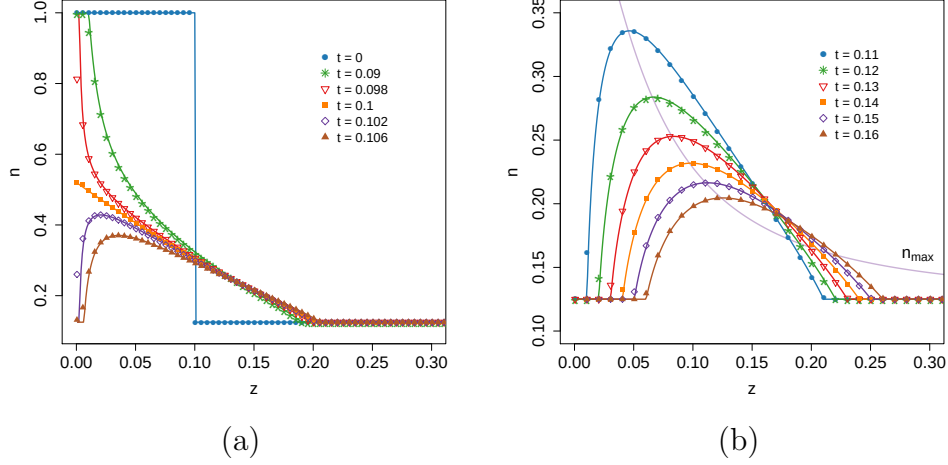


Figura 7: Evoluția temporală a unei de șoc sferice în regim balistic. Simbolurile reprezintă rezultatele simulărilor în timp ce liniile continue reprezintă soluția analitică.

tetrada asociată fiind:

$$\begin{aligned}
 e_{\hat{0}} &= \partial_t, & e_{\hat{r}} &= \partial_r, & e_{\hat{\vartheta}} &= \frac{\partial_{\vartheta}}{r}, & e_{\hat{\phi}} &= \frac{\partial_{\phi}}{r \sin \vartheta}, \\
 \omega^{\hat{0}} &= dt, & \omega^{\hat{r}} &= dr, & \omega^{\hat{\vartheta}} &= r d\vartheta, & \omega^{\hat{\phi}} &= r \sin \vartheta d\phi.
 \end{aligned} \tag{59}$$

Parametrizând spațiul impulsurilor conform ec. (32), unde $p^{\hat{1}} = p^{\hat{\vartheta}}$, $p^{\hat{2}} = p^{\hat{\phi}}$ și $p^{\hat{3}} = p^{\hat{r}}$, ecuația Boltzmann relativistă (14) devine:

$$\partial_t f + \frac{\xi}{r^2} \partial_r (r^2 f) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} [(1 - \xi^2) f] = -\frac{1}{\tau} (u^{\hat{0}} - \xi u^z) (f - f^{(\text{eq})}), \tag{60}$$

unde am presupus cazul particulelor de masă nulă și am folosit faptul că curgerea este omogenă în raport cu unghiurile ϕ și ϑ . În această secțiune am considerat întotdeauna $\tau = \text{const.}$

Termenul conținând derivata după ξ poate fi proiectat pe spațiul poli-

noamelor Legendre pornind de la următoarea dezvoltare a lui f :

$$f = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} \mathcal{F}_{\ell} P_{\ell}(\xi). \quad (61)$$

Înmulțind relația de mai sus cu $1 - \xi^2$ și derivând în raport cu ξ rezultă:

$$\partial_{\xi}[(1 - \xi^2)f] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell(\ell+1)}{2} (\mathcal{F}_{\ell+1} - \mathcal{F}_{\ell-1}) P_{\ell}(\xi). \quad (62)$$

După discretizarea spațiului impulsurilor, $\partial_{\xi}[(1 - \xi^2)f]$ se poate obține folosind următoarea relație:

$$\{\partial_{\xi}[(1 - \xi^2)f]\}_{ijk} = \sum_{j'=1}^{Q_{\xi}} \Xi_{j,j'} f_{i,j',k}, \quad (63)$$

unde matricea $\Xi_{j,j'}$ are următoarele elemente:

$$\Xi_{j,j'} = w_j \sum_{\ell=0}^{Q_{\xi}-1} \frac{\ell(\ell+1)}{2} P_{\ell}(\xi_j) [P_{\ell+1}(\xi_{j'}) - P_{\ell-1}(\xi_{j'})]. \quad (64)$$

În Fig. 4 sunt reprezentate profilele densității și presiunii pentru cazul undei de șoc carteziene, cilindrice și sferice, la $\tau = 10^{-4}$ (corespunzător cazului în care vâscozitatea și conductivitatea termică sunt neglijabile). Se poate vedea că între capătul undei de rarefacție și discontinuitatea de contact, densitatea și presiunea rămân constante în cazul undei plane, în timp ce în cazurile undelor cilindrică și sferică, acestea cresc, mai abrupt în cazul sferic decât în cazul cilindric.

În Fig. 5 sunt reprezentate profilele densității în cazul când frontul de undă are simetrie cilindrică și sferică pentru valori crescătoare ale lui τ . Se vede că la $\tau = 10^{-2}$ frontul de undă este considerabil mai neted decât în cazul $\tau = 10^{-4}$, când frontul de undă este ascuțit.

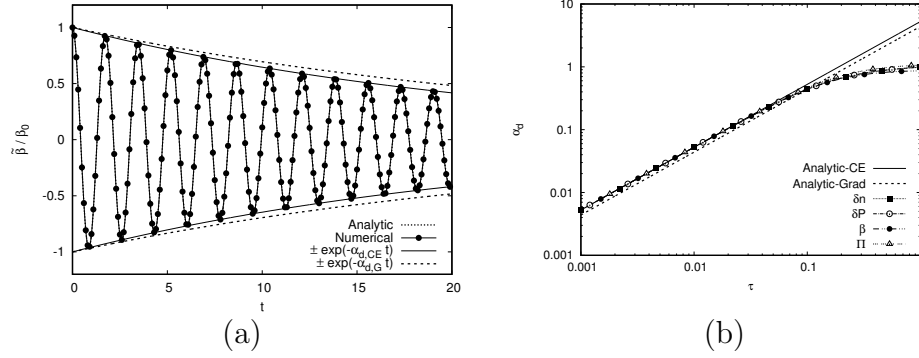


Figura 8: (a) Comparație între soluția analitică (70) pentru $\tilde{\beta}$ (linie continuă) și rezultatele obținute prin simulare (linie întreruptă și simboluri) pentru cazul când $\beta_0 = 10^{-3}$ și $\tau = 0.0083$. Sunt evidențiate atenuările prezise analitic când coeficientul de vâscozitate η este calculat folosind expresia obținută prin metoda Grad (69a), respectiv prin metoda Chapman-Enskog (69b). (b) Valoarea coeficientului de atenuare α_d obținută prin fitarea rezultatelor numerice pe soluțiile analitice (70) în care α_d și α_o sunt considerați parametri liberi. Liniile fără simboluri reprezintă predicția analitică pentru α_d când η este calculat folosind expresia Grad (linie punctată), respectiv cea corespunzătoare metodei Chapman-Enskog (linie continuă). (Graficele sunt reproduse din lucrarea [18]).

În fine, în fig. 6 și 7 sunt reprezentate evoluțiile temporale ale profilului densității în cazul șocului cilindric, respectiv sferic, în regim balistic ($\tau \rightarrow \infty$). În acest caz, ecuația Boltzmann poate fi rezolvată analitic iar rezultatele numerice (reprezentate prin simboluri) reproduc foarte bine curbele analitice (reprezentate prin linii continue).

Rezultatele prezentate în această subsecțiune sunt încă în stadiu preliminar, ele fiind deja diseminate prin prezentările orale [22, 24].

5.3 Atenuarea undelor longitudinale

O altă aplicație a modelelor lattice Boltzmann pe bază de cuadraturi este studiul atenuării unei unde longitudinale, descrisă prin [18]:

$$n(t, z) = n_0 + \widetilde{\delta n} \cos kz, \quad P(t, z) = P_0 + \widetilde{\delta P} \cos kz, \quad \beta(t, z) = \widetilde{\beta} \sin kz, \quad (65)$$

unde $k = 2\pi/L$ reprezintă numărul de unde, L este lungimea de undă, n_0 și P_0 reprezintă valorile medii ale densității și presiunii iar funcțiile $\widetilde{\delta n}$, $\widetilde{\delta P}$ și $\widetilde{\beta}$ depind doar de timp. Considerând că perturbațiile δn , δP și β sunt mici, ecuațiile hidrodinamicii relativiste iau forma [18]:

$$\begin{aligned} \partial_t \delta n + n_0 \partial_z \beta &= 0, \\ 3\partial_t \delta P + 4P_0 \partial_z \beta + \partial_z q &= 0, \\ 4P_0 \partial_t \beta + \partial_t q + \partial_z \delta P + \partial_z \Pi &= 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Pentru a putea rezolva ecuațiile de mai sus, fluxul de căldură q și deviatorul de presiune Π trebuie specificate. În hidrodinamica de ordinul 1, acestea sunt date prin ecuațiile constitutive [18]:

$$q = -\frac{\lambda P_0}{4n_0} \left(\frac{3}{P_0} \partial_z \delta P - \frac{4}{n_0} \partial_z \delta n \right), \quad \Pi = -\frac{4\eta}{3} \partial_z \left(\beta + \frac{q}{4P_0} \right), \quad (67)$$

unde λ și η reprezintă coeficienții de conductivitate termică, respectiv de vâscozitate, ale căror valori sunt în principiu arbitrare, fiind definatorii pentru proprietățile reologice ale fluidului în cauză. Pornind de la ecuația Boltzmann în aproximația Anderson-Witting, se pot obține relații între λ și η și timpul de relaxare τ , după cum urmează:

$$\eta = \eta_0 P \tau, \quad \lambda = \lambda_0 n \tau, \quad (68)$$

unde constantele adimensionale η_0 și λ_0 pot fi obținute folosind metoda momentelor a lui Grad sau procedura Chapman-Enskog [45]. Este remarcabil că cele două metode prezic valori diferite ale acestor coeficienți de transport în limita ultrarelativistă (adică a particulelor fără masă) [45]:

$$\text{Grad method:} \quad \eta_{0,G} = \frac{2}{3}, \quad \lambda_{0,G} = \frac{4}{5}, \quad (69a)$$

$$\text{Chapman-Enskog :} \quad \eta_{0,C-E} = \frac{4}{5}, \quad \lambda_{0,C-E} = \frac{4}{3}. \quad (69b)$$

Scopul studiului nostru a fost de a identifica prin simulări numerice care dintre expresiile de mai sus descrie cu adevărat procesul de atenuare al unei unde longitudinale. Înlocuind ec. (67) în ec. (66), se pot obține următoarele soluții analitice [18]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{\beta} \\ \widetilde{\Pi} \end{pmatrix} &= \beta_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -8P_0\alpha_d/k \end{pmatrix} \left(\cos \alpha_o t - \frac{\alpha_d}{\alpha_o} \sin \alpha_o t \right) e^{-\alpha_d t}, \\ \widetilde{\delta n} &= -\frac{kn_0\beta_0}{\alpha_o} e^{-\alpha_d t} \sin \alpha_o t, \\ \widetilde{\delta P} &= -\frac{4kP_0\beta_0}{3\alpha_o} e^{-\alpha_d t} \sin \alpha_o t, \end{aligned} \quad (70)$$

unde $\beta_0 = \widetilde{\beta}(t=0)$ reprezintă valoarea perturbației vitezei la momentul $t=0$ [s-a presupus că $\delta n(t=0) = \delta P(t=0) = 0$], în timp ce coeficientul de atenuare α_d și frecvența unghiulară a oscilațiilor α_o au expresiile [18]:

$$\alpha_d = \frac{k^2\eta}{6P_0}, \quad \alpha_o = \frac{k}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{3\alpha_d^2}{k^2}}, \quad (71)$$

În timp ce $\alpha_o \simeq k/\sqrt{3} + O(\tau^2)$ și deci nu variază mult cu τ pentru valori mici ale lui τ , se vede că valoarea lui α_d depinde puternic de formula de calcul a coeficientului de vâscozitate η .

Rezultatele studiului nostru numeric sunt prezentate în fig. 8. În partea din dreapta este evidențiată concordanța dintre rezultatele noastre numerice

și formula analitică (70) pentru $\tilde{\beta}$ în cazul atenuării unei unde care la momentul inițial este perturbată la nivelul vitezei (densitatea și presiunea la momentum inițial fiind constante). În partea din dreapta este reprezentată valoarea lui α_d obținută prin fitarea formulelor (70) pe rezultatele numerice obținute pentru $\tilde{\beta}$, $\tilde{\delta n}$, $\tilde{\delta P}$ și $\tilde{\Pi}$. Pentru comparație este reprezentată expresia analitică a lui α_d din ec. (71), în care se înlocuiește valoarea lui η corespunzătoare celor două variante de calcul: Grad și Chapman-Enskog. Pentru valori nu foarte mari ale lui τ , simulările noastre indică clar că formula obținută prin metoda Chapman-Enskog este cea corectă. Pe măsură ce τ crește, curgerea intră în regimul rarefiat iar ecuațiile constitutive (67) ale hidrodinamicii de ordinul 1 nu mai sunt valide, astfel explicându-se discrepanța dintre rezultatele numerice și cele analitice observate pentru $\tau \gtrsim 0.1$.

Rezultatele acestea sunt incluse în lucrarea [18] și au fost diseminate la conferința DSFD prin prezentarea orală [24].

5.4 Curgeri în relativitatea generală

Studiul propagării undelor de șoc în fluidele relativiste este util pentru înțelegerea evoluției plasmelor quarc-gluon creată în acceleratoarele de mare putere [57, 58]. Astfel de curgeri pot fi înțelese și prin prisma simetriilor lor. Astfel, Bjorken [42] a presupus că la scurt timp după ciocnirea a două nuclee grele, mediul care rămâne în urma produșilor de reacție reprezintă un fluid care suferă o expansiune longitudinală invariantă la boost-urile Lorentz, în timp ce pe direcțiile transversale, el a aproximat fluidul ca fiind omogen. În aceste condiții, viteza macroscopică are componentele

$$u^{\hat{0}} = \gamma, \quad u^{\hat{z}} = \beta\gamma, \quad (72)$$

unde $\beta = z/t$ iar $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Studiul proprietăților acestei curgeri poate fi făcut trecând la coordonatele $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$ și $w = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z} = \text{arctanh} \frac{z}{t}$, în

raport cu care elementul de linie al spațiului Minkowski devine:

$$ds^2 = -d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + \tau^2 dw^2. \quad (73)$$

Metrica de mai sus descrie așa-numitul spațiu Milne. Componentele vitezei macroscopice (72) se transformă în:

$$u^{\hat{\tau}} = 1, \quad u^{\hat{w}} = 0, \quad (74)$$

astfel încât în spațiul Milne, expansiunea longitudinală apare ca o stare staționară.

Pentru a studia proprietățile curgerii Bjorken pornind de la spațiul Milne, am utilizat următoarea tetradă:

$$\begin{aligned} \omega^{\hat{\tau}} &= \cosh \rho \, d\tau, & \omega^{\hat{x}} &= dx, & \omega^{\hat{y}} &= dy, & \omega^{\hat{\eta}} &= \tau \, d\eta, \\ e_{\hat{\tau}} &= \partial_{\tau}, & e_{\hat{x}} &= \partial_x, & e_{\hat{y}} &= \partial_y, & e_{\hat{\eta}} &= \frac{1}{\tau} \partial_{\eta}. \end{aligned} \quad (75)$$

Ecuția Boltzmann (14) este:

$$\frac{1}{\tau} \partial_{\tau}(\tau f) - \frac{\xi^2}{\tau} \partial_p(f p^3) - \frac{1}{\tau} \partial_{\xi}[\xi(1 - \xi^2)f] = \frac{p \cdot u}{\tau_R p} (f - f^{(\text{eq})}). \quad (76)$$

Pentru a putea discretiza spațiul impulsurilor, termenii care conțin derivatele după ξ și p trebuie proiectați pe spațiul polinoamelor Legendre, respectiv Laguerre. Pentru proiecția termenului $\partial_{\xi}[\xi(1 - \xi^2)f]$, înmulțim ec. (61) cu $\xi(1 - \xi^2)$ și derivăm în raport cu ξ . Urmând aceiași pași ca cei prezentați în sec. 5.2, rezultă:

$$\left[\frac{\partial[\xi(1 - \xi^2)f]}{\partial \xi} \right]_{ijk} = \sum_{j'=1}^{Q_{\xi}} \mathcal{K}_{j,j'}^P f_{i,j',k}, \quad (77)$$

unde matricea $\mathcal{K}_{j,j'}^P$ are următoarele elemente:

$$\mathcal{K}_{j,j'}^P = w_j \sum_{s=1}^{Q_\xi-1} \frac{s(s+1)}{2} P_s(\xi_j) \left[\frac{s+2}{2s+3} P_{s+2}(\xi_{j'}) - \left(\frac{s}{2s-1} - \frac{s+1}{2s+3} \right) P_s(\xi_{j'}) - \frac{s-1}{2s-1} P_s(\xi_{j'}) \right]. \quad (78)$$

Pentru termenul $p^{-2} \partial_p (fp^3)$, pornim cu următoarea dezvoltare a lui f în raport cu polinoamele Laguerre:

$$f = \frac{e^{-p/T_0}}{T_0^3} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(\ell+1)(\ell+2)} \mathcal{L}_\ell L_\ell^{(2)}(p/T_0), \quad (79)$$

Înmulțind relația de mai sus cu p^3 , derivând în raport cu p și împărțind rezultatul la p^2 , rezultă (după discretizarea spațiului impulsurilor):

$$\left[\frac{1}{p^2} \frac{\partial (fp^3)}{\partial p} \right]_{ijk} = \sum_{k'=1}^{Q_L} \mathcal{K}_{k,k'}^L f_{i,j,k'}, \quad (80)$$

unde matricea $\mathcal{K}_{k,k'}^L$ are următoarele elemente:

$$\mathcal{K}_{k,k'}^L = w_k^L \sum_{\ell=1}^{Q_L-1} \frac{1}{(\ell+1)(\ell+2)} L_\ell^{(2)}(\bar{p}_k) \left[(\ell+2) L_{\ell-1}^{(2)}(\bar{p}_{k'}) - \ell L_\ell^{(2)}(\bar{p}_{k'}) \right], \quad (81)$$

unde $\bar{p}_k = p_k/T_0$ și $\bar{p}_{k'} = p_{k'}/T_0$.

Ecuția (76) poate fi rezolvată analitic în regimul balistic (când $\tau \rightarrow \infty$ și termenul de coliziune poate fi neglijat), având soluția:

$$f(\tau; p, \xi) = \frac{n_0}{8\pi T_0^3} \exp \left(-\frac{p}{T_0} \sqrt{1 - \xi^2 + \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \xi^2} \right), \quad (82)$$

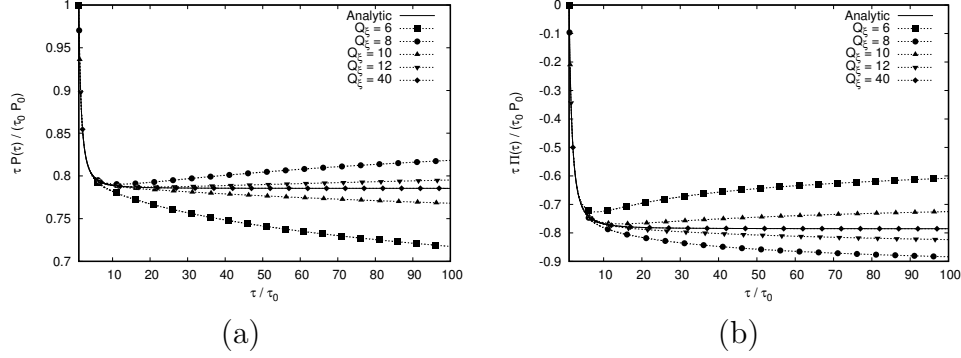


Figura 9: Evoluția presiunii P (a) și a deviatorului de presiune Π (b) în raport cu timpul spațiului Milne τ , adimensionalizat în raport cu timpul inițial τ_0 . Pentru a le ilustra comportamentul asimptotic, P și Π sunt înmulțite cu τ/τ_0 și sunt adimensionalizate în raport cu presiunea la momentul inițial P_0 . Curbele corespund diferitelor ordine de cuadratură Q_ξ (linii punctate și simboluri). Soluțiile analitice (84) sunt reprezentate folosind linii continue. Rezultatele numerice corespunzătoare lui $Q_\xi = 40$ se suprapun peste curbele analitice. (Graficele sunt reproduse din lucrarea [3]).

corespunzătoare următoarei condiții inițiale la $\tau = \tau_0$:

$$f(\tau_0; p, \xi) = \frac{n_0}{8\pi T_0^3} \exp\left(-\frac{p}{T_0}\right). \quad (83)$$

Densitatea n , presiunea P și deviatorul de presiune Π pot fi calculate integrând ec. (83):

$$\begin{aligned} n &= \frac{n_0 \tau_0}{\tau}, \\ P &= \frac{1}{2} n_0 T_0 \left[\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 1 \right)^{-1/2} \arctan \left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 1 \right)^{1/2} + \frac{\tau_0^2}{\tau^2} \right], \\ P + \Pi &= \frac{3}{2} \frac{n_0 T_0}{\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 1} \left[\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 1 \right)^{-1/2} \arctan \left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 1 \right)^{1/2} - \frac{\tau_0^2}{\tau^2} \right]. \end{aligned} \quad (84)$$

Rezultatele analitice de mai sus sunt comparate cu rezultatele numerice

obținute cu modelele noastre în fig. 9. Pe axa verticală sunt reprezentate expresiile $P(\tau)\tau/P_0\tau_0$ și $\Pi(\tau)\tau/P_0\tau_0$, fiind evidențiate următoarele comportamente asimptotice:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau P}{\tau_0 P_0} = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau \Pi}{\tau_0 P_0} = -\frac{\pi}{4}. \quad (85)$$

Se vede că la ordine de cuadratură mici, discrepanța dintre rezultatele numerice și cele analitice este semnificativă, în timp ce rezultatele corespunzătoare ordinului de cuadratură $Q_\xi = 40$ sunt suprapuse peste curbele analitice. Pentru aceste simulări am folosit pasul temporal $\delta\tau = 10^{-3}$ și condițiile inițiale $n_0 = P_0 = 1$ specificate la $\tau_0 = 1$.

Cazul expansiunii solitonice (o expansiune radială, cu simetrie sferică) a fost prima oară propus în lucrarea [43]. Viteza are următoarea structură:

$$\begin{aligned} u^t &= \frac{L^2 + r^2 + t^2}{\sqrt{[L^2 + (r+t)^2][L^2 + (r-t)^2]}}, \\ u^r &= \frac{2tr}{\sqrt{[L^2 + (r+t)^2][L^2 + (r-t)^2]}}. \end{aligned} \quad (86)$$

Studierea acestei curgeri poate fi făcută efectuând o transformare conformă asupra metricii Minkowski prin împărțirea acesteia la $\Omega^2 = r^{-2}$ [59]:

$$d\bar{s}^2 = \frac{ds^2}{r^2} = -\cosh^2 \rho dT^2 + d\rho^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (87)$$

unde T și ρ sunt date prin:

$$\cosh \rho = \frac{1}{2Lr} \sqrt{[L^2 + (r+t)^2][L^2 + (r-t)^2]}, \quad \tan T = \frac{L^2 + r^2 - t^2}{2Lt}. \quad (88)$$

Utilizând următoarea tetradă:

$$e_{\hat{T}} = \frac{\partial_T}{\cosh \rho}, \quad e_{\hat{\rho}} = \partial_\rho, \quad e_{\hat{\theta}} = \partial_\theta, \quad e_{\hat{\phi}} = \frac{\partial_\phi}{\sin \theta}. \quad (89)$$

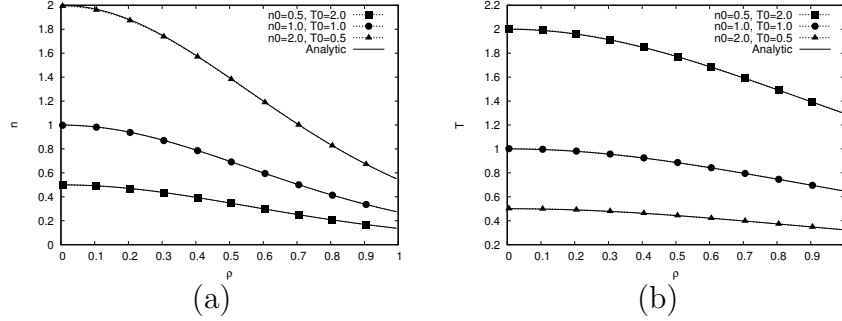


Figura 10: Profilele densității (a) și temperaturii (b) în raport cu coordonata radială ρ în starea staționară. Rezultatele numerice sunt reprezentate folosind linii întrerupte și simboluri iar rezultatele analitice date de ec. (91) sunt reprezentate cu linii continue. Curbele corespund diferitelor valori ale lui n_0 și T_0 .

singura componentă nenulă a vitezei va fi $\bar{u}^{\hat{T}} = 1$. În acest caz, ecuația Boltzmann (14) devine:

$$\begin{aligned} \partial_T f + \xi \partial_\rho (f \cosh \rho) - \sinh \rho \left\{ \frac{\xi}{p^2} \frac{\partial(f p^3)}{\partial p} + \frac{\partial[(1 - \xi^2)f]}{\partial \xi} \right\} \\ = -\frac{\cosh \rho}{\tau} (u^{\hat{T}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) [f - f^{(\text{eq})}], \quad (90) \end{aligned}$$

unde parametrizarea spațiului impulsurilor s-a efectuat conform ec. (32), unde $p^{\hat{1}} = p^{\hat{\theta}}$, $p^{\hat{2}} = p^{\hat{\varphi}}$ și $p^{\hat{3}} = p^{\hat{\rho}}$. În urma discretizării spațiului impulsurilor, derivata în raport cu ξ poate fi înlocuită folosind ec. (63), în timp ce pentru derivata în raport cu p poate fi folosită relația (80).

Soluția $u^{\hat{\alpha}} = (1, 0, 0, 0)^T$ corespunde unei stări de echilibru termodinamic descrisă de $f = f^{(\text{eq})}$, unde

$$n = \frac{n_0}{\cosh^3 \rho}, \quad T = \frac{T_0}{\cosh \rho}. \quad (91)$$

Inițializând sistemul cu $n = n_0$ și $T = T_0$ și impunând la $\rho = \rho_b$ condiția $f = f^{(\text{eq})}(n_b, T_b)$ [unde n_b și T_b sunt date de ec. (91) pentru $\rho = \rho_b$], se poate

studia relaxarea lui f către soluția de echilibru. Rezultatele simulărilor noastre sunt reprezentate în Fig. 10, unde se poate vedea că starea staționară coincide cu starea de echilibru termodinamic descrisă de ec. (91) pentru diverse valori ale lui n_0 și T_0 .

Rezultatele corespunzătoare spațiului Milne discutate mai sus sunt incluse în lucrarea [3], în timp ce rezultatele corespunzătoare curgerii solitonice au fost prezentate oral la conferința DSFD-2017 [25].

5.5 Cuadraturi pe semispațiu pentru curgeri relativiste

Să considerăm o curgere între doi pereți plani paraleli perpendiculari pe axa z , situați la $z = \pm L/2$. Pentru a calcula fluxul de particule incident pe peretele de la $z = L/2$, trebuie să evaluăm următoarea integrală:

$$\mathcal{F}_+ = \int \frac{d^3p}{p^0} \theta(p^z) f p^z \Big|_{z=L/2}. \quad (92)$$

În cazul particulelor fără masă, integrala de mai sus devine:

$$\mathcal{F}_+ = \int_0^\infty dp p^2 \int_{-1}^1 d \cos \theta \theta(p \cos \theta) \cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi f \Big|_{z=L/2}. \quad (93)$$

Presupunând că curgerea este omogenă în planul xOy , se poate presupune că f nu depinde de φ , astfel că integrala după φ va da automat 2π . Integrala după p se face normal (așa cum e prezentat în lucrarea [3]), în timp ce funcția treaptă $\theta(p \cos \theta)$ restricționează intervalul de integrare după $\cos \theta$ la domeniul $[0, 1]$:

$$\mathcal{F}_+ = 2\pi \int_0^\infty dp p^2 \int_0^1 d\xi \xi f \Big|_{z=L/2}. \quad (94)$$

Se observă că integrala după ξ acoperă doar calota nordică a sferei având planul ecuatorial perpendicular pe axa z . Astfel de integrale se pot recupera

folosind o variantă modificată a cuadraturii Gauss-Legendre prin efectuarea schimbării de variabilă $\zeta = 2\xi - 1$ [55]:

$$\int_0^1 d\xi f(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\zeta f\left(\frac{\zeta+1}{2}\right) = \sum_{j=1}^{Q_\zeta} w_j^\zeta f(\xi_j) \quad (95)$$

unde ξ_j sunt cele Q_ζ puncte de cuadratură care se scriu în funcție de rădăcinile ζ_j ale polinomului Legendre P_{Q_ζ} de ordinul Q_ζ astfel:

$$\xi_j = \frac{\zeta_j + 1}{2}. \quad (96)$$

Ponderile de cuadratură se pot obține utilizând următoarea formulă:

$$w_j^\zeta = \frac{1 - \zeta^2}{[(Q_\zeta + 1)P_{Q_\zeta+1}(\zeta_j)]^2}. \quad (97)$$

Studiul de fezabilitate de mai sus arată că construirea cuadraturilor pe semispațiu pentru curgerile relativiste este realizabilă.

6 Sisteme mezoscopice în rotație rigidă

În cadrul acestei secțiuni vor fi prezentate rezultatele noastre referitoare la analiza mezoscopică a stărilor termale aflate în rotație rigidă pe spații cu simetrie sferică.

Elementul de linie pe un spațiu cu simetrie sferică este [2]:

$$ds^2 = w^2 \left[-dt^2 + \frac{dr^2}{u^2} + \frac{r^2}{v^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (98)$$

unde u , v și w depind doar de coordonata r . Câmpul de viteze al unui fluid în rotație aflat în echilibru termodinamic este:

$$u^\mu = \frac{\gamma}{w(r)} (1, 0, 0, \Omega)^T, \quad (99)$$

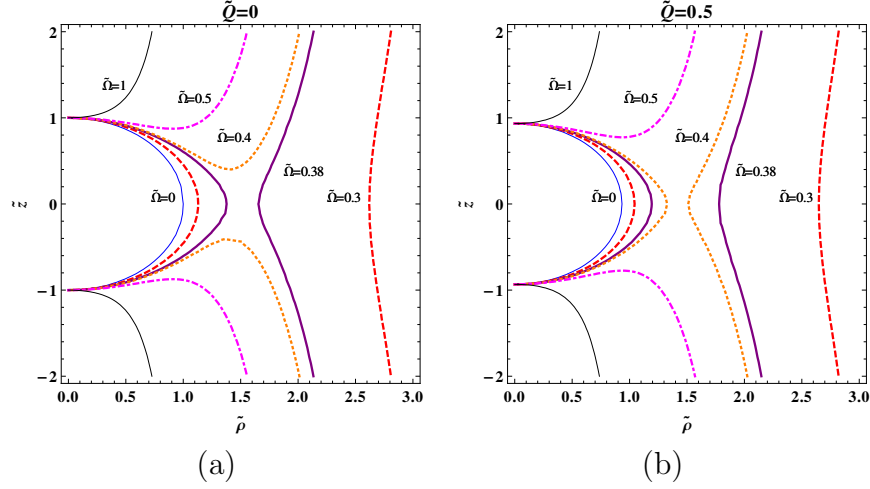


Figura 11: Structura orizonturilor de rotație în spațiul Reissner-Nordström pentru raportul $\tilde{Q} = Q/M$ având valorile (a) $\tilde{Q} = 0$ și (b) $\tilde{Q} = 0.5$. Pe axa verticală e reprezentat raportul $\tilde{z} \equiv z/2M$ (distanța de-a lungul z în unități $2M$), în timp ce pe axa orizontală avem distanța $\tilde{\rho} = r \sin \theta / 2M$ măsurată perpendicular pe axa de rotație. Conturile reprezintă orizonturile de rotație. (Graficele sunt reproduse din lucrarea [2]).

unde factorul Lorentz γ este dat prin:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho\Omega}{v}\right)^2}}, \quad (100)$$

unde $\rho = r \sin \theta$.

6.1 Orizonturi de rotație

Să ne imaginăm un fluid în rotație rigidă față de axa z , astfel că viteza elementului de fluid crește liniar cu distanța ρ față de axa z . La o distanță suficient de mare, viteza fluidului se apropie de viteza luminii, iar factorul Lorentz (100) tinde spre infinit. Locul geometric al punctelor unde $\gamma \rightarrow \infty$ datorită

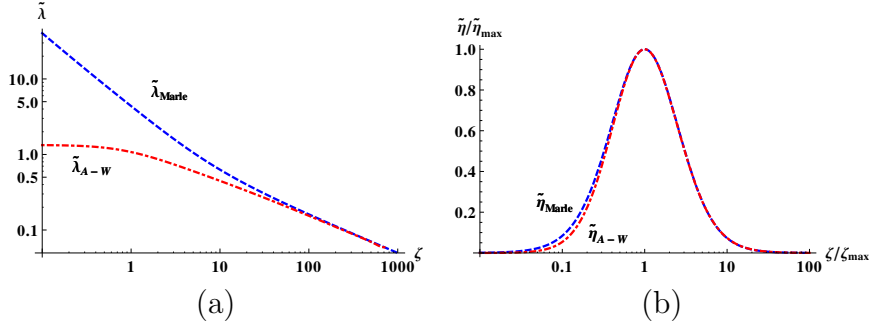


Figura 12: Comparația între coeficienții de (a) conductivitate termică λ și (b) vâscozitate dilatațională η obținuți în cadrul modelelor Marle și Anderson-Witting. Se observă că curbele corespunzătoare lui η (b) sunt suprapuse când se folosește relația (101). (Graficele sunt reproduse din lucrarea [2]).

rotației poartă numele de *orizont de rotație*. În figura 11 sunt reprezentate câteva orizonturi de rotație pentru felurite valori ale vitezei unghiulare a rotației Ω , pentru cazurile metricii Schwarzschild (a) și Reissner-Nordström (b).

6.2 Coeficienții de transport

Fluidele relativiste, la fel ca cele nerelativiste, prezintă fenomene disipative caracterizate prin următorii coeficienți de transport:

- Coeficientul de vâscozitate volumetrică η (dilatațională);
- Coeficientul de vâscozitate dinamică μ ;
- Coeficientul de conductivitate termică λ .

Caracteristicile acestor coeficienți depind de fluidul studiat. În ecuația Boltzmann relativistă, proprietățile mediului fluid sunt influențate de către termenul de coliziune, care descrie interacțiunea dintre constituenții acestuia. În mod uzual, sunt folosite două modele pentru simplificarea termenului de coliziune, și anume modelul Marle și modelul Anderson-Witting. În lucrarea [15], am făcut o comparație a proprietăților coeficienților de transport

în aceste două modele pentru curgeri pe spații-timp arbitrare. Două rezultate remarcabile merită amintite: în primul rând, coeficientul redus de conductivitate termică $\tilde{\lambda} = \sigma\lambda$ (unde σ este secțiunea eficace de împrăștiere) tinde spre $4/3$ în limia ultrarelativistă a modelului Anderson-Witting, în timp ce în modelul Marle, $\tilde{\lambda}$ tinde la infinit. Al doilea rezultat remarcabil este că $\tilde{\eta} = \sigma\eta/m$ (unde m este masa particulelor constituente) în modelul Anderson-Witting este cu o foarte bună aproximație legat de $\tilde{\eta}$ în modelul Marle prin următoarea transformare de similaritate:

$$\frac{\tilde{\eta}_{A-W}(\zeta/\zeta_{\max;A-W})}{\tilde{\eta}_{A-W}(\zeta_{\max;A-W})} \simeq \frac{\tilde{\eta}_M(\zeta/\zeta_{\max;M})}{\tilde{\eta}_M(\zeta_{\max;M})}. \quad (101)$$

Aceste rezultate sunt ilustrate în Fig. 12, mai multe detalii fiind date în lucrarea [15].

6.3 Rotația rigidă pe Minkowski

Să considerăm acum un fluid în rotație rigidă pe spațiul Minkowski. Stările de echilibrul termodinamic global ale fermionilor (F-D) și bozonilor (B-E) fără masă sunt caracterizate de următoarele densități de energie [1, 2, 16]:

$$E_{F-D} = \frac{7\pi^2\gamma^4}{60\beta_0^4}, \quad E_{B-E} = \frac{\pi^2\gamma^4}{30\beta_0^4}, \quad (102)$$

unde β_0 reprezintă inversul temperaturii pe axa de rotație iar γ este factorul Lorentz corespunzător vitezei $v = u^{\hat{\varphi}}/u^{\hat{0}}$ aferente rotației rigide:

$$u = \gamma(\partial_t + \Omega\partial_\varphi), \quad v = \rho\Omega, \quad (103)$$

unde Ω reprezintă frecvența unghiulară a rotației, ρ reprezintă distanța de la axa de rotație la punctul de observație iar φ reprezintă unghiul în planul perpendicular pe axa de rotație. Rezultatele din ec. (102) sunt obținute pornind de la ecuația Boltzmann în cazul când potențialul chimic este neglijabil.

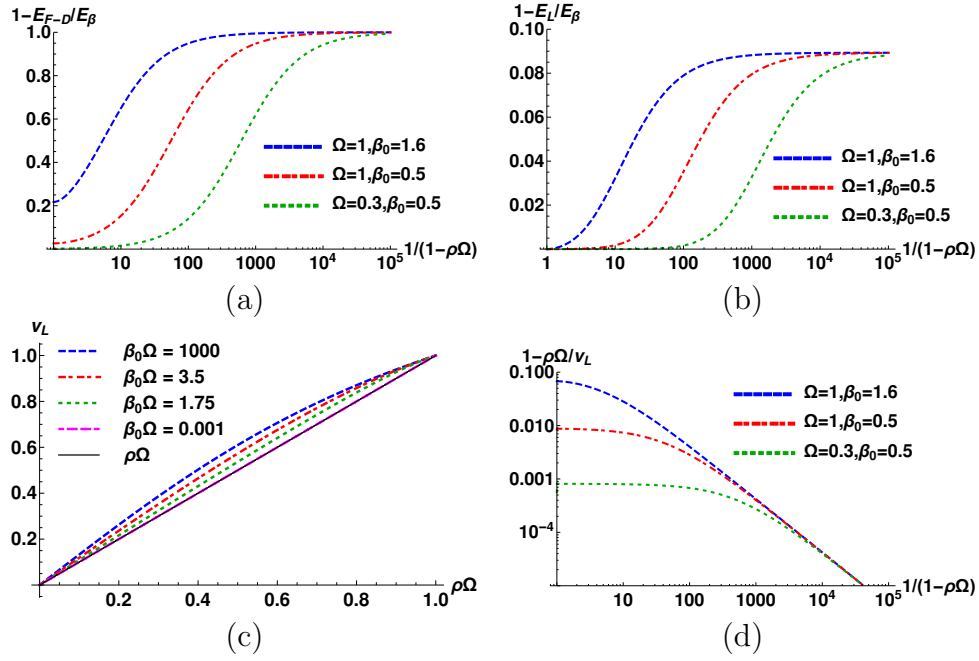


Figura 13: (a) Comparație între densitatea de energie obținută din teoria cinetică E_{F-D} (102) și cea cuantică E_{β} (104a) corespunzătoare reperului β ; (b) Comparație între energiile cuantice E_L (105) și E_{β} (104a) obținute în reperele Landau, respectiv β ; (c) Comparație între viteza Landau $v_L = \rho u_L^{\varphi}/u_L^t$ și cea corespunzătoare rotației rigide ($\rho\Omega$); (d) Diferența relativă $1 - \rho\Omega/v_L$ între v_L și $\rho\Omega$. (Graficele sunt reproduse din lucrarea [16]).

Prezența orizontului de rotație se remarcă prin factorul γ^4 de la numărătorul expresiilor din ec. (102), acesta fiind situat la distanța $\rho = \Omega^{-1}$ față de axa de rotație.

O analiză similară poate fi făcută folosind teoria cuantică de câmp. Deoarece formalismul teoriei cuantice de câmp permite accesul doar la valoarea medie la temperatură finită a tensorului energie-impuls, viteza macroscopică nu poate fi definită decât în raport cu reperul Landau. Cu toate acestea, se poate utiliza un alt reper, numit reperul β , în care viteza este cea definită de ec. (103).

În cazul statisticii Bose-Einstein, teoria cuantică de câmp prezice că starea de echilibru termodinamic nu poate fi atinsă datorită excitării infinite ale unor moduri având energie nulă în sistemul propriu al observatorului în rotație rigidă, în timp ce contribuția fiecărui mod de acest tip la densitatea de energie este finită [60, 61]. Confinarea acestui sistem în interiorul unui cilindru de rază $R \leq \Omega^{-1}$ elimină (prin cuantificarea componentei transversale a impulsului) aceste moduri, astfel permițând echilibrului termodinamic să fie atins [16, 61].

În ceea ce privește starea de rotație rigidă a câmpului Dirac, aceasta se poate caracteriza analitic folosind teoria cuantică de câmp [60], energia E_β și fluxul de energie în sistemul propriu W_β având în reperul β următoarele expresii:

$$E_\beta = \frac{7\pi^2\gamma^4}{60\beta_0^4} + \frac{\Omega^2}{24\beta_0^2} (4\gamma^6 - \gamma^4), \quad (104a)$$

$$W_\beta = \frac{\Omega^3\gamma^7}{18\beta_0^2} (\rho^2\Omega\partial_t + \partial_\varphi). \quad (104b)$$

Primul termen din ec. (104a) coincide cu densitatea de energie E_{F-D} (102) obținută în contextul teoriei cinetice, în timp ce al doilea termen reprezintă o corecție cuantică care devine dominantă în vecinătatea orizontului de rotație. Figura 13(a) ilustrează această proprietate și se poate vedea că corecția devine mai importantă pe măsură ce valorile lui Ω și β cresc.

Starea termică a fermionilor în rotație rigidă poate fi caracterizată de asemenea în reperul Landau [16]:

$$E_L = \frac{E_\beta}{3} + \sqrt{\frac{4E_\beta^2}{9} - W_\beta^2}, \quad (105)$$

$$u_L^\mu = \sqrt{\frac{3E_L + E_\beta}{2(3E_L - E_\beta)}} \left(u_\beta^\mu + \frac{3W_\beta^\mu}{3E_L + E_\beta} \right). \quad (106)$$

Raportul E_L/E_β între energia Landau și energia corespunzătoare reperului

β scade de la 1 pe axa de rotație până la $\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ în vecinătatea orizontului de rotație, unde $W_\beta \rightarrow \frac{1}{3}E_\beta$. Pentru $\rho\Omega < 1$ fixat, E_L se apropie de E_β pe măsură ce Ω și β scad, după cum se vede din fig. 13(b).

Viteza Landau $v_L = \rho u_L^\varphi / u_L^0 \geq \rho\Omega$ este comparată cu viteza reperului β (103) în fig. 13(c). Diferența $1 - \rho\Omega/v_L$ descrește la 0 către orizontul de rotație, în timp ce valoarea acesteia la origine crește monoton cu $\beta_0\Omega$.

6.4 Stări termale pe anti-de Sitter

Elementul de linie pe spațiul anti-de Sitter (adS) este

$$ds^2 = \frac{1}{(\cos \omega r)^2} \left[-dt^2 + dr^2 + \left(\frac{\sin \omega r}{\omega} \right)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (107)$$

unde ω este inversul razei de curbura, $x^i = \{x, y, z\}$ iar $\{r, \theta, \varphi\}$ reprezintă coordonatele sferice în notație uzuală, cu $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Varietatea corespunzătoare spațiului adS este periodică în coordonata t , ceea ce duce la curbe temporale închise. Pentru evitarea acestor efecte nefizice, considerăm intervalul coordonatei temporale ca fiind $t \in (-\infty, \infty)$, spațiul rezultat purtând denumirea de spațiu de acoperire al spațiului adS. Coordonata radială ia valori între $r = 0$ și $r = \pi/2\omega$, la capătul superior situându-se frontiera spațiului adS. Scalarul Ricci aferent metricii (107) este $R = -12\omega^2$.

Pentru analiza stărilor termale pe spațiul adS, utilizăm următoarea tetradă în etalonarea carteziană [17, 62]:

$$e_{\hat{0}} = \cos \omega r \partial_t, \quad e_{\hat{i}} = \cos \omega r \left[\frac{\omega r}{\sin \omega r} \left(\delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} \right) + \frac{x^i x^j}{r^2} \right] \partial_j, \quad (108)$$

$$\omega^{\hat{0}} = \frac{dt}{\cos \omega r}, \quad \omega^{\hat{i}} = \frac{1}{\cos \omega r} \left[\frac{\sin \omega r}{\omega r} \left(\delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} \right) + \frac{x^i x^j}{r^2} \right] dx^j. \quad (109)$$

Starea staționară $u^{\hat{\alpha}} = (1, 0, 0, 0)^T$ reprezintă o stare de echilibru termodinamic global. În cazul fermionilor, această stare este caracterizată prin

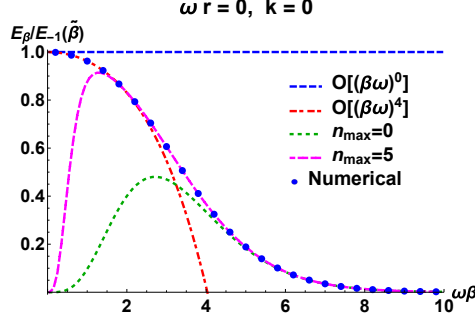


Figura 14: Efectul corecțiilor cuantice asupra densității de energie E_β . Punctele albastre reprezintă E_β evaluată numeric pornind de la ec. (112b), împărțită la $E_{-1}(\tilde{\beta})$ (112a), totul evaluat în origine $\omega r = 0$ și reprezentat în funcție de $\beta\omega$ pentru particule Fermi-Dirac fără masă $k = 0$. Pornind de la ec. (113), am reprezentat aproximațiile corespunzătoare primului ordin $O([\beta\omega]^0)$ (lina punctată albastră), respectiv ordinului $O([\beta\omega]^4)$ (linia punctată roșie), corespunzătoare temperaturilor mari. Curbele verde și roz sunt obținute folosind dezvoltarea asimptotică (114) corespunzătoare temperaturilor mici, în care s-au reținut primul termen ($n = 0$), respectiv termenii până la $n = 5$.

densitatea de energie $E_{-1}(\tilde{\beta})$ și presiunea $P_{-1}(\tilde{\beta})$ de mai jos [17]:

$$E_{-1}(\tilde{\beta}) - 3P_{-1}(\tilde{\beta}) = - \frac{2m^3 \cos \omega r}{\pi^2 \beta} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} K_1 \left(\frac{mj\beta}{\cos \omega r} \right), \quad (110a)$$

$$P_{-1}(\tilde{\beta}) = - \frac{2m^2}{\pi^2 \beta^2} (\cos \omega r)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2} K_2 \left(\frac{mj\beta}{\cos \omega r} \right), \quad (110b)$$

unde am presupus că potențialul chimic este neglijabil.

Aceleași mărimi pot fi obținute în contextul teoriei cuantice de câmp,

pornind de la ecuația Dirac [17]. Se obțin următoarele expresii:

$$E_\beta + P_\beta = - \frac{2\omega^4 \Gamma(3+k)(\cos \omega r)^{4+2k}}{\pi^{3/2} 4^{1+k} \Gamma(\frac{1}{2} + k)} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\cosh \frac{\omega j \beta}{2}}{(\sinh \frac{\omega j \beta}{2})^{4+2k}} \times {}_2F_1 \left[k, 3+k; 1+2k; -\frac{\cos^2 \omega r}{\sinh^2 \frac{\omega j \beta}{2}} \right], \quad (111a)$$

$$P_\beta = - \frac{\omega^4 \Gamma(2+k)(\cos \omega r)^{4+2k}}{\pi^{3/2} 4^{1+k} \Gamma(\frac{1}{2} + k)} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\cosh \frac{\omega j \beta}{2}}{(\sinh \frac{\omega j \beta}{2})^{4+2k}} \times {}_2F_1 \left[k, 2+k; 1+2k; -\frac{\cos^2 \omega r}{\sinh^2 \frac{\omega j \beta}{2}} \right], \quad (111b)$$

unde $k = m/\omega$.

În limita masei nule, $E_{-1}(\tilde{\beta})$ și E_β se reduc la următoarele expresii:

$$E_{-1}(\tilde{\beta}) = \frac{7\pi^2}{60\beta^4} (\cos \omega r)^4, \quad (112a)$$

$$E_\beta = - \frac{3\omega^4}{4\pi^2} (\cos \omega r)^4 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\cosh \frac{\omega j \beta}{2}}{(\sinh \frac{\omega j \beta}{2})^4}. \quad (112b)$$

Deoarece $E_{-1}(\tilde{\beta})$ și E_β depind de coordonate doar prin factorul $(\cos \omega r)^4$, este suficientă analiza acestora în origine. Considerând că produsul $\beta\omega$ este mic (corespunzător temperaturilor mari și valorilor mici ale lui ω), E_β poate fi dezvoltat după cum urmează:

$$E_\beta = \frac{7\pi^2}{60\beta^4} (\cos \omega r)^4 \left[1 - \frac{5\beta^2 \omega^2}{14\pi^2} - \frac{17\beta^4 \omega^4}{112\pi^4} + O([\beta\omega]^6) \right]. \quad (113)$$

Primul termen din dezvoltarea de mai sus coincide cu expresia obținută folosind teoria cinetică a gazelor (112a), în timp ce termenii de ordin superior reprezintă corecții cuantice care dispar în limita $\beta\omega \rightarrow 0$. Pentru valori mari

ale produsului $\beta\omega$ (temperaturi mici), se obține următoarea dezvoltare:

$$E_\beta = -\frac{6\omega^4}{\pi^2} \frac{(\cos \omega r)^4}{1 + e^{\frac{3}{2}\omega\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\omega\beta} \left(1 + \frac{13n}{6} + \frac{3n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \right) \frac{1 + e^{-\frac{3}{2}\omega\beta}}{1 + e^{-(\frac{3}{2}+n)\omega\beta}}. \quad (114)$$

În fig. 14 este reprezentată dependența raportului $E_\beta/E_{-1}(\tilde{\beta})$ de produsul $\omega\beta$. Se vede că la temperaturi mari ($\omega\beta \rightarrow 0$), efectele cuantice sunt neglijabile, în timp ce pe măsură ce temperatura scade, densitatea de energie devine din ce în ce mai mică în raport cu predicția clasică (necuantică). Validitatea dezvoltărilor (113) și (114) este de asemenea evidențiată.

Cazul particulelor cu masă este discutat în lucrarea [17], iar rezultatele de mai sus au fost diseminate prin prezentarea orală [23].

7 Curgeri nerelativiste prin geometrii curbe

Varianta nerelativistă a ecuației Boltzmann este:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p^i}{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} + F^i \frac{\partial f}{\partial p^i} = -\frac{1}{\tau} (f - f^{(\text{eq})}), \quad (115)$$

unde $\mathbf{F}$ reprezintă suma forțelor externe care acționează asupra constituenților iar termenul de coliziune a fost scris în aproximația BGK [49].

În cazul curgerii prin domenii ai căror pereți sunt curbi, este de dorit ca sistemul de coordonate să fie astfel adaptat încât descrierea frontierei să fie facilă (în cazul unei frontiere cilindrice, coordonatele cilindrice permit specificarea frontierei în forma $R = R_0$). Pentru aceasta, ecuația Boltzmann (115) trebuie rescrisă în funcție de coordonate curbilinii $\tilde{x}^i$, în raport cu care elementul de linie devine:

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{\tilde{i}\tilde{j}} d\tilde{x}^{\tilde{i}} d\tilde{x}^{\tilde{j}}, \quad (116)$$

unde $g_{\tilde{i}\tilde{j}}$ reprezintă componentele tensorului metric corespunzător coordona-

telor curbii $x^{\tilde{i}}$. Echivalentul formei conservative a ecuației Boltzmann relativistă (14) este [19]:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{i}}} \left(\frac{p^{\hat{a}}}{m} e_{\hat{a}}^{\tilde{i}} \tilde{f} \right) + \frac{\partial}{\partial p^{\hat{a}}} \left[\left(F^{\hat{a}} - \frac{1}{m} \Gamma^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}} p^{\hat{b}} p^{\hat{c}} \right) \tilde{f} \right] = -\frac{1}{\tau} (\tilde{f} - \tilde{f}^{(\text{eq})}), \quad (117)$$

unde $e_{\hat{a}} = e_{\hat{a}}^{\tilde{i}} \partial_{\tilde{i}}$ reprezintă un câmp triadic care satisface:

$$g_{\tilde{i}\tilde{j}} e_{\hat{a}}^{\tilde{i}} e_{\hat{b}}^{\tilde{j}} = \delta_{\hat{a}\hat{b}}, \quad (118)$$

în timp ce

$$\tilde{f} = f \sqrt{g}. \quad (119)$$

În continuare vom discuta trei aplicații ale formalismului descris mai sus: curgerea Couette circulară între cilindrii coaxiali aflați în rotație (sec. 7.1), transferul termic în diferite configurații (sec. 7.2), respectiv curgerea într-o cavitate de tip cilindric cu capac glisant (sec. 7.3).

7.1 Curgerea Couette circulară

Elementul de linie (116) în coordonate cilindrice se scrie:

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (120)$$

Acest sistem admite următorul câmp triadic:

$$\begin{aligned} e_{\hat{R}} &= \partial_R, & e_{\hat{\varphi}} &= R^{-1} \partial_{\varphi}, & e_{\hat{z}} &= \partial_z, \\ \omega^{\hat{R}} &= dR, & \omega^{\hat{\varphi}} &= R d\varphi, & \omega^{\hat{z}} &= dz. \end{aligned} \quad (121)$$

În raport cu acest sistem, se pot defini impulsurile corespunzătoare componentelor radială $p^{\hat{R}}$, azimutală $p^{\hat{\varphi}}$ și verticală $p^{\hat{z}}$. Presupunând că curgerea este omogenă de-a lungul coordonatelor z și φ , ecuația Boltzmann în formă

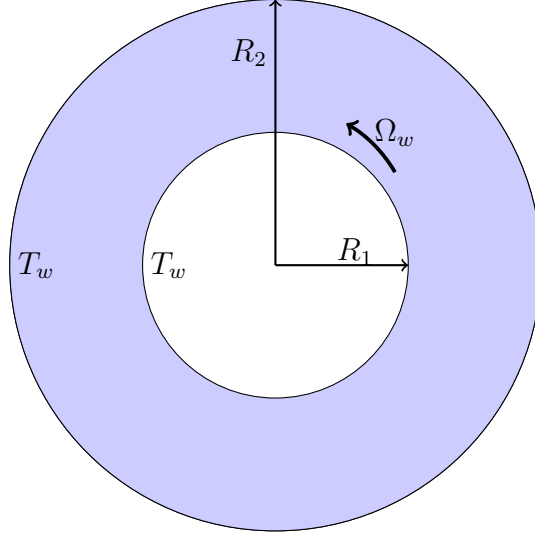


Figura 15: Geometria curgerii Couette circulară.

conservativă (117) se reduce la:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \frac{p^{\hat{R}}}{mR} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial R} + \frac{1}{mR} \left[(p^{\hat{\phi}})^2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p^{\hat{R}}} - p^{\hat{R}} \frac{\partial (\tilde{f} p^{\hat{\phi}})}{\partial p^{\hat{\phi}}} \right] = -\frac{1}{\tau} [\tilde{f} - \tilde{f}^{(\text{eq})}], \quad (122)$$

unde $\tilde{f} = fR$ și $\tilde{f}^{(\text{eq})} = f^{(\text{eq})}R$.

Curgerea Couette între doi cilindri coaxiali reprezintă un test de referință pentru modelele dezvoltate pentru geometrii curbe. În cazul ecuației Boltzmann, ne interesează în primul rând capacitatea modelelor de a captura efectele de rarefacție care apar la valori mari ale numărului lui Knudsen (Kn), reprezentând raportul dintre drumul liber mijlociu al constituenților gazului și dimensiunea caracteristică a canalului și fiind proporțional cu timpul de relaxare τ . În acest sens, am considerat comparația rezultatelor obținute folosind modelele noastre cu cele obținute cu modelele cu viteze discrete (Discrete Velocity Models, DVM), raportate anterior în lucrarea [39].

În regimul hidrodinamic am validat rezultatele noastre prin comparație

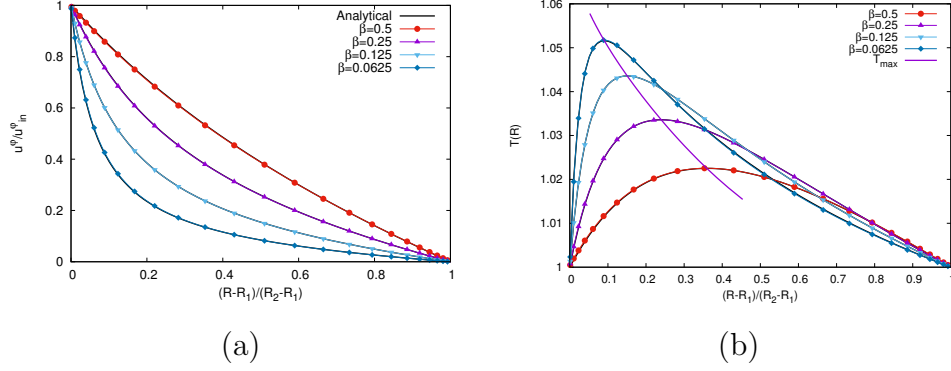


Figura 16: Profilele vitezei (a) și temperaturii (b) în regim hidrodinamic ($\tau = \text{Kn}/nT$, unde $\text{Kn} = 10^{-3}$). Rezultatele numerice sunt reprezentate prin linii colorate și puncte, în timp ce curbele analitice (123a) și (123b) sunt reprezentate prin linii negre. Viteza unghiulară a cilindrului interior este $\Omega_{\text{in}} = 0.5$ (cilindrul exterior este staționar). Curbele corespund diferitelor valori ale parametrului $\beta = R_{\text{in}}/R_{\text{out}}$, reprezentând raportul dintre razele cilindrului interior și exterior. (Graficele sunt reproduse din lucrarea [19]).

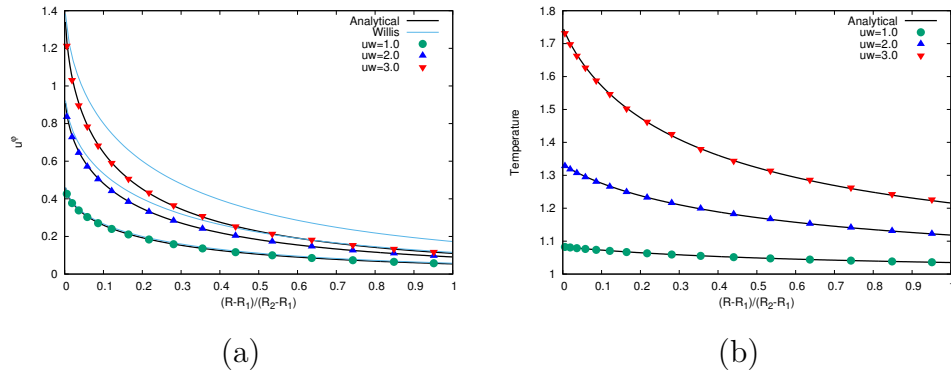


Figura 17: Profilele vitezei (a) și temperaturii (b) în regim balistic ($\tau \rightarrow \infty$). Rezultatele numerice sunt reprezentate prin linii colorate și puncte, în timp ce curbele analitice (124a) și (124b) sunt reprezentate prin linii negre. În (a) este reprezentată și soluția analitică aproximativă pentru $u^{\hat{p}}$ obținută de Willis [63]. Curbele corespund diferitelor valori ale lui Ω_{in} (cilindrul exterior este staționar). Parametrul $\beta = R_{\text{in}}/R_{\text{out}}$ are valoarea 0.5. (Graficele sunt reproduse din lucrarea [19]).

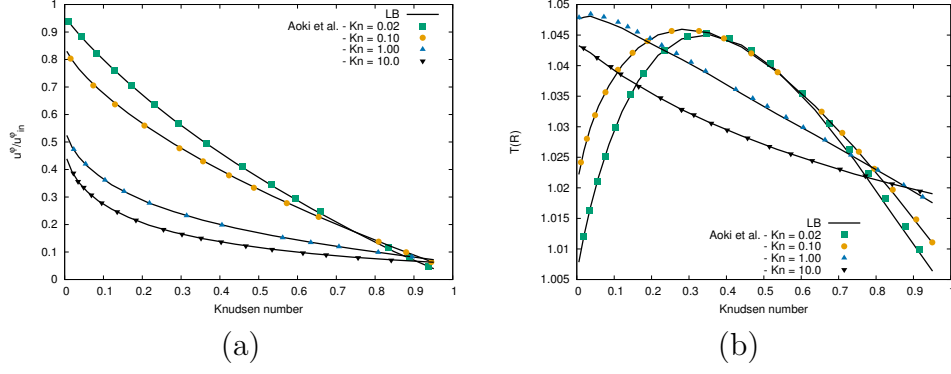


Figura 18: Profilele vitezei (a) și temperaturii (b) în regimul de tranziție ($\tau = \frac{Kn}{n} \sqrt{\pi/8}$, $Kn \in \{0.02, 0.1, 1, 10\}$). Rezultatele obținute folosind modelele noastre sunt reprezentate cu linii negre continue, în timp ce punctele reprezintă rezultatele culese din lucrarea [39]. În aceste simulări am folosit $\Omega_{in} = 1/\sqrt{2}$ (cilindrul exterior este staționar), iar parametrul $\beta = R_{in}/R_{out}$ are valoarea 0.5. (Graficele sunt reproduse din lucrarea [19]).

cu următoarele soluții analitice [19]:

$$u_{Hidro}^{\hat{\phi}} = R^{-1} \frac{\Omega_{in}}{R_{in}^{-2} - R_{out}^{-2}} - R \frac{\Omega_{in} R_{in}^2}{R_{out}^2 - R_{in}^2}, \quad (123a)$$

$$T_{Hidro} = T_w + \frac{\mu}{\kappa} \frac{\Omega_{in}^2}{R_{in}^{-2} - R_{out}^{-2}} \left[\frac{R_{in}^{-2} - R^{-2}}{R_{in}^{-2} - R_{out}^{-2}} - \frac{\ln(R/R_{in})}{\ln(R_{out}/R_{in})} \right], \quad (123b)$$

unde T_w reprezintă temperatura cilindrului iar Ω_{in} reprezintă viteza unghiulară a cilindrului interior (cilindrul exterior este în repaus). În regimul balistice, soluțiile pentru $u^{\hat{\phi}}$ și T sunt [19]:

$$u_{bal}^{\hat{\phi}} = \frac{n_w \Omega_{in} R}{2\pi n(R)} e^{-\tilde{R}_{in}^2} \left\{ \arcsin \frac{R_{in}}{R} - \frac{R_{in}}{R} \sqrt{1 - \frac{R_{in}^2}{R^2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{\tilde{R}^3} [I_0(\tilde{R}) + 2I_1(\tilde{R})] \right\}, \quad (124a)$$

$$T_{bal} = T_w - \frac{m}{3} (u^{\hat{\phi}})^2 + \frac{n_w T_w \tilde{R}^2}{3\pi n(R)} e^{-\tilde{R}_{in}^2} \left[\theta_{\max} - \frac{R_{in}}{R} \cos \theta_{\max} + \frac{\sqrt{\pi}}{\tilde{R}} (I_0 + 2I_1) \right], \quad (124b)$$

unde $\theta_{\max} = \arcsin(R_{\text{in}}/R)$ iar notația I_n se referă la următoarele integrale:

$$I_n \equiv I_n(\tilde{R}) = \int_0^{\tilde{R}_{\text{in}}} \frac{\zeta^{2n+1} d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2/\tilde{R}^2}} e^{\zeta^2} \text{erf} \zeta. \quad (125)$$

În fig. 16, 17 și 18 am reprezentat profilele vitezei (a) și temperaturii (b) între cei doi cilindri pentru regimurile hidrodinamic, balistic, respectiv de tranziție. În toate regimurile, modelele noastre reproduc cu mare acuratețe rezultatele de referință.

Elementul cheie care a dus la buna concordanță între rezultatele noastre și cele de referință în special în regimul rarefiat (valori mari ale lui Kn) a fost utilizarea cuadraturii Gauss-Hermite pe semi-spațiu introdusă în lucrarea [64]. Mai multe detalii referitoare la rezultatele noastre obținute pentru curgerea Couette circulară se pot găsi în articolul [19], acestea fiind diseminate prin prezentările orale [21, 26, 27].

7.2 Transferul termic pentru diferite geometrii

Problema transferului termic în regim de rarefacție este una fundamentală, având implicații în construirea și optimizarea canalelor de răcire a componentelor microelectronice. Am studiat această problemă în trei geometrii diferite: între pereți plan-paraleli (cazul cartezian), între cilindri coaxiali (cazul cilindric) și între sfere concentrice (cazul sferic). Geometriile aferente acestor probleme sunt reprezentate schematic în fig. 19.

Pentru geometria carteziană am considerat axa z perpendiculară pe plăcile paralele, curgerea fiind omogenă după direcțiile x și y , ecuația Boltzmann fiind dată de relația (115) cu $F^i = 0$. În cazul cilindric, am utilizat triada (121), ecuația Boltzmann fiind dată de relația (122). În cazul sferic, elementul de linie (116) se scrie:

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2), \quad (126)$$

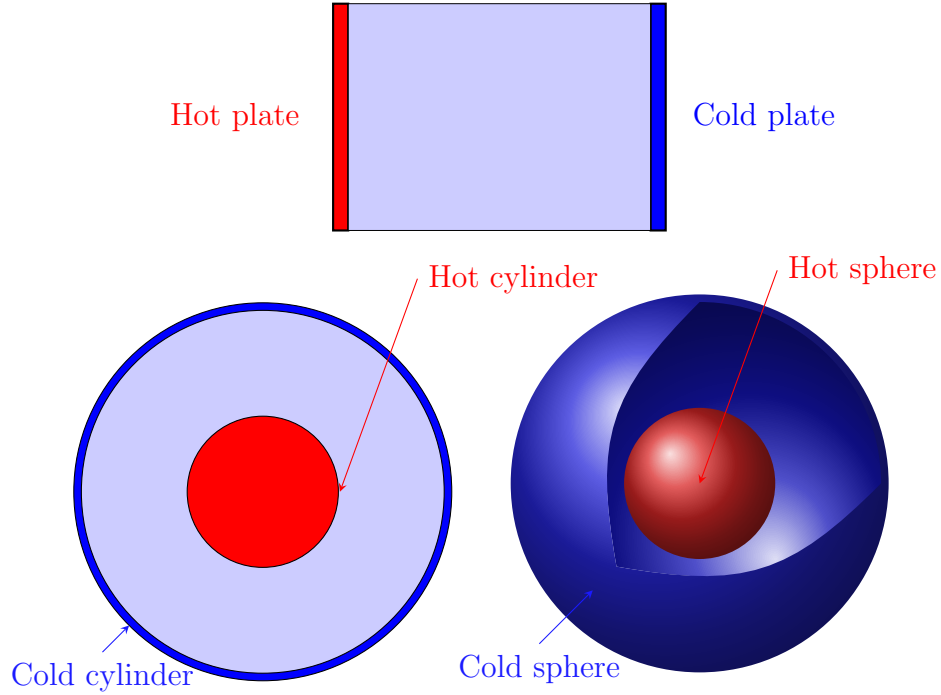


Figura 19: Geometriile corespunzătoare transferului termic între plăci plan paralele, cilindri coaxiali și sfere concentrice.

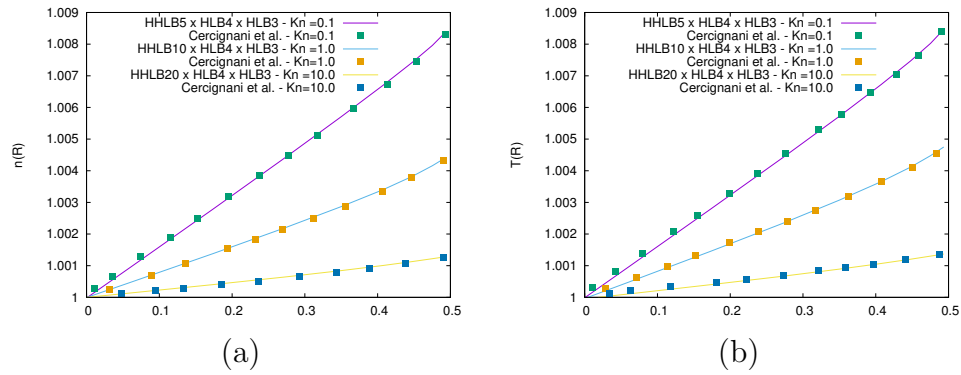


Figura 20: Profilele densității (a) și temperaturii (b) în cazul transferului termic între plăci plan-paralele aflate la temperaturile $T_1 = 1$ și $T_2 = 1.01$. Rezultatele de referință sunt preluate din lucrarea [40].

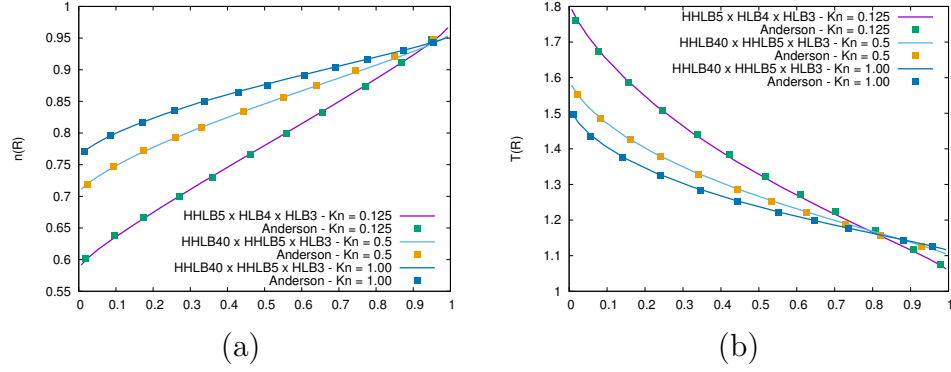


Figura 21: Profilele densității (a) și temperaturii (b) în cazul transferului termic între cilindri coaxiali aflați la temperaturile $T_1 = 2$ și $T_2 = 1$. Rezultatele de referință sunt preluate din lucrarea [41].

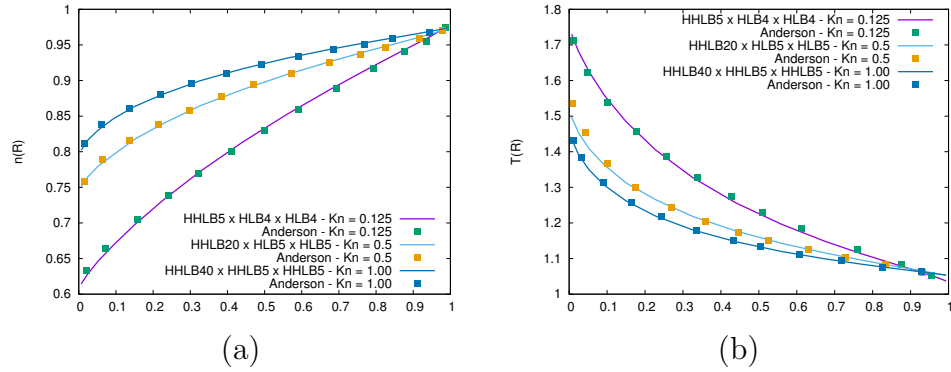


Figura 22: Profilele densității (a) și temperaturii (b) în cazul transferului termic între sfere concentrice aflate la temperaturile $T_1 = 2$ și $T_2 = 1$. Rezultatele de referință sunt preluate din lucrarea [41].

o triadă convenabilă fiind:

$$e_{\hat{r}} = \partial_r, \quad e_{\hat{\vartheta}} = r^{-1} \partial_{\vartheta}, \quad e_{\hat{\phi}} = \frac{r^{-1}}{\sin \vartheta} \partial_{\phi}. \quad (127)$$

Ecuția Boltzmann în formă conservativă (117) devine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \frac{p^{\hat{r}}}{m} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{mr} \left[\left((p^{\hat{\theta}})^2 + (p^{\hat{\phi}})^2 \right) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p^{\hat{r}}} - p^{\hat{r}} \left(\frac{\partial(\tilde{f} p^{\hat{\theta}})}{\partial p^{\hat{\theta}}} + \frac{\partial(\tilde{f} p^{\hat{\phi}})}{\partial p^{\hat{\phi}}} \right) \right] \\ = -\frac{1}{\tau} (\tilde{f} - \tilde{f}^{(\text{eq})}), \end{aligned} \quad (128)$$

unde am considerat curgerea omogenă după unghiurile ϑ și ϕ iar $\tilde{f} = f r^2 \sin \vartheta$ și $\tilde{f}^{(\text{eq})} = f^{(\text{eq})} r^2 \sin \vartheta$. Deoarece lucrăm în planul ecuatorial, $\vartheta = \pi/2$.

În cazul plăcilor plan-paralele, am comparat rezultatele obținute cu modelele noastre bazate pe cuadraturi Gauss-Hermite pe semi-spațiu cu cele obținute anterior în lucrarea [40]. În fig. 20 se poate vedea buna concordanță între rezultatele noastre și cele de referință.

În cazul cilindrilor coaxiali, fig. 21 ilustrează validarea rezultatelor noastre în raport cu rezultatele prezentate în lucrarea [41]. Cazul sferelor concentrice este de asemenea validat folosind rezultatele din lucrarea [41], comparația cu rezultatele noastre fiind ilustrată în fig. 22.

De asemenea, am validat rezultatele noastre considerând soluțiile analitice corespunzătoare regimurilor hidrodinamic și balistic, aceste validări fiind raportate în prezentările orale [21, 29].

7.3 Cavitata de tip element cilindric cu capac glisant

Problema cavității cu capac glisant constituie unul dintre testele de validare de bază pentru schemele numerice folosite în simulări hidrodinamice. Majoritatea studiilor de acest tip sunt făcute pe cavități dreptunghiulare, având pereții plani. Un neajuns al acestei abordări este dificultatea producerii stării staționare corespunzătoare valorilor mari ale vitezei capacului glisant în labo-

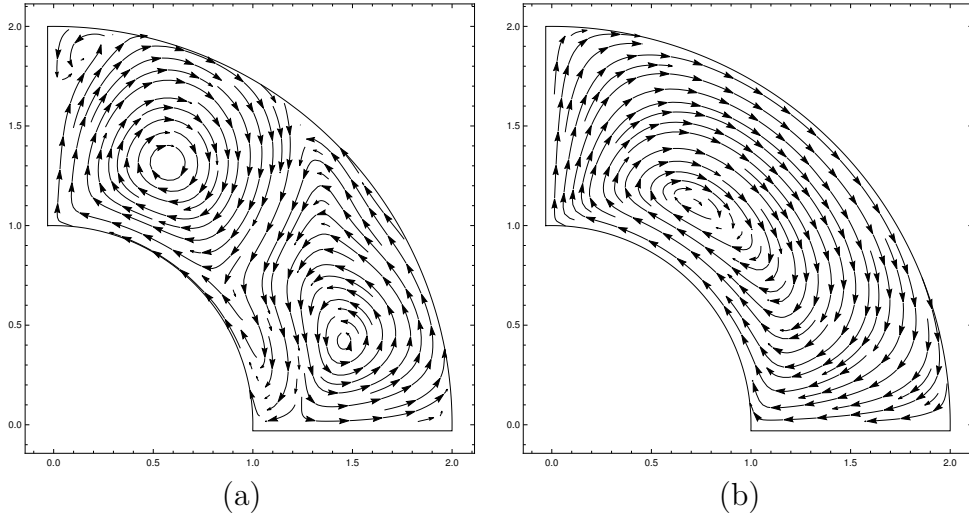


Figura 23: Liniile de curent pentru cazul când $\Delta\varphi = 90^\circ$ iar $\Omega_{\text{in}}^{\hat{\varphi}} = 1$. Razele cilindrilor sunt $R_{\text{in}} = 1$, $R_{\text{out}} = 2$, iar cilindrul exterior este în repaus. Timpul de relaxare este $\tau = 0.001$ (a) și $\tau = 0.1$ (b).

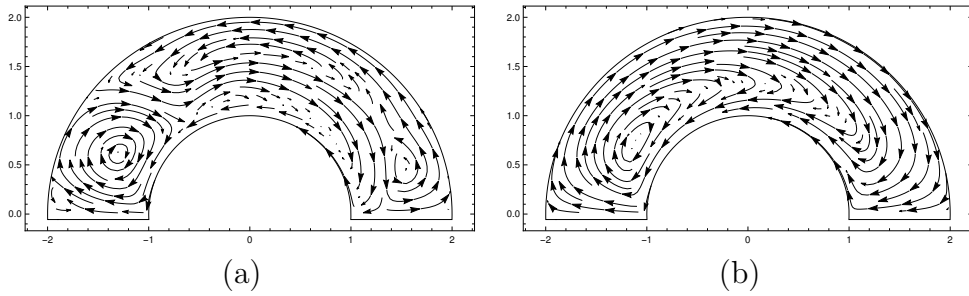


Figura 24: Liniile de curent pentru cazul când $\Delta\varphi = 180^\circ$ iar $\Omega_{\text{in}}^{\hat{\varphi}} = 1$. Razele cilindrilor sunt $R_{\text{in}} = 1$, $R_{\text{out}} = 2$, iar cilindrul exterior este în repaus. Timpul de relaxare este $\tau = 0.001$ (a) și $\tau = 0.1$ (b).

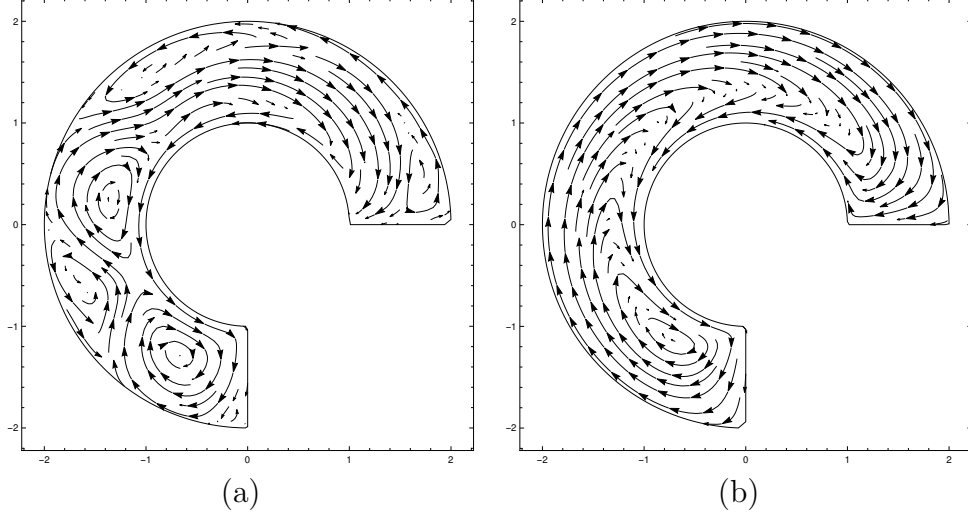


Figura 25: Liniile de curent pentru cazul când $\Delta\varphi = 270^\circ$ iar $\Omega_{\text{in}}^\varphi = 1$. Razele cilindrilor sunt $R_{\text{in}} = 1$, $R_{\text{out}} = 2$, iar cilindrul exterior este în repaus. Timpul de relaxare este $\tau = 0.001$ (a) și $\tau = 0.1$ (b).

rator. În cazul propus de noi, cavitatea este mărginită de doi cilindri coaxiali de raze R_1 și R_2 , respectiv de doi pereți radiali corespunzând unei deschideri azimutale $\Delta\varphi$. Capacul glisant este cilindrul interior, care se rotește în jurul axei proprii cu viteza unghiulară Ω_{in} . Astfel de experimente pot fi realizate cu ușurință în laborator, chiar și pentru valori mari ale lui Ω_{in} .

Pentru simularea acestei probleme, am considerat ecuația Boltzmann în coordonate cilindrice (122), la care am adăugat termenul de advecție corespunzător direcției φ (în cazul cavității cu capac glisant, curgerea nu mai este omogenă după această direcție):

$$\partial_t \tilde{f} + \frac{p^{\hat{R}}}{mR} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial R} + \frac{p^\varphi}{mR} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} + \frac{1}{mR} \left[(p^\varphi)^2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p^{\hat{R}}} - p^{\hat{R}} \frac{\partial (\tilde{f} p^\varphi)}{\partial p^\varphi} \right] = -\frac{1}{\tau} [\tilde{f} - \tilde{f}^{(\text{eq})}]. \quad (129)$$

Pentru această problemă am considerat studiul structurii vârtejurilor care apar în interiorul cavității în raport cu unghiul de deschidere $\Delta\varphi$ și cu timpul de relaxare $\tau = \text{Kn} = \text{const}$. Figurile 23, 24 și 25 ilustrează liniile de curent

corespunzătoare valorilor $\Delta\varphi = 90^\circ$, 180° , respectiv 270° , pentru $\tau = 10^{-3}$ (regim hidrodinamic) și $\tau = 0.1$ (regim ușor rarefiat). Se observă că la $\tau = 10^{-3}$ numărul de vârtejuri crește pe măsură ce crește $\Delta\varphi$, în timp ce pentru un $\Delta\varphi$ constant, numărul de vârtejuri se reduce la 1 când $\tau = 0.1$. Aceste rezultate sunt în concordanță cu observații similare făcute în cazul cavității carteziene [65]. În toate cazurile, cilindrul interior glisează cu viteza $\Omega_{\text{in}} = 1$.

Rezultatele de mai sus au fost diseminate prin prezentarea orală [27].

Bibliografie

- [1] V. E. Ambruș, R. Blaga, *Relativistic Rotating Boltzmann Gas Using the Tetrad Formalism*, Annals of West University of Timisoara - Physics **58** (2015) 89–108, DOI:10.1515/awutp-2015-0211.
- [2] V. E. Ambruș, I. I. Cotăescu, *Maxwell-Jüttner distribution for rigidly rotating flows in spherically symmetric spacetimes using the tetrad formalism*, Phys. Rev. D **94** (2016) 085022, DOI:10.1103/PhysRevD.94.085022.
- [3] R. Blaga, V. E. Ambruș, *High-order quadrature-based lattice Boltzmann models for the flow of ultrarelativistic rarefied gases*, în evaluare la Phys. Rev. C (arXiv:1612.01287 [physics.flu-dyn]).
- [4] V. E. Ambruș, E. Winstanley, *Point splitting in quantum field theory on curved spaces*, The joint meeting on quantum fields and nonlinear phenomena, Martie 09 - 13, 2016, Sinaia, România. [Descărcați prezentarea].
- [5] R. Blaga, V. E. Ambruș, *Quadrature-based lattice Boltzmann model for simulating relativistic flows*, TIM 15-16 Physics Conference, Mai 26 - 28, 2016, Timișoara, România. [Descărcați prezentarea].

- [6] V. E. Ambruş, *Quantum-induced non-equilibrium effects in thermal states undergoing rigid rotation*, TIM 15-16 Physics Conference, Mai 26 - 28, 2016, Timișoara, România. [Descărcați prezentarea].
- [7] V. E. Ambruş, I. I. Cotăescu, *Rigidly rotating Maxwell-Jüttner states on spherically symmetric space-times using the tetrad formalism*, TIM 15-16 Physics Conference, Mai 26 - 28, 2016, Timișoara, România. [Descărcați prezentarea].
- [8] N. Nicolaevici, *Bouncing Dirac particles: Compatibility between MIT boundary conditions and Thomas precession*, TIM 15-16 Physics Conference, Mai 26 - 28, 2016, Timișoara, România. [Descărcați prezentarea].
- [9] S. Busuioc, V. E. Ambruş, V. Sofonea, *Thermal Lattice Boltzmann models on GPGPUs*, HPC Applications to Turbulence and Complex Flows, October 10 - 14, 2016, Rome, Italy. [Descărcați prezentarea].
- [10] R. Blaga, V. E. Ambruş, *Simulating relativistic flows with a Lattice Boltzmann model based on quadratures*, HPC Applications to Turbulence and Complex Flows, October 10 - 14, 2016, Rome, Italy. [Descărcați prezentarea].
- [11] V. E. Ambruş, *Lattice Boltzmann models based on Gauss quadratures*, Workshop "Lattice Boltzmann 2016", Iunie 9 - 10, 2016, University of Rome "Tor Vergata", Italia. [Descărcați prezentarea].
- [12] V. E. Ambruş, *Non-equilibrium effects induced by quantum corrections in rigidly-rotating thermal states*, The 3rd Conference of the Polish Society on Relativity POTOR 2016, Septembrie 25 - 29, 2016, Cracovia, Polonia. [Descărcați posterul].
- [13] V. E. Ambruş, I. I. Cotăescu, *Rigidly rotating Maxwell-Jüttner states on spherically symmetric space-times*, The 3rd Conference of the Polish

Society on Relativity POTOR 2016, Septembrie 25 - 29, 2016, Cracovia, Polonia. [Descărcați posterul].

- [14] R. Blaga, V. E. Ambruș, *Quadrature-based Lattice Boltzmann Model for Relativistic Flows*, AIP Conf. Proc. 1796 (2017) 020010, DOI: 10.1063/1.4972358.
- [15] V. E. Ambruș, *Anderson-Witting transport coefficients for flows in general relativity*, AIP Conf. Proc. 1796 (2017) 020006, DOI: 10.1063/1.4972354.
- [16] V. E. Ambruș, *Quantum non-equilibrium effects in rigidly-rotating thermal states*, Phys. Lett. B **771** (2017) 151–156, DOI: 10.1016/j.physletb.2017.05.038.
- [17] V. E. Ambruș, E. Winstanley, *Thermal expectation values of fermions on anti-de Sitter space-time*, Classical Quant. Grav. **34** (2017) 145010.
- [18] V. E. Ambruș, *Study of transport coefficients in ultrarelativistic kinetic theory*, în evaluare la Phys. Rev. C (arXiv:1706.05310 [physics.flu-dyn]).
- [19] S. Busuioc, V. E. Ambruș, *Lattice Boltzmann models based on the vielbein formalism for the simulation of the circular Couette flow*, în evaluare la Phys. Rev. E (arXiv:1708.05944 [physics.flu-dyn]).
- [20] V. E. Ambruș, E. Winstanley, *Quantum corrections in thermal states of fermions on anti-de Sitter space-time*, acceptat pentru publicare în AIP Conf. Proc. (arXiv:1708.03148 [hep-th]).
- [21] S. Busuioc, V. E. Ambruș, *Lattice Boltzmann study of flows in non-Cartesian geometries using the vielbein formalism*, TIM 17 Physics Conference, Mai 25 - 27, 2017, Timișoara, Romania. [Descărcați prezentarea].

- [22] R. Blaga, V. E. Ambruş, *Relativistic shocks in non-Cartesian geometries*, TIM 17 Physics Conference, Mai 25 - 27, 2017, Timișoara, Romania. [Descărcați prezentarea].
- [23] V. E. Ambruş, E. Winstanley, *Quantum corrections in thermal states of fermions on anti-de Sitter spacetime*, TIM 17 Physics Conference, Mai 25 - 27, 2017, Timișoara, Romania. [Descărcați prezentarea].
- [24] R. Blaga, V. E. Ambruş, *Lattice Boltzmann Models For Relativistic Shocks*, DSFD-2017 (26th International Conference on Discrete Simulation of Fluid Dynamics), Iulie 10 - 14, 2017, Erlangen, Germany. [Descărcați prezentarea].
- [25] V. E. Ambruş, *Lattice Boltzmann Models For The Simulation Of Rarefied Flows In General Relativity Using Tetrad Fields*, DSFD-2017 (26th International Conference on Discrete Simulation of Fluid Dynamics) Iulie 10 - 14, 2017, Erlangen, Germany. [Descărcați prezentarea].
- [26] S. Busuioc, V. E. Ambruş, *Mixed Quadrature Lattice Boltzmann Models For The Simulation Of The Circular Couette Flow Using The Vielbein Formalism*, DSFD-2017 (26th International Conference on Discrete Simulation of Fluid Dynamics), Iulie 10 - 14, 2017, Erlangen, Germany. [Descărcați prezentarea].
- [27] V. E. Ambruş, S. Busuioc, V. Sofonea, *Lattice Boltzmann approach to fluid flow in a lid-driven cavity bounded by coaxial cylinders*, ICMMES-2017 (14th International Conference for Mesoscopic Methods in Engineering and Science) Iulie 17 - 21, 2017, Nantes, Franța. [Descărcați prezentarea]
- [28] V. E. Ambruş, V. Sofonea, R. Fournier, S. Blanco, *Force-driven rarefied flows between diffuse-reflecting boundaries*, ICMMES-2017 (14th International Conference for Mesoscopic Methods in Engineering and Science) Iulie 17 - 21, 2017, Nantes, Franța. [Descărcați prezentarea]

- [29] S. Busuioc, V. E. Ambruş, *Study of heat transfer in Cartesian, cylindrical and spherical geometries*, ICMMES-2017 (14th International Conference for Mesoscopic Methods in Engineering and Science) Iulie 17 - 21, 2017, Nantes, Franţa. [Descărcaţi prezentarea]
- [30] R. Blaga, V. E. Ambruş, *Shock propagation in Galilean and special relativity*, ICMMES-2017 (14th International Conference for Mesoscopic Methods in Engineering and Science) Iulie 17 - 21, 2017, Nantes, Franţa. [Descărcaţi posterul]
- [31] C. Y. Cardall, E. Endeve, A. Mezzacappa, Phys. Rev. D **88** (023011) 2013.
- [32] V. E. Ambruş, V. Sofonea, Phys. Rev. E **86** (2012) 016708.
- [33] P. Romatschke, M. Mendoza, S. Succi, Phys. Rev. C **84** (2011) 034903.
- [34] S. Balay, S. Abhyankar, M. F. Adams, J. Brown, P. Brune, K. Buschelman, L. Dalcin, V. Eijkhout, W. D. Gropp, D. Kaushik, M. G. Knepley, L. C. McInnes, K. Rupp, B. F. Smith, S. Zampini, H. Zhang, and H. Zhang, *PETSc Users Manual*, (Argonne National Laboratory, 2016), Technical Report ANL-95/11 – Revision 3.7, *PETSc Web page*: <http://www.mcs.anl.gov/petsc>.
- [35] S. Balay, W. D. Gropp, L. C. McInnes, and B. F. Smith, *Efficient Management of Parallelism in Object Oriented Numerical Software Libraries*, Ed. E. Arge, A. M. Bruaset, and H. P. Langtangen (Birkhäuser Press, 1997), 163–202.
- [36] I. Bouras, E. Molnár, H. Niemi, Z. Xu, A. El, O. Fochler, C. Greiner, D. H. Rischke, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 032301.
- [37] I. Bouras, E. Molnár, H. Niemi, Z. Xu, A. El, O. Fochler, C. Greiner, D. H. Rischke, Nucl. Phys. A **830** (2009) 741c.

- [38] I. Bouras, E. Molnár, H. Niemi, Z. Xu, A. El, O. Fochler, C. Greiner, D. H. Rischke, Phys. Rev. C **82** (2010) 024910.
- [39] K. Aoki, H. Yoshida, T. Nakanishi, and A. L. Garcia, Phys. Rev. E **68** (2003) 016302.
- [40] P. Bassanini, C. Cercignani and C. D. Pagani, Int.J. Heat Transfer, **10** (1967) 447-460.
- [41] D. G. M. Anderson, J. Plasma Physics **1** (1967) 255-265.
- [42] J. D. Bjorken, Phys. Rev. D **27** (1983) 140.
- [43] J. J. Friess, S. S. Gubser, G. Michalogiorgakis, S. S. Pufu, JHEP04(2007)080.
- [44] J. Noronha, G. S. Denicol, Phys. Rev. D **92** (2015) 114032.
- [45] C. Cercignani, G. M. Kremer, *The relativistic Boltzmann equation: theory and applications*, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland (2002).
- [46] J. A. Wheeler, C. W. Misner, K. S. Thorne, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, New York, USA (1973).
- [47] C. Marle, Annales de l'I.H.P. Physique théorique **10** (1969) 67.
- [48] J. L. Anderson, H. R. Witting, Physica **74** (1974) 466.
- [49] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook, Phys. Rev. **94** (1954) 511-525.
- [50] L. Rezzolla and O. Zanotti, *Relativistic hydrodynamics* (Oxford University Press, Oxford, 2013).
- [51] C. Eckart, Phys. Rev. **58** (1940) 919.

- [52] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid mechanics, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, UK, 1987.
- [53] I. P. Mysovskikh, Soviet Math. Dokl. **36**, 229 (1988).
- [54] F. B. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis*, second edition (Dover Publications, 1987).
- [55] B. Shizgal, Spectral Methods in Chemistry and Physics: Applications to Kinetic Theory and Quantum Mechanics (Scientific Computation) (Springer, 2015).
- [56] P. Romatschke, Phys. Rev. D **85** (2012) 065012.
- [57] B. V. Jacak, B. Müller, Science **337** (2012) 310.
- [58] P. Romatschke, Int. J. Mod. Phys. E **19** (2010) 1.
- [59] G. Denicol, U. Heinz, M. Martinez, J. Noronha, M. Strickland, Phys. Rev. D **90** (2014) 125026.
- [60] V. E. Ambruş and E. Winstanley, Phys. Lett. B **734** (2014) 296.
- [61] G. Duffy and A. C. Ottewill, Phys. Rev. D **67** (2003) 044002.
- [62] I. I. Cotăescu, Rom. J. Phys. **52** (2007) 895–940.
- [63] D. R. Willis, Phys. Fluids **8**, 1908 (1965).
- [64] V. E. Ambruş and V. Sofonea, J. Comput. Phys. **316**, 760–788 (2016).
- [65] S. Naris, D. Valougeorgis, Phys. Fluids **17** (2005) 097106.

Director de proiect,

Lect. dr. Victor E. Ambruş