

Raport științific sintetic

privind implementarea proiectului PN-III-P1-1.1-PD-2016-1423, intitulat

Corecții cuantice în sisteme mezoscopice

în perioada mai 2018–iunie 2020

Etapele de implementare a proiectului

Etapa 1	Rezultate livrate pe etapa: - Un articol ISI; - O prezentare la o conferință internațională.	Data raportare: 07/12/2018	Buget etapă (lei): 83.295,00
Obiectiv O1	Denumire Obiectiv: Corecții cuantice pe spațiul Minkowski în prezența frontierelor		
Activitate A1.1	Denumire Activitate: A1.1. Analiza hidrodinamică a tensorului energie-impuls (TEI) corespunzător câmpului Klein-Gordon cuantificat în prezența frontierelor		
Activitate A1.2	Denumire Activitate: A1.2. Analiza hidrodinamică a TEI corespunzător câmpului Dirac cuantificat în prezența frontierelor		
Etapa 2	Rezultate livrate pe etapa: - Un articol ISI; - O prezentare la o conferință internațională.	Data raportare: 06/12/2019	Buget etapă (lei): 124.943,00 lei
Obiectiv O2	Denumire Obiectiv: Corecții cuantice pe spații curbe		
Activitate A2.1	Denumire Activitate: A2.1. Analiză comparativă a TEI obținut folosind teoria cuantică de câmp și teoria cinetică a gazelor pe spațiul anti-de Sitter.		
Activitate A2.2	Denumire Activitate: A2.2. Analiză comparativă a TEI obținut folosind teoria cuantică de câmp și teoria cinetică a gazelor pe Universul Static al lui Einstein (ESU).		
Obiectiv O3	Denumire Obiectiv: Teoria cinetică pe spațiul Minkowski în prezența frontierelor (2019)		
Activitate A3.1	Denumire Activitate: A3.1. Model lattice Boltzmann pentru curgeri în interiorul unui cilindru.		
Etapa 3	Rezultate livrate pe etapa: - Un articol ISI.	Data raportare: 30/06/2020	Buget etapă (lei): 41.647,00 lei
Obiectiv O3	Denumire Obiectiv: Teoria cinetică pe spațiul Minkowski în prezența frontierelor (2020)		
Activitate A3.1	Denumire Activitate: A3.2. Analiza cinetică a gazelor Bose-Einstein în prezența frontierelor.		
Activitate A3.2	Denumire Activitate: A3.3. Analiza cinetică a gazelor Fermi-Dirac în prezența frontierelor.		

1 Verificarea stadiului livrabilelor

1.1 În cadrul primei etape:

- Un articol ISI Proceedings Paper publicat [1];
- O prezentare orală la o conferință internațională [2].

1.2 În cadrul etapei a doua:

- Un articol ISI publicat [3];
- Un articol ISI în evaluare [8];
- Un articol ISI Proceedings Paper publicat [10];
- Un articol ISI Proceedings Paper în evaluare [4];
- Două prezentări orale la conferințe internaționale [5, 6];
- Un capitol de carte în evaluare [7].

1.3 În cadrul etapei a treia:

- Un articol ISI în evaluare [9].
- O prezentare orală la o conferință internațională [11].

Etapa	Angajat	Realizat	Grad de îndeplinire
Etapa 1	O lucrare ISI; O prezentare la o conferință internațională	O lucrare ISI <i>Article; Proceedings Paper</i> [1]; O prezentare orală la o conferință internațională [2].	Rezultat livrat.
Etapa 2	O lucrare ISI; O prezentare la o conferință internațională	O lucrare ISI publicată [3]; O lucrare ISI în evaluare [8]; O lucrare ISI <i>Proceedings</i> publicată [10]; O lucrare ISI <i>Proceedings</i> în evaluare [4]; Un capitol de carte în evaluare [7]; O prezentare orală [6] și un poster [5] la conferințe internaționale.	Rezultat livrat.
Etapa 3	O lucrare ISI	O lucrare ISI în evaluare [9]; Un poster la o conferință internațională [11]	Rezultat în curs de livrare
Toate etapele	3 lucrări ISI; 2 prezentări la conferințe internaționale	O lucrare ISI publicată [3]; Două lucrări ISI în evaluare [8, 9]; Două lucrări ISI <i>Article; Proceedings Paper</i> publicate [1, 10]; O lucrare ISI <i>Article; Proceedings paper</i> în evaluare [4]; Un capitol de carte în evaluare [7]; Două prezentări orale [2, 6] și două postere [5, 11] la conferințe internaționale.	Rezultat în curs de livrare

Raport de activitate

În cadrul experimentelor de ciocnire a ionilor grei ultrarelativiști, o parte a energiei disponibile în centrul de masă al ciocnirii este eliberată prin crearea de materie sub forma perechilor particulă-antiparticulă. În timp ce majoritatea constituenților nucleelor care se ciocnesc își continuă deplasarea pe direcția înainte, în urma acestora rămâne un mediu extrem de dens și de fierbinte, a cărui temperatură inițială e aproximativ între 300–600 MeV ($3,48-6,96 \times 10^{12}$ K) [12]. Printre particulele care alcătuiesc acest mediu se numără și quarcurile *up* (*u*) și *down* (*d*). Aceste particule reprezintă constituenții elementari ai protonilor (*uud*) și neutronilor (*udd*), fiind la temperaturi normale confinați în stări hadronice caracterizate prin neutralitatea de culoare. În teoria cromodinamicii cuantice, zidurile acestor veritabile “închisori” hadronice dispar când temperatura depășește o valoare critică, $k_B T_{\text{crit}} \simeq 150$ MeV ($T_{\text{crit}} \simeq 1,74 \times 10^{12}$ K), astfel încât quarcurile componente devin libere. În urma procesului de deconfinare, quarcurile libere, împreună cu gluonii care mediază interacțiunea tare dintre acestea, formează o nouă stare de materie, cunoscută sub numele de *plasmă quarc-gluon* [13, 14]. Durata de viață a acestui sistem este extrem de scurtă ($\Delta\tau \simeq 3 \times 10^{-23}$ s), însă amprenta existenței sale rămâne înghețată în proprietățile hadronilor care se formează datorită răcirii sistemului sub T_{crit} (procesul purtând numele de *hadronizare*). Studiul plasmei quarc-gluon atât din punct de vedere teoretic, cât și experimental, reprezintă una dintre cele mai importante abordări pentru înțelegerea proprietăților fundamentale ale interacțiunii tari, guvernate de teoria cromodinamicii cuantice.

În urma coliziunilor necentrale, momentul cinetic unghiular măsurat în sistemul centrului de masă al celor două nuclee care se ciocnesc atinge valori imense, care se transferă mediului format în urma proiectilelor sub formă de vorticitate. Astfel, plasma quarc-gluon formată în experimentele de coliziune a ionilor grei atinge cele mai mari valori ale vorticității ($\omega \simeq 10^{22} \text{ s}^{-1}$) obținute vreodată experimental [15]. Prin cuplajul spin-orbită prezis de ecuația lui Dirac, vorticitatea mediului este transferată constituenților elementari ai plasmei quarc-gluon, polarizându-i constituenții pe direcția vorticității. Această polarizare a fost evidențiată prin investigarea canalului de dezintegrare $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ a hiperonilor Λ , rezultatele experimentale ridicând o importantă provocare la adresa teoreticienilor de a le explica prin modele fizice ale principalelor mecanisme care pot influența valoarea polarizării.

Deși numărul de constituenți e în jur de doar 10^4-10^5 , plasma quarc-gluon creată în acceleratori se comportă ca un sistem mezosopic care, în ciuda așteptărilor, prezintă cea mai mică valoare a raportului dintre vâscozitatea dinamică η și densitatea de entropie s , $\eta/s \gtrsim \hbar/4\pi k_B$ [16]. Deși plasma quarc-gluon are cele mai apropiate caracteristici ale fluidului perfect, fenomenele disipative și de neechilibru au un rol semnificativ în evoluția acesteia datorită timpului său de viață, care este extrem de scurt. Din acest motiv, ecuațiile Euler ale fluidului perfect relativist (de exemplu, cele utilizate în modelul lui Bjorken al expansiunii longitudinale invariantă la boost-uri [17]) nu sunt suficiente, descrierea evoluției plasmei quarc-gluon necesitând o abordare bazată pe teoria cinetică relativistă [18, 19].

În teoria cinetică relativistă “tradițională” [20], polarizarea unui fluid nu este în mod normal luată în considerare. Pentru un tratament corect al polarizării la nivel mezosopic, diferite extensii avându-și originea în teoria cuantică a câmpului au fost propuse. În lucrările [21, 22], punctul de plecare este ecuația Wigner, urmărindu-se construcția unei teorii hidrodinamice coerente a fluidelor cu spin. În lucrarea [23] este propusă extinderea la nivel cuantic a operatorului statistic cu o bucată care include operatorul de spin. Un alt exemplu este lucrarea [24] unde operatorul statistic este extins prin includerea unui termen $\mu_A \widehat{Q}_A$ care conține operatorul de sarcină axială, \widehat{Q}_A , modelând excesul de chiralitate cu ajutorul potențialului chimic axial, μ_A .

În cadrul acestui proiect de cercetare, am propus o extensie a teoriei cuantice de câmp la temperaturi finite prin includerea unui termen $\mu_H \widehat{Q}_H$ în operatorul statistic, unde \widehat{Q}_H reprezintă operatorul de sarcină de helicitate iar potențialul chimic helical μ_H caracterizează excesul de helicitate din sistem. Avantajul acestei construcții este evident deoarece sarcina de helicitate \widehat{Q}_H , asociată curentului de helicitate $J_H^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu h \psi + \overline{h \psi} \gamma^\mu \psi$, este conservată pentru orice masă a câmpului fermionic ψ , spre deosebire de sarcina axială, \widehat{Q}_A , care este conservată numai în limita chirală (a fermionilor de masă nulă). Acest aspect este extrem de important în contextul plasmei quarc-gluon, întrucât quarcurile capătă, pe lângă masa lor intrinsecă (care este mică dar nenulă în cazul quarcurilor u și d), și o masă efectivă mult mai mare când sunt confinați în urma hadronizării.

Conceptele de potențial chimic și curent de helicitate sunt introduse în lucrarea [8]. În lucrarea [3] sunt discutate proprietățile câmpului Dirac în rotație și la temperaturi finite pentru cazul maselor nenule. Influența potențialului chimic de helicitate asupra diagramei de fază a simetriei chirale este discutată în lucrarea [9]. Pe scurt, aceste lucrări pun în evidență o serie de proprietăți ale fermionilor “helicali.” În primul rând, se evidențiază că sarcina electrică (vectorială), cea chirală (axială) și cea helicală formează o triadă în cadrul teoriei câmpului Dirac liber și fără masă, când toți cei trei operatori de sarcină sunt conservați. Efectele potențialului chimic de helicitate sunt relevate la nivelul stărilor în rotație rigidă la temperaturi finite. În particular, noi legi constitutive pentru curenții asociați celor trei tipuri de sarcină (vectorială, axială și helicală) sunt evidențiate la vorticitate nenulă, care dau naștere așa-numitelor efecte vorticalo-helicale. Robustețea legilor în cazul când masa e nenulă (de data aceasta, impunând ca potențialul chimic axial să se anuleze, $\mu_A = 0$) e discutată în contextul parametrilor corespunzători plasmei quarc-gluon creată în urmă coliziunii ionilor grei. În fine, dualitatea dintre potențialul chimic helical, μ_H , și cel vectorial, μ_V (corespunzător sarcinii electrice), este confirmată în cadrul diagramei care descrie tranziția de fază chirală, în contextul modelului σ liniar cu două arome de quarcuri, la temperatură nulă și la temperatură finită [9].

Acest raport sintetic se concentrează cu precădere pe rezultatele obținute în cadrul prezentului proiect care au fost deja trimise spre publicare. În plus, vor fi prezentate rezultatele preliminare care vor forma nucleul a trei articole care exploatează direcțiile finanțate în cadrul acestui grant și care sunt momentan în lucru.

Secțiunea 2 din partea tehnică a raportului prezintă o sinteză a articolelor [3, 8] referitoare la introducerea sarcinii de helicitate ca și parametru termodinamic în ansamblurile de particule fermionice la temperaturi finite.

Secțiunea 3 prezintă rezultatele principale referitoare la influența potențialului chimic helical asupra ruperii spontane a simetriei chirale în modelul sigma liniar cuplat cu quarcuri [25, 26] (doar cazul dubletului (u, d) este luat în considerare), care poate fi considerat ca un model al cromodinamicii cuantice în limita energiilor joase.

Secțiunea 4 prezintă detaliile matematice ce fundamentează, din punctul de vedere al hidrodinamicii și al teoriei cinetice, teoria undelor helicalo-vorticale, care se pot propaga chiar și în absența unui dezechilibru helical persistent, atâta timp cât potențialul chimic helical μ_H poate fluctua. Predicția referitoare la existența acestor unde a fost făcută în lucrarea [8] iar analiza detaliată la nivelul ecuațiilor hidrodinamice este momentan în curs de finalizare [27].

Secțiunea 5 tratează o altă fațetă a transportului anomal, care reflectă conexiunea dintre legile constitutive ale curenților anomali și așa-numitele anomalii cuantice, reprezentând violări ale legilor de conservare stabilite la nivelul teoriei libere datorate interacțiunilor. Legătura dintre anomaliile axiale, relevate la nivelul diagramelor triunghiulare care conțin cel puțin un vertex axial, și efectele vorticale chirale [28] este cunoscută [29]. Deoarece includerea elementului helical induce noi termeni în legile de transport anomal, este firească căutarea anomaliilor la nivelul diagramelor triunghiulare care conțin vertexul helical.

Secțiunea 6 discută problema frontierelor în sistemele mezoscopice în rotație. O problemă deosebit de subtilă este corelarea parametrilor frontierei cu proprietățile gazului în vecinătatea acesteia. La nivel macroscopic, gazul poate fi descris prin parametrii termodinamici cum ar fi temperatura, presiunea hidrostatică (izotropă) și densitatea de sarcină. În plus, în cazul când gazul nu se găsește în echilibru termodinamic local, pot apărea fluxuri de căldură sau de sarcină de neechilibru, care nu se anulează în sistemul propriu local, precum și contribuții anizotrope la presiunea gazului. Prezența frontierei afectează toate aceste proprietăți ale gazului prin caracteristicile sale. În echilibru termodinamic global, proprietățile peretelui sunt transferate gazului în totalitate. Când însă sistemul nu se regăsește într-o astfel de stare, poate apărea o discrepanță între proprietățile gazului și ale peretelui, chiar și la distanțe infinitezimale de acesta. Din perspectiva teoriei cinetice a gazelor, această discrepanță poate fi explicată considerând că interacțiunea cu frontiera poate fi transmisă gazului numai prin intermediul fluxului de particule emis de aceasta înapoi spre fluid. Deoarece fluxul incident asupra frontierei rămâne în esență arbitrar, amprenta peretelui asupra proprietăților macroscopice va fi doar parțială, întrucât acestea sunt determinate atât de particulele care revin înspre fluid dinspre perete, cât și de cele care călătoresc înspre acesta. În prima parte a acestei secțiuni sunt expuse câteva detalii ale unui model cinetic pentru amestecul de bozoni și fermioni, bazat pe aproximația timpului de relaxare, care momentan este în fază preliminară [30]. A doua parte a secțiunii conține detalii referitoare la legătura dintre condițiile pe frontieră și proprietățile stărilor termice ale câmpurilor cuan-

tice în vecinătatea frontierei. Rezultatele referitoare la câmpul Klein-Gordon (scalar) au fost prezentate la conferința Marcel-Grossmann MG-15 [2], fiind trimise spre publicare ca și contribuție în volumul de Proceedings al conferinței [4]. Analiza câmpului Dirac este încă în fază preliminară.

Ultima secțiune a acestui raport, secțiunea 7, prezintă detalii referitoare la analiza stărilor cuantice ale fermionilor în rotație la temperatură finită pe un spațiu-timp curbat. Importanța analizei teoriei cuantice de câmp pe spații curbe se datorează în primul rând conjecției corespondenței adS/CFT între gravitația cuantică descrisă folosind teoria stringurilor compactificată pe spațiul anti-de Sitter și teoriile conforme de câmp pe spațiul Minkowski [31], concluzii importante referitoare la proprietățile cromodinamicii cuantice pot fi trase prin analiza teoriilor Yang-Mills la temperaturi finite pe frontiera spațiilor asimptotic anti-de Sitter [16]. Un alt motiv ar fi referitor la înțelegerea efectelor cuplajului dintre gravitația clasică și teoriile cuantificate. Regularizarea sau renormarea teoriilor cuantice poate evidenția posibilele direcții în care teoria relativității generale a lui Einstein trebuie extinsă pentru a fi compatibilă cu acestea [32]. În fine, un al treilea motiv ar fi apariția unui nou tip de anomalii la nivelul teoriilor cuantice cuplate cu gravitația. Un exemplu bine-cunoscut este anomalia conformă, datorită căreia urma tensorului energie-impuls a unui câmp conform (fără masă) nu se mai anulează, primind corecții care depind de curbura spațiului [33]. Materialul din Sec. 7 prezintă pe scurt analiza stărilor fermionilor în rotație la temperaturi finite pe spațiul anti-de Sitter. Rezultatele preliminare au fost deja prezentate în cadrul conferinței POTOR-6 [6] și publicate în volumul de lucrări al acestei conferințe [10]. O analiză mai pe larg este încă în fază preliminară, urmând a fi trimisă spre publicare în lunile care urmează [34].

2 Câmpul Dirac în rotație și efectele vorticalo-helicale

Secțiunea aceasta prezintă detalii referitoare la studiul proprietăților stărilor termice ale câmpului Dirac în rotație rigidă folosind metoda timpului real în teoria cuantică de câmp la temperaturi finite (mai multe detalii se pot găsi în cartea [26]). Accentul în această secțiune va fi pus pe modelarea polarizării persistente în acest tip de sisteme folosind potențialul chimic helical (de helicitate), notat cu μ_H . Considerarea lui μ_H ca parametru termodinamic reprezintă cea mai deosebită inovație dezvoltată în cadrul proiectului de cercetare la care se referă prezentul raport de activitate. Pe lângă descrierea macroscopică a polarizării gazului fermionic, existența lui μ_H ca și grad de libertate termodinamic deschide poarta unui număr considerabil de aplicații. Câteva dintre acestea sunt influența asupra diagramei de fază în cromodinamica cuantică, undele helicalo-vorticale și anomaliile helicale în electrodinamica cuantică, care vor fi prezentate în secțiunile 3, 4, respectiv 5.

Secțiunea este structurată pe 3 subsecțiuni. Subsec. 2.1 introduce operatorul de helicitate, h , cu ajutorul căruia poate fi construit curentul și sarcina de helicitate, J_H^μ și Q_H , care se conservă pentru orice masă M a fermionilor liberi. Subsec. 2.2 prezintă sectoarele vectorial, axial și helical sub forma unei triade (triada VAH), relevând interpretarea fizică a acestora prin prisma ansamblului de particule și antiparticule helicale (sau chirale). O distincție fundamentală poate fi observată între curenții de sarcină $V/A/H$ la nivelul parității acestora la transformările de conjugare de sarcină (C), paritate (P) și inversie temporală (T). Un model clasic bazat pe teoria cinetică relativistă care ține cont de polarizarea particulelor la nivelul funcțiilor de distribuție este introdus în subsec. 2.3. Detaliile referitoare la analiza stărilor termice în rotație ale fermionilor liberi utilizând formalismul timpului real al teoriei cuantice de câmp la temperaturi finite este prezentat în subsec. 2.4. Construcția acestor stări se face cu ajutorul operatorului statistic $\hat{\rho}$ (căciula denotă operatorii care acționează în spațiul Fock). În această subsecțiune se consideră atât cazul când masa fermionilor este nulă ($M = 0$) și potențialul chimic axial μ_A este nenul, cât și cazul particulelor masive ($M > 0$), când $\mu_A = 0$ deoarece neconservarea curentului axial nu permite interpretarea potențialului chimic axial ca o mărime termodinamică. Efectele cuantice sunt evaluate prin comparația cu modelul cinetic introdus în subsec. 2.3.

Rezultatele prezentate în această secțiune se regăsesc în articolele [3, 8] și în capitolul de carte [7], fiind parțial diseminate prin posterul [11]. Lucrările mai sus menționate reprezintă contribuții aduse cu precădere în cadrul obiectivelor O1 și O3.

2.1 Curentul și sarcina de helicitate

Câmpul Dirac liber poate fi descris cu ajutorul acțiunii:

$$S_D = \int d^4x \mathcal{L}_D, \quad \mathcal{L}_D = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \overline{\partial_\mu\psi}\gamma^\mu\psi) - M\bar{\psi}\psi, \quad (1)$$

unde \mathcal{L} este Lagrangianul Dirac, M e masa cuantei de câmp, ψ este 4-spinorul Dirac, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ este adjuncta sa Dirac iar γ^μ reprezintă matricile γ . În reprezentarea Dirac, aceste matrici împreună cu $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ au următoarele expresii:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

unde σ^i reprezintă matricile Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Matricile de spin sunt

$$S^k = \frac{i}{8} \varepsilon^{0ijk} [\gamma_i, \gamma_j] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Pornind de la operatorul Pauli-Lubanski [35],

$$W^\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\lambda} M_{\alpha\beta} P_\lambda, \quad (5)$$

exprimat în funcție de operatorul de momentul cinetic total, $M_{\alpha\beta} = x_\alpha P_\beta - x_\beta P_\alpha + S_{\alpha\beta}$ ($S^{\alpha\beta} = \frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$), și al operatorului de impuls, $P_\lambda = i\partial_\lambda$, se poate introduce operatorul de helicitate după cum urmează:

$$h = \frac{1}{p} W^0 = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}}{p} = \gamma^5 \gamma^0 \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{P}}{2p}. \quad (6)$$

Curenții de sarcină vectorial (VCC, de la *Vector Charge Current*), axial (ACC) și helical (HCC) au următoarele expresii:

$$J_V^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad J_A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi, \quad J_H^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu h \psi + \bar{h} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (7)$$

Ținând cont de ecuația Dirac,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = M\psi, \quad i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu = -M\bar{\psi}, \quad (8)$$

se poate arăta că divergențele curenților de sarcină satisfac

$$\partial_\mu J_V^\mu = 0, \quad \partial_\mu J_A^\mu = 2iM\bar{\psi} \gamma^5 \psi, \quad \partial_\mu J_H^\mu = 0. \quad (9)$$

Drept urmare, în cazul fermionilor fără masă ($M = 0$), toți cei trei curenți de sarcină se conservă.

Sarcinile totale, Q_V , Q_A și Q_H , se pot calcula folosind formulele:

$$Q_V = \int d^3x \psi^\dagger \psi, \quad Q_A = \int d^3x \psi^\dagger \gamma^5 \psi, \quad Q_H = 2 \int d^3x \psi^\dagger h \psi. \quad (10)$$

În timp ce Q_V și Q_H se conservă pentru orice masă M , sarcina totală Q_A poate suferi variații când $M \neq 0$:

$$\partial_t Q_V = 0, \quad \partial_t Q_A = 2iM \int d^3x \bar{\psi} \gamma^5 \psi, \quad \partial_t Q_H = 0. \quad (11)$$

Să considerăm cuantificarea a doua a câmpului ψ , care acum devine operatorul de câmp, $\widehat{\Psi}$. Curenților de sarcină J_ℓ^μ ($\ell \in \{V, A, H\}$) li se asociază operatorii de sarcină

$$\widehat{J}_V^\mu = \frac{1}{2}[\widehat{\Psi}, \gamma^\mu \widehat{\Psi}], \quad \widehat{J}_A^\mu = \frac{1}{2}[\widehat{\Psi}, \gamma^\mu \gamma^5 \widehat{\Psi}], \quad \widehat{J}_H^\mu = \frac{1}{2}[\widehat{\Psi}, \gamma^\mu h \widehat{\Psi}] + \frac{1}{2}[\widehat{h} \widehat{\Psi}, \gamma^\mu \widehat{\Psi}], \quad (12)$$

unde comutatorul rezolvă ambiguitățile referitoare la ordonarea operatorilor în spațiul Fock. Operatorii de sarcină asociați, \widehat{Q}_ℓ , pot fi diagonalizați când se lucrează cu o bază de moduri $\{U_j\}$ care sunt simultan funcții proprii ale Hamiltonianului, $H = i\partial_t$, și ale lui h :

$$HU_j = E_j U_j, \quad hU_j = \lambda_j U_j, \quad (13)$$

unde $\lambda_j = \pm \frac{1}{2}$ reprezintă valoarea proprie a operatorului de helicitate, denumită pe scurt “helicitate.” În cazul fermionilor cu masă arbitrară, se poate arăta că

$$\gamma^5 U_j = \frac{2\lambda_j}{p_j} (E_j - M\gamma^t) U_j, \quad (14)$$

de unde rezultă că U_j devine funcție proprie a operatorului de chiralitate γ^5 doar în limita masei nule. Modurile anit-particulă $V_j = i\gamma^2 U_j^*$ satisfac

$$HV_j = -E_j V_j, \quad hV_j = \lambda_j V_j, \quad \gamma^5 V_j = -\frac{2\lambda_j}{p_j} (E_j + M\gamma^t) V_j. \quad (15)$$

Presupunând că modurile U_j și V_j formează un sistem complet de soluții ale ecuației Dirac și impunând următoarele relații de ortonormare,

$$\langle U_j, U_{j'} \rangle = \langle V_j, V_{j'} \rangle = \delta_{j,j'}, \quad \langle U_j, V_{j'} \rangle = 0, \quad (16)$$

operatorul de câmp $\widehat{\Psi}$ poate fi descompus după cum urmează:

$$\widehat{\Psi} = \sum_j (U_j \hat{b}_j + V_j \hat{d}_j^\dagger). \quad (17)$$

Operatorii uniparticulă \hat{b}_j și \hat{d}_j^\dagger satisfac relațiile canonice de anticomutare,

$$\{\hat{b}_j, \hat{b}_{j'}^\dagger\} = \delta_{j,j'}, \quad \{\hat{d}_j, \hat{d}_{j'}^\dagger\} = \delta_{j,j'}. \quad (18)$$

În raport cu această bază, operatorii de sarcină vectorială și helicală iau formele

$$: \widehat{Q}_V := \sum_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \hat{d}_j^\dagger \hat{d}_j), \quad : \widehat{Q}_H := 2 \sum_j \lambda_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j - \hat{d}_j^\dagger \hat{d}_j), \quad (19)$$

unde punctele $::$ indică ordonarea normală (Wick) a operatorilor. Dacă $M = 0$, modurile U_j și V_j devin vectori proprii ai lui γ^5 , satisfăcând

$$\gamma^5 U_j = \chi_j U_j, \quad \gamma^5 V_j = -\chi_j V_j, \quad (20)$$

unde chiralitatea $\chi_j = \pm 1$ se poate scrie în funcție de helicitate după cum urmează:

$$\chi_j = 2\lambda_j \operatorname{sgn}(E_j). \quad (21)$$

Cu ajutorul relațiilor de mai sus, se poate obține expresia lui \widehat{Q}_A :

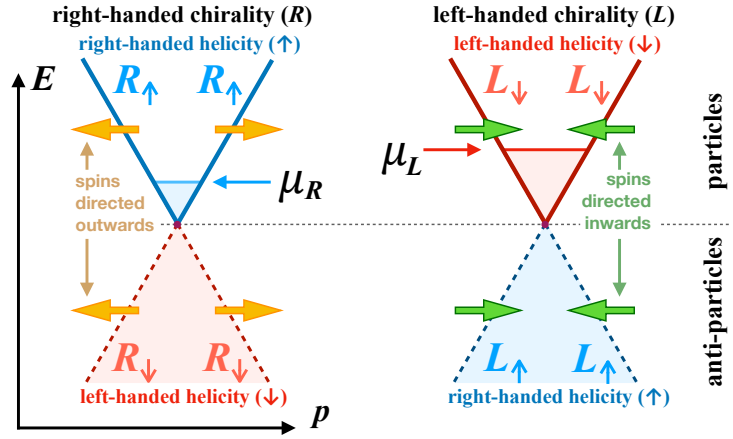
$$: \widehat{Q}_A := \sum_j \chi_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \hat{d}_j^\dagger \hat{d}_j). \quad (22)$$

2.2 Triada VAH

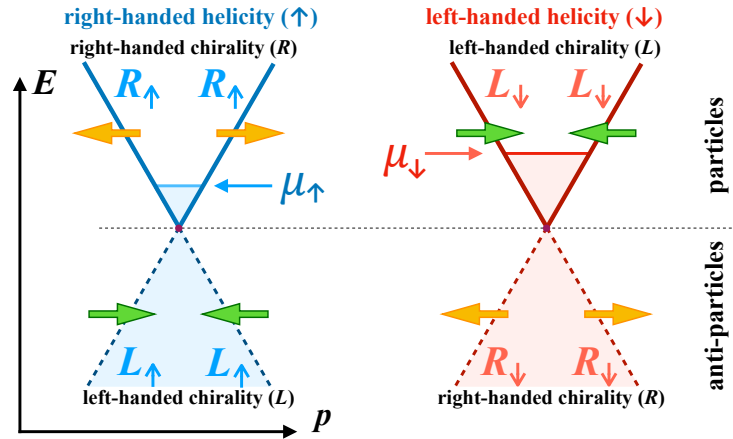
În subsecțiunea anterioară, s-a văzut că curenții corespunzători sarcinilor V , A și H se conservă în cazul câmpului Dirac liber și fără masă. Conform ec. (21), chiralitatea unui fermion poate fi dedusă cunoscând helicitatea și sarcina electrică (particulă/anti-particulă) a acestuia. Același lucru însă nu poate fi spus despre un ansamblu de fermioni, alcătuit din particule și antiparticule având atât helicitate dreaptă cât și stângă. Cunoscând doar sarcinile totale $\langle : \widehat{Q}_V : \rangle$ și $\langle : \widehat{Q}_H : \rangle$, sarcina de chiralitate rămâne ambiguă. Pentru a înțelege mai bine această ambiguitate, să considerăm un ansamblu de fermioni caracterizat de sarcinile $Q_\ell = \langle \widehat{Q}_\ell \rangle$. Aceste sarcini pot fi exprimate folosind combinații lineare a patru cantități care reprezintă numărul de particule (N_\uparrow^R și N_\downarrow^L), respectiv antiparticule (\bar{N}_\downarrow^R și \bar{N}_\uparrow^L) având helicitate dreaptă (\uparrow) sau stângă (\downarrow) și, în același timp, chiralitate dreaptă (R) sau stângă (L). Acestor cantități li se pot asocia potențiale chimice (μ_\uparrow^R pentru N_\uparrow^R , etc). Ansamblul poate fi descris simultan atât cu ajutorul sarcinilor V , A și H , cât și cu ajutorul potențialelor chimice, după cum urmează:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_Q &= \mu_V Q_V + \mu_A Q_A + \mu_H Q_H \\ &= \mu_\uparrow^R N_\uparrow^R + \mu_\downarrow^L N_\downarrow^L + \bar{\mu}_\downarrow^R \bar{N}_\downarrow^R + \bar{\mu}_\uparrow^L \bar{N}_\uparrow^L. \end{aligned} \quad (23)$$

Considerând definiția sarcinilor, $Q_V = (N_\uparrow^R + N_\downarrow^L) - (\bar{N}_\downarrow^R + \bar{N}_\uparrow^L)$, $Q_A = (N_\uparrow^R + \bar{N}_\downarrow^R) - (N_\downarrow^L + \bar{N}_\uparrow^L)$, respectiv $Q_H = (N_\uparrow^R + \bar{N}_\uparrow^L) - (N_\downarrow^L + \bar{N}_\downarrow^R)$, se poate vedea că ec. (23) implică următoarea



(a)



(b)

Figura 1: Relațiile de dispersie $E_p = \pm|\mathbf{p}|$ pentru particulele Dirac în bazele (a) chirală; și (b) de helicitate. Potențialele chimice $\mu_{R/L}$ determină gradul de ocupare pentru particulele de chiralitate dreaptă/stângă, în timp ce $\mu_{\uparrow/\downarrow}$ dictează densitățile particulelor de helicitate dreaptă/stângă. Orientările spinilor \mathbf{s} în raport cu impulsul \mathbf{p} sunt indicate folosind săgeți orizontale pentru fiecare ramură energetică în parte.

	Q_V	Q_A	Q_H	J_V	J_A	J_H	ω
C	-	+	-	-	+	-	+
P	+	-	-	-	+	+	+
T	+	+	+	-	-	-	-

Tabela 1: Paritățile operatorilor de sarcină (Q) și de curent (J) vectorial (V), axial (A) și helical (H) corespunzător câmpului Dirac fără masă, precum și ale vorticității ($\omega = \Omega \Gamma^2$), în raport cu transformările C , P și T . Semnele $+/-$ indică paritățile pare/impare.

relație între potențialele chimice:

$$\begin{aligned}
\mu_V &= [(\mu_\uparrow^R + \mu_\downarrow^L) - (\bar{\mu}_\downarrow^R + \bar{\mu}_\uparrow^L)] / 4, \\
\mu_A &= [(\mu_\uparrow^R + \bar{\mu}_\downarrow^R) - (\mu_\downarrow^L + \bar{\mu}_\uparrow^L)] / 4, \\
\mu_H &= [(\mu_\uparrow^R + \bar{\mu}_\uparrow^L) - (\mu_\downarrow^L + \bar{\mu}_\downarrow^R)] / 4,
\end{aligned} \tag{24}$$

de unde se poate vedea că cele trei cantități, $\mu_{V/A/H}$, sunt liniar-independente. În cazul în care nu este necesară contabilizarea helicitații ansamblului, se poate vorbi de potențialele chimice corespunzătoare particulelor cu chiralitate dreaptă, respectiv stângă, definite prin

$$\mu_R = \frac{1}{2}(\mu_\uparrow^R + \bar{\mu}_\downarrow^R), \quad \mu_L = \frac{1}{2}(\mu_\downarrow^L + \bar{\mu}_\uparrow^L). \tag{25}$$

Semnificația fizică a acestor potențiale chimice este relevată cu ajutorul conului Weyl reprezentând relația de dispersie a energiei, reprezentat în baza chirală în Fig. 1(a). Potențialul chimic axial devine $\mu_A = \frac{1}{2}(\mu_R - \mu_L)$. Dacă în schimb se face abstracție de chiralitate, potențialele chimice helicale pot fi scrise după cum urmează:

$$\mu_\uparrow = \frac{1}{2}(\mu_\uparrow^R + \bar{\mu}_\uparrow^L), \quad \mu_\downarrow = \frac{1}{2}(\mu_\downarrow^L + \bar{\mu}_\downarrow^R). \tag{26}$$

Cu ajutorul acestor potențiale, se poate reprezenta relația de dispersie a energiei cu ajutorul unor conuri Weyl helicale, caracterizând ramurile de energie fără a face apel la chiralitate, după cum se poate vedea în Fig. 1(b). Potențialul chimic helical ia forma naturală $\mu_H = \frac{1}{2}(\mu_\uparrow - \mu_\downarrow)$.

Pe lângă relațiile stabilite la nivelul potențialelor chimice în ec. (24), curenții și densitățile de sarcină diferă la nivel fundamental datorită proprietăților acestora în raport cu transformările de conjugare de sarcină (C), paritate (P) și inversie temporală (T). În timp ce paritățile în raport cu aceste transformări pentru sectoarele V și A sunt cunoscute [35], cele pentru sectorul helical trebuie analizate în detaliu. Pornind de la relațiile de comutare

$$[\hat{Q}_V, \hat{\psi}(x)] = -\hat{Q}_V, \quad [\hat{Q}_H, \hat{\psi}(x)] = -\sum_j 2\lambda_j (U_j \hat{b}_j + V_j \hat{d}_j^\dagger), \tag{27}$$

se poate vedea că operatorii corespunzător curenților de sarcină V și H pot fi puși sub

forma:

$$\begin{aligned}\widehat{J}_V^\mu &= \frac{1}{4} \left([[\widehat{Q}_V, \widehat{\psi}], \gamma^\mu \widehat{\psi}] - [\widehat{\psi}, [\widehat{Q}_V, \gamma^\mu \widehat{\psi}]] \right), \\ \widehat{J}_H^\mu &= \frac{1}{4} \left([[\widehat{Q}_H, \widehat{\psi}], \gamma^\mu \widehat{\psi}] - [\widehat{\psi}, [\widehat{Q}_H, \gamma^\mu \widehat{\psi}]] \right).\end{aligned}\quad (28)$$

Se poate vedea că raportul dintre proprietățile CPT ale sectoarelor H și V este identic cu cel dintre proprietățile CPT ale operatorilor de sarcină \widehat{Q}_V și \widehat{Q}_H . Cunoscând relațiile [35]

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{C}}\widehat{b}_j\widehat{\mathcal{C}}^\dagger &= \eta_C \widehat{d}_j, & \widehat{\mathcal{P}}\widehat{b}_j\widehat{\mathcal{P}}^\dagger &= \eta_P \widehat{b}_{jP}, & \widehat{\mathcal{T}}\widehat{b}_j\widehat{\mathcal{T}}^\dagger &= \eta_T \widehat{b}_{jT} e^{-i\theta_{b,j}}, \\ \widehat{\mathcal{C}}\widehat{d}_j\widehat{\mathcal{C}}^\dagger &= \eta_C^* \widehat{b}_j, & \widehat{\mathcal{P}}\widehat{d}_j\widehat{\mathcal{P}}^\dagger &= -\eta_P^* \widehat{d}_{jP}, & \widehat{\mathcal{T}}\widehat{d}_j\widehat{\mathcal{T}}^\dagger &= \eta_T^* \widehat{d}_{jT} e^{i\theta_{d,j}},\end{aligned}\quad (29)$$

unde $\eta_C, \eta_P, \eta_T, e^{-i\theta_{b,j}}$ și $e^{i\theta_{d,j}}$ sunt faze irelevante, se poate vedea că

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{C}}\widehat{Q}_V\widehat{\mathcal{C}}^\dagger &= -\widehat{Q}_V, & \widehat{\mathcal{C}}\widehat{Q}_H\widehat{\mathcal{C}}^\dagger &= -\widehat{Q}_H, \\ \widehat{\mathcal{P}}\widehat{Q}_V\widehat{\mathcal{P}}^\dagger &= \widehat{Q}_V, & \widehat{\mathcal{P}}\widehat{Q}_H\widehat{\mathcal{P}}^\dagger &= -\widehat{Q}_H, \\ \widehat{\mathcal{T}}\widehat{Q}_V\widehat{\mathcal{T}}^\dagger &= \widehat{Q}_V, & \widehat{\mathcal{T}}\widehat{Q}_H\widehat{\mathcal{T}}^\dagger &= \widehat{Q}_H,\end{aligned}\quad (30)$$

în timp ce pentru operatorii curenților de sarcină se obține:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{C}}\widehat{J}_V^\mu(x)\widehat{\mathcal{C}}^\dagger &= -\widehat{J}_V^\mu(x), & \widehat{\mathcal{C}}\widehat{J}_H^\mu(x)\widehat{\mathcal{C}}^\dagger &= -\widehat{J}_H^\mu(x), \\ \widehat{\mathcal{P}}\widehat{J}_V^\mu(x)\widehat{\mathcal{P}}^\dagger &= \widehat{J}_\mu^V(\tilde{x}), & \widehat{\mathcal{P}}\widehat{J}_H^\mu(x)\widehat{\mathcal{P}}^\dagger &= -\widehat{J}_\mu^H(\tilde{x}), \\ \widehat{\mathcal{T}}\widehat{J}_V^\mu(x)\widehat{\mathcal{T}}^\dagger &= \widehat{J}_\mu^V(-\tilde{x}), & \widehat{\mathcal{T}}\widehat{J}_H^\mu(x)\widehat{\mathcal{T}}^\dagger &= \widehat{J}_\mu^H(-\tilde{x}),\end{aligned}\quad (31)$$

unde $\tilde{x} = (t, -\mathbf{x})$ atunci când $x = (t, \mathbf{x})$. Pentru indicii spațiali $\mu = i$, $\widehat{J}_i^H = -\widehat{J}_i^H$, astfel încât partea temporală a curențului de sarcină helicală e pară în raport cu transformarea T , în timp ce partea sa spațială este pară în raport cu transformarea P . Rezultatele obținute în ec. (30) și (31) sunt sintetizate în tab. 1.

2.3 Model cinetic pentru materia helicală

Pentru descrierea stărilor în rotație rigidă, este convenabilă orientarea sistemului de coordonate cu axa z de-a lungul vectorului de rotație, $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$. Pentru a profita de simetria axială a sistemului, este convenabilă întrebuințarea tetradei cilindrice,

$$\begin{aligned}e_{\hat{0}} &= \partial_t, & e_{\hat{\rho}} &= \partial_\rho, & e_{\hat{\varphi}} &= \rho^{-1} \partial_\varphi, & e_{\hat{z}} &= \partial_z, \\ \omega^{\hat{0}} &= dt, & \omega^{\hat{\rho}} &= d\rho, & \omega^{\hat{\varphi}} &= \rho d\varphi, & \omega^{\hat{z}} &= dz.\end{aligned}\quad (32)$$

În cele ce urmează, indicii cu căciulă se referă la componente tensoriale exprimate în raport cu tetrada de mai sus.

Pe lângă tetrada cilindrică din ec. (32), este convenabilă întrebuințarea unei tetrade cinemate, formată din vectorii care descriu curgerea locală a fluidului [36, 37]. Primul

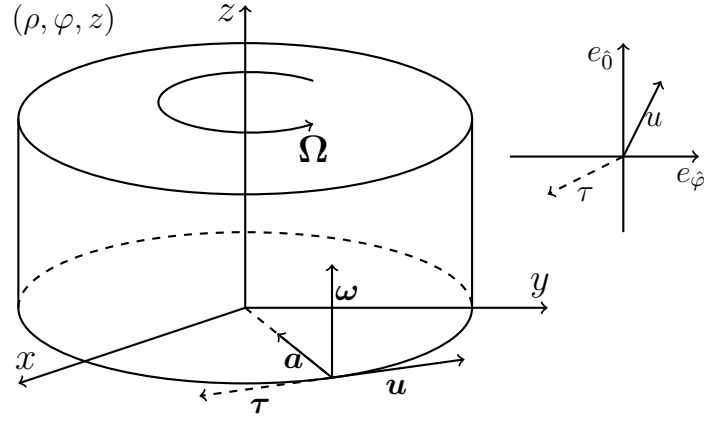


Figura 2: Reprezentare schematică a tetradei cinematice corespunzând unui fluid în rotație rigidă în raport cu axa verticală, având viteza unghiulară $\Omega = \Omega e_z$. Schema din stânga prezintă părțile spațiale ale vectorilor aparținând tetradei ortogonale (\mathbf{u} , \mathbf{a} , $\boldsymbol{\omega}$ și $\boldsymbol{\tau}$). Schema din partea dreaptă prezintă vectorii u și τ în raport cu coordonatele (t, φ) .

astfel de vector este cuadriviteza,

$$u = \Gamma(\partial_t + \Omega\partial_\varphi) = \Gamma(e_{\hat{0}} + \rho\Omega e_{\hat{\varphi}}), \quad (33)$$

având următoarele componente în raport cu tetrada cilindrică:

$$u^{\hat{0}} = u^t = \Gamma, \quad u^{\hat{\varphi}} = \rho u^\varphi = \rho\Omega\Gamma. \quad (34)$$

Se poate observa că factorul Lorentz,

$$\Gamma = (1 - \rho^2\Omega^2)^{-1/2}, \quad (35)$$

diverge când $\rho \rightarrow \rho_{\text{SLS}}$, unde ρ_{SLS} reprezintă distanța de la axa de rotație până la suprafața luminală, unde fluidul în rotație rigidă atinge viteza luminii. Valoarea lui ρ_{SLS} este

$$\rho_{\text{SLS}} = \Omega^{-1}. \quad (36)$$

Pornind de la cuadriviteza dată în ec. (33), accelerația locală se poate calcula după cum urmează:

$$a = \nabla_u u = a^{\hat{\rho}} e_{\hat{\rho}}, \quad a^{\hat{\rho}} = -\rho\Omega^2\Gamma^2. \quad (37)$$

Se vede că în general $a \cdot u = 0$ prin construcție. Vorticitatea cinematică, $\boldsymbol{\omega} = \omega^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\alpha}}$, se poate calcula folosind relația

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} e_{\hat{\alpha}} u_{\hat{\beta}} \nabla_{\hat{\gamma}} u_{\hat{\gamma}} = \omega^{\hat{z}} e_{\hat{z}}, \quad \omega^{\hat{z}} = \Gamma^2\Omega, \quad (38)$$

unde tensorul Levi-Civita satisface $\varepsilon^{\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{3}} = +1$. Se poate observa că $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} = 0$ prin construcție. Mai mult, pentru cazul rotației rigide, când accelerația este dată prin ec. (37), $\boldsymbol{\omega}$ este orto-

gonal și pe a . În fine, al patrulea vector al tetraedei cinematice, care este ortogonal pe u , a și ω este (definiția de mai jos diferă de cea din lucrările [36, 37] printr-un semn minus)

$$\tau^{\hat{\alpha}} = -\varepsilon^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}\omega_{\hat{\beta}}a_{\hat{\gamma}}u_{\hat{\delta}}, \quad \tau = -\rho\Omega^3\Gamma^5(\rho\Omega e_{\hat{0}} + e_{\hat{\varphi}}). \quad (39)$$

Vectori u , a , ω și τ introduși mai sus sunt reprezentați schematic în fig. 2, normele lor pătratice fiind

$$\begin{aligned} u^2 &= 1, & \tau^2 &= -\Omega^4\Gamma^6(\Gamma^2 - 1), \\ \omega^2 &= -\boldsymbol{\omega}^2 = -\Omega^2\Gamma^4, & a^2 &= -\mathbf{a}^2 = -\Omega^2\Gamma^2(\Gamma^2 - 1). \end{aligned} \quad (40)$$

Deoarece mișcarea de rotație rigidă este în general nedisipativă, în teoria cinetică relativistă, fluidul care are această mișcare se poate afla în echilibru termodinamic global, caracterizat prin cuadvectorul de temperatură $\beta^{\hat{\alpha}} = T^{-1}u^{\hat{\alpha}}$. Condiția de echilibru termodinamic global impune ca $\beta^{\hat{\alpha}}$ să satisfacă ecuația Killing, ceea ce în rotație rigidă impune ca temperatura locală să fie dată prin [20]

$$T = \Gamma T_0, \quad (41)$$

unde T_0 reprezintă temperature pe axa de rotație.

În absența unei teorii cinetice a particulelor cu spin care să fie general acceptată [21, 22, 38, 39], este convenabilă extinderea distribuției canonice Fermi-Dirac prin încorporarea potențialelor chimice μ_A și μ_H care să distingă între polarizarea fermionului la fel cum potențialul chimic canonic (vectorial), μ_V , distinge între particulă și antiparticulă. Pornind de la proprietățile operatorilor de sarcină (19)–(22), propunem următoarele distribuții:

$$f_{q/\bar{q};\lambda}^{(\text{eq})} = \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \exp \left[\frac{1}{T} (p_{\hat{\alpha}} u^{\hat{\alpha}} \mp \mu_V - 2\lambda\mu_A \mp 2\lambda\mu_H) \right] + 1 \right\}^{-1}, \quad (42)$$

unde $p^{\hat{\alpha}}$ și λ reprezintă cuadriimpulsul și helicitatea particulei. Când μ_A este nenul, particulele trebuie să fie de masă nulă ($p^2 = 0$). Cazul particulelor masive, $p^2 = M^2 > 0$, se va trata doar pentru cazul $\mu_A = 0$. La fel ca și temperatura, potențialele chimice locale trebuie să satisfacă

$$\mu_V = \mu_{V;0}\Gamma, \quad \mu_A = \mu_{A;0}\Gamma, \quad \mu_H = \mu_{H;0}\Gamma, \quad (43)$$

unde $\mu_{\ell;0}$ reprezintă valoarea potențialului chimic pe axa de rotație.

Pornind de la distribuțiile din ec. (42), curenții vectorial, axial și de helicitate, precum și

tensorul energie-impuls pot fi calculați după cum urmează [3, 8, 11]:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} J_V^{\text{RKT};\hat{\alpha}} \\ J_H^{\text{RKT};\hat{\alpha}} \end{pmatrix} &= \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda \end{pmatrix} \int \frac{d^3p}{p^{\hat{0}}} p^{\hat{\alpha}} [f_{q;\lambda}^{(\text{eq})} - f_{\bar{q};\lambda}^{(\text{eq})}] = \begin{pmatrix} Q_V^{\text{RKT}} \\ Q_H^{\text{RKT}} \end{pmatrix} u^{\hat{\alpha}}, \\
J_A^{\text{RKT};\hat{\alpha}} &= \sum_{\lambda} 2\lambda \int \frac{d^3p}{p^{\hat{0}}} p^{\hat{\alpha}} [f_{q;\lambda}^{(\text{eq})} + f_{\bar{q};\lambda}^{(\text{eq})}] = Q_A^{\text{RKT}} u^{\hat{\alpha}}, \\
T_{\text{RKT}}^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{p^{\hat{0}}} p^{\hat{\alpha}} p^{\hat{\gamma}} [f_{q;\lambda}^{(\text{eq})} + f_{\bar{q};\lambda}^{(\text{eq})}] = (E_{\text{RKT}} + P_{\text{RKT}}) u^{\hat{\alpha}} u^{\hat{\gamma}} - P_{\text{RKT}} \eta^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}, \quad (44)
\end{aligned}$$

unde densitățile de sarcină Q_{ℓ}^{RKT} , densitatea de energie E_{RKT} și presiunea P_{RKT} satisfac

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Q_V^{\text{RKT}} \\ Q_H^{\text{RKT}} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda \end{pmatrix} \int_0^{\infty} dp p^2 \\
&\quad \times \left[\frac{1}{e^{\frac{1}{T}[p^{\hat{0}} - \mu_V - 2\lambda(\mu_A + \mu_H)]} + 1} - \frac{1}{e^{\frac{1}{T}[p^{\hat{0}} + \mu_V - 2\lambda(\mu_A - \mu_H)]} + 1} \right], \\
\begin{pmatrix} Q_A^{\text{RKT}} \\ E_{\text{RKT}} \\ E_{\text{RKT}} - 3P_{\text{RKT}} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{p^{\hat{0}}} \begin{pmatrix} 2\lambda p^{\hat{0}} \\ (p^{\hat{0}})^2 \\ M^2 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \left[\frac{1}{e^{\frac{1}{T}[p^{\hat{0}} - \mu_V - 2\lambda(\mu_A + \mu_H)]} + 1} + \frac{1}{e^{\frac{1}{T}[p^{\hat{0}} + \mu_V - 2\lambda(\mu_A - \mu_H)]} + 1} \right]. \quad (45)
\end{aligned}$$

În limita masei nule, $p^{\hat{0}} = p$ iar integralele pot fi calculate în limita temperaturilor mari:

$$\begin{aligned}
Q_V^{\text{RKT}} \Big|_{M \rightarrow 0} &= \frac{\mu_V T^2}{3} + \frac{4T \mu_A \mu_H}{\pi^2} \ln 2 + \frac{\mu_V (\mu_V^2 + 3\mu_A^2 + 3\mu_H^2)}{3\pi^2} \\
&\quad + \frac{\mu_A \mu_H (\mu_A^2 + \mu_H^2 + 3\mu_V^2)}{6\pi^2 T} + O(T^{-3}), \\
Q_A^{\text{RKT}} \Big|_{M \rightarrow 0} &= \frac{\mu_A T^2}{3} + \frac{4T \mu_V \mu_H}{\pi^2} \ln 2 + \frac{\mu_A (\mu_A^2 + 3\mu_V^2 + 3\mu_H^2)}{3\pi^2} \\
&\quad + \frac{\mu_V \mu_H (3\mu_A^2 + \mu_V^2 + \mu_H^2)}{6\pi^2 T} + O(T^{-3}), \\
Q_H^{\text{RKT}} \Big|_{M \rightarrow 0} &= \frac{\mu_H T^2}{3} + \frac{4T \mu_A \mu_V}{\pi^2} \ln 2 + \frac{\mu_H (\mu_H^2 + 3\mu_A^2 + 3\mu_V^2)}{3\pi^2} \\
&\quad + \frac{\mu_A \mu_V (\mu_A^2 + \mu_V^2 + 3\mu_H^2)}{6\pi^2 T} + O(T^{-3}), \\
E_{\text{RKT}} \Big|_{M \rightarrow 0} &= \frac{7\pi^2 T^4}{60} + \frac{T^2}{2} (\mu_V^2 + \mu_A^2 + \mu_H^2) + \frac{12\mu_V \mu_A \mu_H T}{\pi^2} \ln 2 \\
&\quad + \frac{\mu_V^4 + \mu_A^4 + \mu_H^4 + 6(\mu_V^2 \mu_H^2 + \mu_V^2 \mu_A^2 + \mu_A^2 \mu_H^2)}{4\pi^2} \\
&\quad + \frac{\mu_V \mu_A \mu_H (\mu_V^2 + \mu_A^2 + \mu_H^2)}{2\pi^2 T} + O(T^{-3}), \\
\frac{E_{\text{RKT}} - 3P_{\text{RKT}}}{M^2} \Big|_{M \rightarrow 0} &= \frac{T^2}{6} + \frac{1}{2\pi^2} (\mu_V^2 + \mu_A^2 + \mu_H^2), \quad (46)
\end{aligned}$$

în timp ce $E_{\text{RKT}} = 3P_{\text{RKT}}$ în cazul $M = 0$. Comparând expresiile pentru densitățile de

sarcină, se observă că potențialele chimice joacă un rol perfect simetric. Același lucru poate fi observat și în expresia pentru densitatea de energie. Aceste rezultate întăresc considerarea sarcinilor $V AH$ ca făcând parte dintr-o triadă.

La masă finită, potențialul chimic axial trebuie pus pe 0. Folosind o tehnică perturbativă descrisă în detaliu în lucrarea [3], următoarele corecții masice pot fi obținute:

$$Q_{\pm}^{\text{RKT}} = \mu_{\pm} \left(\frac{T^2}{3} + \frac{\mu_{\pm}^2}{3\pi^2} - \frac{M^2}{2\pi^2} \right) + O(M^4),$$

$$\begin{pmatrix} P_{\text{RKT}} \\ E_{\text{RKT}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \left[\frac{7\pi^2 T^4}{60} + \frac{T^2}{4} (\mu_+^2 + \mu_-^2) + \frac{\mu_+^4 + \mu_-^4}{8\pi^2} \right] - \frac{M^2}{12} \left[T^2 + \frac{3(\mu_+^2 + \mu_-^2)}{2\pi^2} \right] + O(M^4), \quad (47)$$

unde

$$Q_{\pm}^{\text{RKT}} = Q_V^{\text{RKT}} \pm Q_H^{\text{RKT}}, \quad \mu_{\pm} = \mu_V \pm \mu_H. \quad (48)$$

2.4 Efectele vorticalo-helicale

Tranziția de la teoria cinetică relativistă la teoria cuantică de câmp la temperaturi finite se poate face înlocuind componentele cuadrivectorul de impuls al particulelor cu operatorii cuantici corespunzători. Pentru o temperatură finită T_0 , la potențial chimic finit μ_0 și în rotație rigidă cu viteza unghiulară Ω , media unui operator cuantic \hat{A} se poate calcula folosind relația [40]:

$$\langle \hat{A} \rangle_{T_0} = Z^{-1} \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}), \quad \hat{\rho} = \exp \left[-\beta_0 (\hat{H} - \Omega \hat{M}^z - \mu_{V;0} \hat{Q}_V - \mu_{A;0} \hat{Q}_A - \mu_{H;0} \hat{Q}_H) \right], \quad (49)$$

unde $Z = \text{Tr}(\hat{\rho})$ este funcția de partiție, \hat{H} este Hamiltonianul, \hat{Q}_ℓ reprezintă operatorii de sarcină, iar \hat{M}^z este proiecția pe axa z a momentului cinetic total. Urma se calculează pe toate stările conținute în spațiul Fock.

Pentru reprezentarea stărilor din spațiul Fock, considerăm un sistem complet de soluții de tip particulă $U_j(x) \equiv U_{E,k,m}^\lambda(x)$ și anti-particulă $V_j(x) = i\gamma^2 U_j^*(x)$ care sunt vectori proprii atât ai operatorilor $H = i\partial_t$ și M^z care intervin în expresia lui $\hat{\rho}$, cât și ai proiecției P^z pe axa z a operatorului de impuls și ai operatorului de helicitate $h = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}/p$:

$$\begin{aligned} HU_j &= E_j U_j, & M^z U_j &= m_j U_j, \\ P^z U_j &= k_j U_j, & h U_j &= \lambda_j U_j, \end{aligned} \quad (50)$$

Considerăm dezvoltarea operatorului de câmp $\hat{\Psi}$ în raport acest set de moduri [41]:

$$\hat{\Psi} = \sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{|E|>M} dE |E| \int_{-p}^p dk \Theta(\tilde{E}) \left[\hat{b}_{E,k,m}^\lambda U_{E,k,m}^\lambda(x) + \hat{d}_{E,k,m}^{\lambda\dagger} V_{E,k,m}^\lambda(x) \right], \quad (51)$$

unde \hat{b}_j reprezintă operatorul de anihilare a unei particule iar \hat{d}_j^\dagger reprezintă operatul de creare a unei anti-particule.

La nivelul operatorilor uniparticulă de creare (\hat{b}_j^\dagger și \hat{d}_j^\dagger) și anihilare (\hat{b}_j și \hat{d}_j), media la temperatură finită se poate calcula după cum urmează [42, 35, 3, 8]:

$$\begin{aligned}\langle \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j'} \rangle &= \frac{\delta_{j,j'}}{\exp \left[\frac{1}{T_0} (\tilde{E}_j - \mu_{V;0} - 2\lambda_j \mu_{A;0} - 2\lambda_j \mu_{H;0}) \right] + 1}, \\ \langle \hat{d}_j^\dagger \hat{d}_{j'} \rangle &= \frac{\delta_{j,j'}}{\exp \left[\frac{1}{T_0} (\tilde{E}_j + \mu_{V;0} - 2\lambda_j \mu_{A;0} + 2\lambda_j \mu_{H;0}) \right] + 1},\end{aligned}\quad (52)$$

unde $\tilde{E}_j = E_j - \Omega m_j$ reprezintă energia măsurată în reperul aflat în rotație rigidă.

Pornind de la definițiile curenților de sarcină,

$$\hat{J}_V^\alpha = \frac{1}{2}[\hat{\Psi}, \gamma^\alpha \hat{\Psi}], \quad \hat{J}_A^\alpha = \frac{1}{2}[\hat{\Psi}, \gamma^\alpha \gamma^5 \hat{\Psi}], \quad \hat{J}_H^\alpha = \frac{1}{2}[\hat{\Psi}, \gamma^\alpha h \hat{\Psi}] + \frac{1}{2}[h \hat{\Psi}, \gamma^\alpha \hat{\Psi}], \quad (53)$$

se poate calcula media acestora la temperatură finită:

$$J_\ell^\mu \equiv \langle : \hat{J}_\ell^\mu : \rangle = Q_\ell u^\mu + \sigma_\ell^\omega \omega^\mu + \sigma_\ell^\tau \tau^\mu, \quad (54)$$

unde densitățile de sarcină $Q_\ell = Q_\ell^{\text{RKT}} + \Delta Q_\ell$ pot fi scrise ca și suma dintre rezultatul prezis de teoria cinetică relativistă și o corecție cuantică. În cazul fermionilor fără masă, μ_A poate rămâne arbitrar și se obțin expresiile (46) pentru contribuția clasică, în timp ce corecțiile cuantice sunt date prin

$$\Delta Q_\ell = \frac{\omega^2 + \mathbf{a}^2}{4\pi^2} \left[\mu_\ell + \frac{1}{2T} \frac{\partial(\mu_V \mu_A \mu_H)}{\partial \mu_\ell} \right] + O(T^{-3}, \Omega^4). \quad (55)$$

În cazul când masa este nenulă, potențialul chimic axial trebuie pus pe 0. Corecțiile la nivelul densităților de sarcină devin

$$\Delta Q_\pm = \frac{\mu_\pm}{4\pi^2} (\omega^2 + \mathbf{a}^2) + O(M^4). \quad (56)$$

Conductivitățile vorticale σ_ℓ^ω și circulare σ_ℓ^τ nu au corespondent în teoria cinetică relativistă, descriind fenomene de transport anomal de natură pur cuantică. În limita masei nule, se

obțin rezultatele

$$\begin{aligned}
\sigma_\ell^\tau &= \frac{1}{6\pi^2} \left[\mu_\ell + \frac{1}{2T} \frac{\partial(\mu_V \mu_A \mu_H)}{\partial \mu_\ell} \right] + O(T^{-3}, \Omega^2), \\
\sigma_V^\omega &= \frac{2\mu_H T}{\pi^2} \ln 2 + \frac{\mu_A \mu_V}{\pi^2} + \frac{\mu_H(\mu_H^2 + 3\mu_V^2 + 3\mu_A^2)}{12\pi^2 T} + \frac{\mu_H(\omega^2 + 3\mathbf{a}^2)}{48\pi^2 T} + O(T^{-3}, \Omega^4), \\
\sigma_H^\omega &= \frac{2\mu_V T}{\pi^2} \ln 2 + \frac{\mu_A \mu_H}{\pi^2} + \frac{\mu_V(\mu_V^2 + 3\mu_H^2 + 3\mu_A^2)}{12\pi^2 T} + \frac{\mu_V(\omega^2 + 3\mathbf{a}^2)}{48\pi^2 T} + O(T^{-3}, \Omega^4), \\
\sigma_A^\omega &= \frac{T^2}{6} + \frac{\mu_V^2 + \mu_A^2 + \mu_H^2}{2\pi^2} + \frac{\mu_V \mu_A \mu_H}{2\pi^2 T} + O(T^{-3}, \Omega^4).
\end{aligned} \tag{57}$$

Pentru cazul când masa e nenulă dar mică, $\mu_A = 0$ și următoarele corecții se pot evidenția:

$$\begin{aligned}
\sigma_{V/H}^\tau &= \frac{\mu_{V/H}}{6\pi^2} + O(M^4), \\
\sigma_A^\tau &= \frac{\mu_V \mu_H}{12\pi^2 T} \left\{ 1 - \frac{3M^2/\Omega^2}{\Gamma^2(\Gamma^2 - 1)} \left[(2\Gamma^2 - 1) \frac{\operatorname{arcsinh}(\rho\Omega\Gamma)}{\rho\Omega\Gamma^2} - 1 \right] \right\} + O(T^{-2}), \\
\sigma_{V/H}^\omega &= \frac{2\mu_{H/V} T}{\pi^2} \ln 2 + \frac{\mu_{H/V}}{12\pi^2 T} \left[3\mu_{V/H}^2 + \mu_{H/V}^2 - \frac{3M^2}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{arcsinh}(\rho\Omega\Gamma)}{\rho\Omega\Gamma^2} \right) + \frac{\omega^2 + 3\mathbf{a}^2}{4} \right] \\
&\quad + O(\Omega^4, \Omega^2 M^2, M^4, T^{-2}), \\
\sigma_A^\omega &= \frac{T^2}{6} + \frac{\mu_V^2 + \mu_H^2}{2\pi^2} + O(M^4).
\end{aligned} \tag{58}$$

Operatorul aferent tensorului energie-impuls corespunzător câmpului Dirac este:

$$\widehat{T}_{\mu\nu} = \frac{i}{4} \left\{ [\widehat{\Psi}, \gamma_{(\mu} \partial_{\nu)} \widehat{\Psi}] - [\partial_{(\mu} \widehat{\Psi}, \gamma_{\nu)} \widehat{\Psi}] \right\}. \tag{59}$$

La temperatură finită, media acestuia poate fi descompusă după cum urmează [43]:

$$T^{\mu\nu} = \langle : \widehat{T}^{\mu\nu} : \rangle = (E + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu} + W^\mu u^\nu + u^\mu W^\nu. \tag{60}$$

unde $E = E_{\text{RKT}} + \Delta E$ și $P = P_{\text{RKT}} + \Delta P$ reprezintă densitatea de energie și presiunea izotropă, care primesc corecții cuantice față de predicția teoriei cinetice relativiste. În cazul particulelor fără masă, se obțin următoarele corecții:

$$\Delta E = 3\Delta P = \frac{3\omega^2 + \mathbf{a}^2}{24} \left[T^2 + \frac{3(\mu_V^2 + \mu_A^2 + \mu_H^2)}{\pi^2} + \frac{3\mu_V \mu_A \mu_H}{\pi^2 T} \right] + O(T^{-3}, \Omega^4). \tag{61}$$

Pentru particulele cu masă, când $\mu_A = 0$, se obțin:

$$\Delta E = 3\Delta P = \frac{3\omega^2 + \mathbf{a}^2}{24} \left[T^2 + \frac{3(\mu_V^2 + \mu_H^2)}{\pi^2} \right] + O(M^4). \tag{62}$$

Tensiunea anizotropă $\Pi^{\mu\nu}$ și fluxul de căldură W^μ pot fi descompuse după cum urmează:

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu} &= \Pi(\tau^\mu\omega^\nu + \tau^\nu\omega^\mu) + \Pi_M \left(\tau^\mu\tau^\nu + \frac{\omega^2}{2}a^\mu a^\nu + \frac{a^2}{2}\omega^\mu\omega^\nu \right), \\ W^\mu &= \sigma_\varepsilon^\tau \tau^\mu + \sigma_\varepsilon^\omega \omega^\mu.\end{aligned}\tag{63}$$

În cazul fără masă dar pentru μ_A arbitrar, $\Pi_M = 0$, în timp ce coeficientul Π și conductivitățile termice circulară (σ_ε^τ) și vorticală ($\sigma_\varepsilon^\omega$) sunt

$$\begin{aligned}\Pi &= -\frac{\mu_A}{3\pi^2} - \frac{\mu_V\mu_H}{6\pi^2 T} + O(T^{-3}, \Omega^2), \\ \sigma_\varepsilon^\tau &= -\frac{1}{3} \left[\frac{T^2}{6} + \frac{\mu_V^2 + \mu_A^2 + \mu_H^2}{2\pi^2} + \frac{\mu_V\mu_A\mu_H}{2\pi^2 T} \right] + O(T^{-3}, \Omega^2), \\ \sigma_\varepsilon^\omega &= \frac{\mu_A T^2}{3} + \frac{4\mu_V\mu_H T}{\pi^2} \ln 2 + \frac{\mu_A(\mu_A^2 + 3\mu_V^2 + 3\mu_H^2)}{3\pi^2} \\ &\quad + \frac{\mu_V\mu_H(3\mu_A^2 + \mu_V^2 + \mu_H^2)}{6\pi^2 T} + \frac{\omega^2 + a^2}{12\pi^2} \left(\mu_A + \frac{\mu_V\mu_H}{2T} \right) + O(T^{-3}, \Omega^4).\end{aligned}\tag{64}$$

În cazul particulelor masive, când $\mu_A = 0$, se obțin expresiile:

$$\begin{aligned}\Pi_M &= O(M^4), \\ \Pi &= -\frac{\mu_V\mu_H}{6\pi^2 T} + O(T^{-3}), \\ \sigma_\varepsilon^\tau &= -\frac{1}{18} \left[T^2 + \frac{3(\mu_V^2 + \mu_H^2)}{\pi^2} \right] + O(M^4), \\ \sigma_\varepsilon^\omega &= \frac{4\mu_V\mu_H T}{\pi^2} \ln 2 + \frac{\mu_V\mu_H}{6\pi^2 T} \left(\mu_V^2 + \mu_H^2 + \frac{\omega^2 + a^2}{4} \right) \\ &\quad - \frac{\mu_V\mu_H M^2}{16\pi^2 T(\Gamma^2 - 1)} \left[2\Gamma^2 - 1 - \frac{\operatorname{arcsinh}(\rho\Omega\Gamma)}{\rho\Omega\Gamma^2} \right] + O(T^{-3}).\end{aligned}\tag{65}$$

3 Tranziția chirală a fermionilor helicali în QCD

În această secțiune este abordată problema influenței dezechilibrului de polarizare, modelat prin intermediul potențialului chimic helical, asupra proprietăților termodinamice ale sistemelor care interacționează prin forța tare. Aceste proprietăți pot fi studiate la echilibru termodinamic utilizând o abordare efectivă, bazată pe modelul liniar sigma cuplat cu quarcuri (LSM_q, Linear sigma model coupled to quarks), care poate fi folosit pentru modelarea cromodinamicii cuantice la energii mici [63]. Analiza acestui tip de sisteme se va face utilizând metoda integralei de drum la temperaturi finite, folosind metoda timpului imaginar.

În subsec. 3.1, formalismul va fi prezentat pentru cazul câmpului Dirac liber cu masă, motivându-se de ce potențialul chimic axial nu poate avea o valoare nenulă în cazul fermionilor masivi [64]. Detaliile referitoare la modelul LSM_q sunt prezentate în subsec. 3.2. Influența potențialului chimic helical asupra diagramei de fază a simetriei chirale este discutată în subsec. 3.3.

Rezultatele prezentate în această secțiune sunt discutate în detaliu în lucrarea [9], elaborată în cadrul proiectului de cercetare la care se referă prezentul raport.

3.1 Termodinamica fermionilor liberi cu potențiale chimice vectorial, axial și helical

Pentru a ține cont de potențialele chimice $\mu_{V/A/H}$ finite, Lagrangianul câmpului Dirac liber (1) se poate modifica după cum urmează [25]:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i\not{\partial} + \mu_V\gamma^0 + \mu_A\gamma^0\gamma^5 + 2\mu_H\gamma^0h - M) \psi, \quad (66)$$

unde M reprezintă masa cuantei de câmp. Pornind de la ecuația Dirac,

$$(i\not{\partial} + \mu_V\gamma^0 + \mu_A\gamma^0\gamma^5 + 2\mu_H\gamma^0h - M) \psi = 0, \quad (67)$$

considerând soluții de tip unde plane $\psi(x) = \chi_p e^{-ip_\mu x^\mu}$, se obține ecuația

$$\mathcal{M}(p)\chi_p = 0, \quad (68)$$

unde matricea $\mathcal{M}(p)$ are următoarea expresie:

$$\mathcal{M}(p) = \not{p} + \mu_V\gamma^0 + \mu_A\gamma^0\gamma^5 + 2\mu_H\gamma^0h - M. \quad (69)$$

Impunând anularea determinantului matricei $\mathcal{M}(p)$, se obține ecuația polinomială $\det\mathcal{M}(p) = 0$ în componenta temporală p_0 , având patru rădăcini $p_0 = p_{0,\varkappa}^{(s)}(\mathbf{p})$:

$$\det\mathcal{M}(p) = \prod_{\varkappa=\pm 1} \prod_{s=\pm} [p_0 - p_{0,\varkappa}^{(s)}(\mathbf{p})]. \quad (70)$$

Etichetarea acestor rădăcini face referire la helicitatea $\varkappa = \pm 1$ și natura de particulă ($s = 1$) sau antiparticulă ($s = -1$) a soluției. Expresia exactă a rădăcinilor este

$$p_{0,\varkappa}^{(s)}(\mathbf{p}) = -\mu_V - \varkappa\mu_H + s\sqrt{m^2 + (|\mathbf{p}| - \varkappa\mu_A)^2}. \quad (71)$$

Energia liberă la temperatură finită T , considerând valori nenule pentru potențialele chimice $\mu_{V/A/H}$, se poate calcula trecând la spațiul Euclidean obținut în urma rotației Wick a coordonatei temporale $t \rightarrow \tau = it$, când $p_0 \rightarrow ip_4$. În formalismul integralei de drum, sistemul devine anti-periodic în raport cu timpul imaginar τ , având perioada egală cu inversul temperaturii, T^{-1} . Drept urmare, componenta temporală p_4 a impusului poate lua doar valorile discrete date de frecvențele Matsubara fermionice, $p_4 \rightarrow \varpi_n = \varpi_n = \pi T(2n + 1)$ [25]. Aplicând acest formalism, în urma calculelor se obține următoarea expresie pentru

energia liberă:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \Omega_{\text{ZP}} + \Omega_T, \\
\Omega_{\text{ZP}} &= -\frac{1}{2} \sum_{\kappa=\pm 1} \sum_{s=\pm} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} s p_{0,\kappa}^{(s)}(\mathbf{p}), \\
\Omega_T &= -\sum_{\kappa=\pm 1} \sum_{s=\pm} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} T \ln \left(1 + e^{-s p_{0,\kappa}^{(s)}(\mathbf{p})/T} \right), \tag{72}
\end{aligned}$$

unde Ω_{ZP} reprezintă de regulă contribuția datorată vidului, în timp ce termenul Ω_T conține contribuția termică și a materiei.

Densitățile de sarcină $n_\ell = \langle \hat{J}_\ell^0 \rangle$ corespunzând curenților de sarcină \hat{J}_ℓ^μ pot fi obținute prin derivarea energiei libere în raport cu potențialul chimic corespunzător:

$$n_\ell = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_\ell}, \quad \ell = V, A, H. \tag{73}$$

Pentru a testa fiabilitatea includerii potențialului chimic helical ca și variabilă termodinamică, considerăm mai întâi cazul potențialului chimic axial nul ($\mu_A = 0$). Fără a prezenta detaliile de calcul, energia liberă Ω devine

$$\Omega^{VH}(T, \mu_V, \mu_H) = \Omega_{\text{vac}} + \Omega_T^{VH}(\mu_V, \mu_H), \tag{74}$$

unde contribuția vidului este infinită

$$\Omega_{\text{vac}} \equiv \Omega_{\text{ZP}}^{VH} = -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}}(m), \tag{75}$$

în timp ce partea termodinamică e finită:

$$\Omega_T^{VH} = -T \sum_{s=\pm 1} \sum_{\kappa=\pm 1} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + e^{-\frac{\omega_{\mathbf{p}} - s(\mu_V + \kappa \mu_H)}{T}} \right), \tag{76}$$

unde s-a folosit notația $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$ pentru energia particulei. Deoarece Ω_{vac} nu depinde de T , μ_V sau μ_H , e clar că această cantitate nu va avea efect asupra proprietăților termodinamice ale sistemului. Densitățile de sarcină se pot obține în limita masei mici,

$$\begin{aligned}
n_V(T, \mu_V, \mu_H) &= \frac{\mu_V T^2}{3} + \frac{\mu_V^3 + 3\mu_V \mu_H^2}{3\pi^2} - \frac{\mu_V M^2}{2\pi^2} + O(M^4), \\
n_H(T, \mu_V, \mu_H) &= \frac{\mu_H T^2}{3} + \frac{\mu_H^3 + 3\mu_H \mu_V^2}{3\pi^2} - \frac{\mu_H M^2}{2\pi^2} + O(M^4), \tag{77}
\end{aligned}$$

fiind în acord cu rezultatele obținute în cadrul teoriei cinetice relativiste (47) și al analizei folosind formalismul timpului real al teoriei cuantice de câmp la temperaturi finite (56). E interesant de observat că $\Omega_T \equiv \Omega_T^{VH}$ rămâne invariant la transformarea $(\mu_V, \mu_H) \rightarrow (\mu_H, \mu_V)$,

în sensul că

$$\Omega_T(\mu_V, \mu_H) = \Omega_T(\mu_H, \mu_V). \quad (78)$$

Să considerăm acum cazul când $\mu_V = \mu_H = 0$ iar $\mu_A \neq 0$. În acest caz, teoria funcționează perfect pentru cazul masei nule,

$$n_A(T)]_{M=0} = \frac{\mu_A T^2}{3} + \frac{\mu_A^3}{3\pi^2}. \quad (79)$$

Când masa e nenulă, pentru $\mu_A \gg M$ și considerând regimul $|\mathbf{p}| \gg \mu_A$, $n_A(T)$ primește contribuții divergente logaritmice datorită comportamentului în ultraviolet al energiei libere. În limita temperaturii nule, se obține

$$n_A(\mu_A)]_{M \ll |\mu_A|}^{T=0} = \frac{\mu_A^3}{3\pi^2} + \frac{M^2 \mu_A}{\pi^2} \ln \frac{\Lambda_{UV}}{M} + \dots, \quad (80)$$

unde punctele indică contribuții nedivergente având ordinul $O(\mu_A)$, iar Λ_{UV} indică tăierea domeniului de integrare în domeniul ultraviolet.

Divergența logaritmică relevată în ec. (80) poate fi corelată și cu pierderea simetriei axiale când fermionii devin masivi, ceea ce sugerează că introducerea simultană a potențialului chimic axial nenul și a masei fermionilor nu este posibilă într-un context fizic coerent. Întrucât în teoriile în interacțiune, cum ar fi cromodinamica cuantică, masa este generată dinamic, potențialul chimic axial nu poate fi introdus direct, ci doar în urma trasării unei proceduri suplimentare de renormare [64]. În cele ce urmează, vom considera că $\mu_A = 0$.

3.2 Modelul liniar sigma cu quarcuri

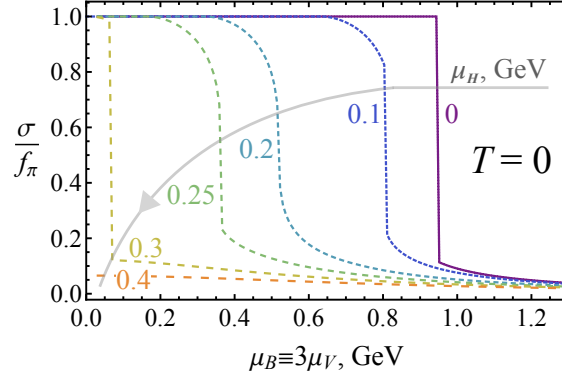
Modelul liniar sigma cu quarcuri poate fi considerat un model efectiv pentru limita energiilor joase a cromodinamicii cuantice [63]. Acest model conține două tipuri de câmpuri: dubletul cuarcurilor ușoare $\psi(x) = (u, d)^T$ și setul de pseudoscalari $(\sigma, \vec{\pi})$, care conține câmpul pseudoscalar σ , alături de izotripletul de pioni pseudoscalari $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Considerăm că fiecare dintre quarcurile ușoare e un triplet în spațiul culorilor. Deoarece teoria nu încorporează gluonii, gradele de libertate de culoare vor duce la un factor de degenerare $N_c = 3$ în expresia energiei libere a sistemului. Lagrangianul modelului LSM_q are doi termeni:

$$\mathcal{L}_{LSM} = \mathcal{L}_q(\bar{\psi}, \psi, \sigma, \vec{\pi}, L) + \mathcal{L}_\sigma(\sigma, \vec{\pi}). \quad (81)$$

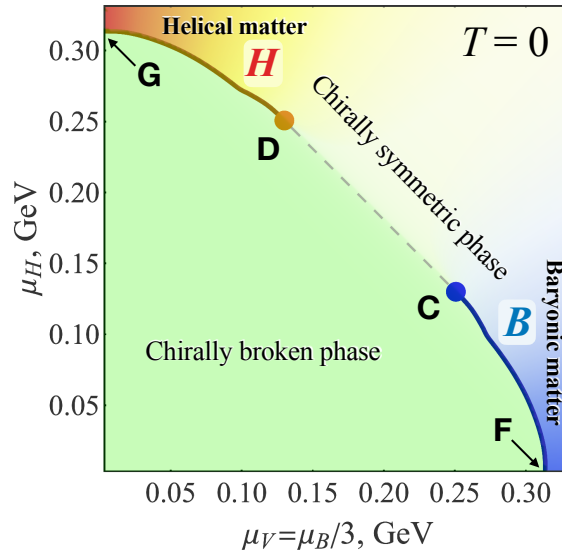
Primul termen,

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi} [i\cancel{\partial} - g(\sigma + i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})] \psi, \quad (82)$$

include termenul cinetic al quarcurilor și interacțiunea dintre câmpurile quarcurilor ψ și câmpurile chirale σ și $\vec{\pi}$. Pentru simplitate, considerăm cazul cuantelor fără masă, întrucât masele curente (nerenormate) ale quarcurilor ușoare sunt prea mici pentru a fi relevante.



(a)



(b)

Figura 3: (a) Parametrul de ordine al tranziției chirale σ/f_π ca funcție de potențialul chimic barionic $\mu_B \equiv 3\mu_V$, pentru diferite valori ale potențialului chimic helical μ_H , în cazul temperaturii nule. (b) Diagrama de fază în planul (μ_V, μ_H) la $T = 0$. Liniile solide reprezintă parametrii la care tranziția de fază este de speța I. În punctele critice marcate cu C și D , tranziția este de speța a II-a. De-a lungul liniei punctate care unește punctele C și D , tranziția este netedă. În zona din stânga sus, notată cu H , sarcina helicală n_H domină față de cea vectorială n_V , și vice-versa în colțul din dreapta jos, notat cu B , unde materia barionică ($n_B = 3n_V$) este dominantă.

Al doilea termen al Lagrangianului (81) descrie dinamica pionilor pseudoscalari:

$$\mathcal{L}_\sigma(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0) + \partial_\mu \pi^+ \partial_\mu \pi^- - V(\sigma, \vec{\pi}), \quad (83)$$

unde câmpurile mezonice încărcate și cel neutru sunt definite prin

$$\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^1 \pm i\pi^2), \quad \pi^0 = \pi^3. \quad (84)$$

Potențialul V conține doi termeni:

$$V(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - v^2)^2 - \mathfrak{h}\sigma. \quad (85)$$

Primul termen descrie ruperea spontană a simetriei chirale, dând naștere unei medii nenule a câmpului pseudoscalar $\langle \sigma \rangle \neq 0$. Deși primul termen ar putea induce condensarea pionilor pseudoscalari $\langle \vec{\pi} \rangle$, cel de-al doilea termen din V rupe explicit simetria dintre componentele setului de mezoni pseudoscalari $(\sigma, \vec{\pi})$ și maximizează în mod preferențial $\langle \sigma \rangle$. În plus, acest termen defavorizează condensarea pionilor, $\langle \vec{\pi} \rangle = 0$. Drept urmare, quarcurile dobândesc o masă dinamică, $M = g \langle \sigma \rangle$, datorită termenului de interacțiune de tip scalar-quarc din \mathcal{L}_q (82).

În continuare, vom considera aproximația câmpului mediu (*mean field*), neglijând fluctuațiile cuantice ale câmpurilor scalare σ și $\vec{\pi}$. În această aproximație, Lagrangianul (81) se reduce la

$$\mathcal{L}_{\text{MF}} = \bar{\psi} (i\not{\partial} - g\sigma) \psi - V(\sigma), \quad (86)$$

unde $V(\sigma) \equiv V(\sigma, \vec{0})$ reprezintă potențialul în cazul când $\vec{\pi} = \vec{0}$, iar câmpul mediu $\sigma \equiv \langle \sigma \rangle$ reprezintă media pseudoscalarului σ , care rămâne o cantitate dinamică. Pentru a reproduce fenomenologia QCD la energii joase, parametrii modelului sunt aleși după cum urmează [65]:

$$g = 3.3, \quad \lambda = 20, \quad v = 87.7 \text{ MeV}, \quad \mathfrak{h} = (114.3 \text{ MeV})^3. \quad (87)$$

Cu aceste valori ale parametrilor, media pe vid a pseudoscalarului este egală cu constanta de dezintegrare a pionului, $\langle \sigma \rangle = f_\pi = 92.2 \text{ MeV}$, masele dinamice ale quarcurilor,

$$M(\sigma) = g \langle \sigma \rangle, \quad (88)$$

capătă valoarea egală cu o treime din masa nucleonului ($M = 290 \text{ MeV}$), în timp ce masa pionului în ordinul întâi al teoriei perturbațiilor devine $m_\pi = \sqrt{\lambda(\langle \sigma \rangle^2 - v^2)} = 134 \text{ MeV}$, având valoarea cuprinsă în domeniul maselor fizice ale pionilor.

	F	C	L	E	K	D	P	A	G
$\mu_V(\text{MeV})$	314	242	208	190	142	125	0	0	0
$\mu_H(\text{MeV})$	0	125	142	0	208	242	0	190	314
$T(\text{MeV})$	0	0	46	104	46	0	144.5	104	0

Tabela 2: Parametrii punctelor evidențiate pe diagramele de fază din fig. 3(b) și 4(a,b).

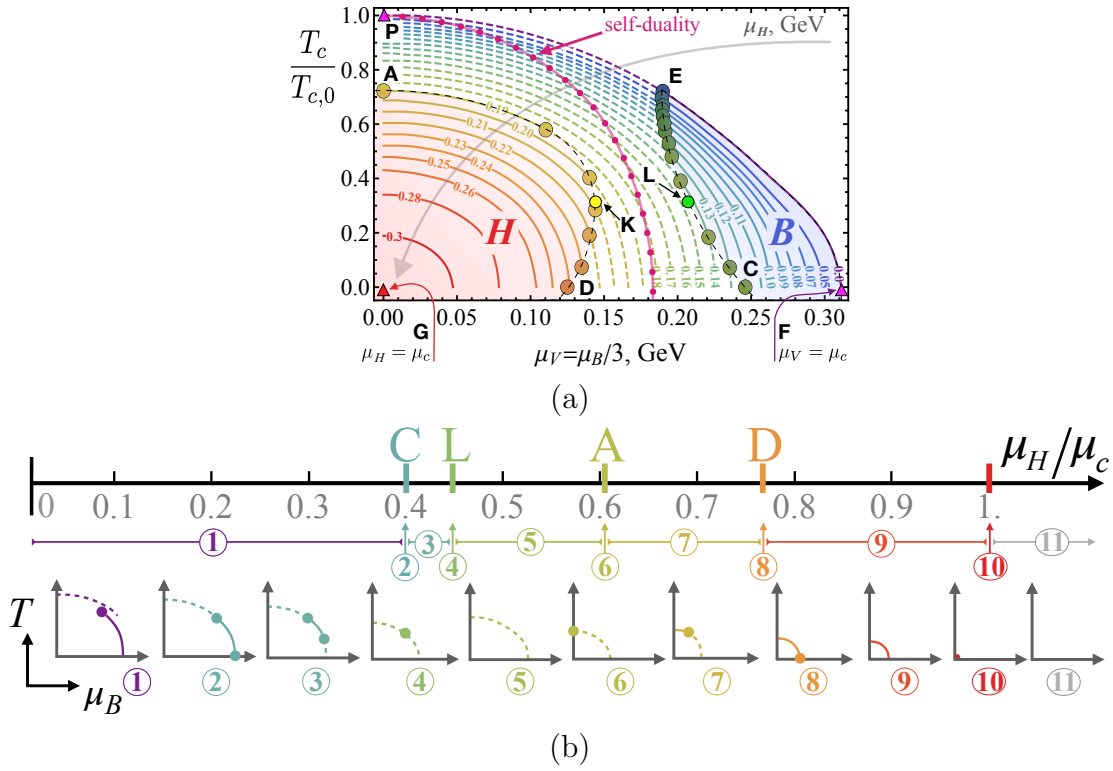


Figura 4: (a) Diagrama de fază în planul (μ_V, T) pentru diferite valori ale potențialului helical μ_H . Conturul exterior reprezintă valoarea parametrilor μ_V și T la care are loc tranziția de fază când $\mu_H = 0$. Fiecare contur interior corespunde parametrilor tranziției de fază pentru o valoare fixă a lui μ_H , care este înscrisă (în GeV) pe curbă. Porțiunile continue ale curbelor corespund tranziției de fază de speța I, în timp ce de-a lungul porțiunilor punctate, tranziția este netedă. Linia de autodualitate $\mu_V = \mu_H$ este reprezentată cu culoare roz. Valorile parametrilor punctelor înscrise pe diagramă pot fi consultate în tab. 2. (b) Evoluția structurii tranziției chirale pe măsură ce μ_H (reprezentat în unități ale potențialului chimic critic, $\mu_c \simeq 314$ MeV) crește. Punctele C, L, A, și D coincid cu cele reprezentate în diagrama (a).

3.3 Diagrama de fază a tranziției chirale

În starea de vid (la temperatură și potențiale chimice nule), quarcurile dobândesc masele quarcurilor constitutive iar Lagrangianul pierde simetria la transformările chirale. Pentru descrierea diagramei de fază corespunzătoare simetriei chirale, este convenabilă utilizarea raportului σ/f_π ca și parametru de ordine. Faza în care simetria chirală e ruptă corespunde valorii $\sigma/f_\pi = 1$, în timp ce restaurarea simetriei chirale are loc când $\sigma/f_\pi \simeq 0$.

Deși modelul nu se referă explicit la interacțiunea quarcurilor prin sarcina de culoare, se poate spune că faza în care simetria chirală este ruptă coincide cu faza hadronică a QCD. Creșterea temperaturii sau a valorilor potențialelor chimice peste un anumit prag produce scăderea dramatică a valorii lui σ , și deci a masei quarcurilor, restaurând simetria chirală a teoriei. Calitativ, această fază ar putea corespunde plasmei quarc-gluon, în care quarcurile nu mai sunt confinate în interiorul hadronilor.

În echilibru termodinamic, vom presupune că pseudoscalarul σ ia o valoare medie de așa natură încât energia liberă totală,

$$\Omega_T(\sigma; \mu_V, \mu_H) = V(\sigma) + \Omega_{q;T}(\sigma; \mu_V, \mu_H), \quad (89)$$

atinge valoarea minimă pentru valori fixate ale temperaturii T și ale potențialelor chimice $\mu_{V/H}$. Energia liberă corespunzătoare fermionilor,

$$\Omega_{q;T}(\sigma; \mu_V, \mu_H) = \Omega_{\text{vac}}(\sigma) + \Omega_T(\sigma; \mu_V, \mu_H), \quad (90)$$

este dată prin însumarea contribuției de vid,

$$\Omega_{\text{vac}}(\sigma) = -12 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}}(\sigma), \quad (91)$$

și a contribuției termodinamice:

$$\Omega_T(\sigma; \mu_V, \mu_H) = -6T \sum_{s=\pm 1} \sum_{\kappa=\pm 1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + \exp \left\{ -\frac{\omega_{\mathbf{p}}(\sigma) - s(\mu_V + \kappa\mu_H)}{T} \right\} \right), \quad (92)$$

unde energia $\omega_{\mathbf{p}}(\sigma) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + g^2\sigma^2}$ a fermionilor depinde de masa dinamică a acestora. Obținerea valorii lui σ necesită un proces iterativ numeric pentru minimizarea energiei libere. În timp ce contribuțiile termodinamică $\Omega_T(\sigma; \mu_V, \mu_H)$ și a pionilor $V(\sigma)$ sunt finite, termenul de vid, $\Omega_{\text{vac}}(\sigma)$ este întotdeauna infinit și deci trebuie regularizat. În general, rezultatul pentru $\Omega_{\text{vac}}(\sigma)$ va depinde de metoda de regularizare, ceea ce pune la îndoială puterea predictivă a modelului. Pentru evitarea acestui tip de ambiguitate, o abordare întâlnită des este de a ignora complet efectul termenului de vid [65, 66], ceea ce se justifică având în vedere natura infraroșie a acestui model efectiv. Aceasta abordare este aleasă și în cele ce urmează mai jos.

Să considerăm pentru început cazul temperaturii nule, fără a intra în detaliile tehnice

care sunt discutate mai pe larg în lucrarea [9]. Tranziția de la faza cu simetrie ruptă spre cea cu simetrie restaurată în urma creșterii potențialului chimic barionic $\mu_B = 3\mu_V$ (factorul 3 ține cont de faptul că un barion este alcătuit din 3 quarcuri) este reprezentată pentru diferite valori ale potențialului chimic helical μ_H în Fig. 3(a). La valori mici ale lui μ_H , se poate vedea că tranziția de fază este de speța I, în sensul că valoarea σ este o funcție discontinuă de μ_V . Același comportament se poate vedea la valori mari ale lui μ_H . Pentru valori intermediare ($\lesssim \mu_H \lesssim$), tranziția de fază e netedă. Fig. 3(b) prezintă diagrama de fază la $T = 0$ în planul (μ_V, μ_H) . Se pot distinge două curbe solide, care au un capăt pe axa orizontală (punctul F) sau verticală (punctul G) și celălalt capăt la valori finite ale potențialelor chimice (punctele C și D), de-a lungul cărora are loc tranziția de fază de speța I. Capetele C și D , situate în interiorul diagramei, reprezintă puncte critice unde tranziția de fază e de speța a II-a. În spațiul dintre aceste puncte, tranziția de fază este continuă (de tip *crossover*). Investigarea tranziției de fază chirală la potențial chimic helical nenul relevă existența punctelor critice chiar și la temperatură nulă. Valorile parametrilor punctelor evidențiate în figură pot fi consultate în tab. 2.

La temperaturi finite, structura diagramei de fază pentru cazul $\mu_H = 0$ este cunoscută. Tranziția de fază are loc de-a lungul conturului exterior al diagramei reprezentate în fig. 4(a). Partea solidă a acestui contur corespunde tranziției de fază de speța I. Punctul F de pe axa orizontală corespunde temperaturii nule, fiind același cu cel întâlnit în Fig. 3(a). Pe măsură ce potențialul chimic crește, curba în planul (μ_V, T) care descrie tranziția de fază se deplasează către interiorul diagramei, adică către valori mai mici ale lui μ_V la T fixat, respectiv valori mai mici ale lui T pentru μ_V fixat. Punctul L se găsește pe curba corespunzătoare valorii lui μ_H la care tranziția de fază este netedă pentru orice valori ale lui μ_V (sau echivalent, ale lui T). Tranziția de fază de speța a II-a revine când μ_H depășește valoarea de pe curba pe care se găsește punctul K . Acest punct este dual punctului L , în sensul că $(\mu_V, \mu_H)_K = (\mu_H, \mu_V)_L$, după cum se poate vedea în tab. 2. Din acest punct de vedere, punctul P este autodual, corespunzând tranziției de fază la $\mu_V = \mu_H = 0$. Restul punctelor vin în perechi date de transformarea de dualitate $\mu_V \leftrightarrow \mu_H$, curba de autodualitate reprezentată cu mov corespunzând cazului când $\mu_V = \mu_H$. O evoluție a liniei care caracterizează tranziția de fază chirală în raport cu valoarea lui μ_H poate fi văzută în fig. 4(b).

4 Undele helicalo-vorticele

Ecuațiile constitutive pentru curenții de sarcină vectorială (V), axială (A) și helicală (H) pentru materia fermionică la temperatură și potențiale chimice finite în rotație, relevate în lucrările [3, 8], stau la baza unei fenomenologii care poate fi descrisă cu ajutorul hidrodinamicii [67] sau teoriei cinetice [68] anormale. În lucrarea [67], Son și Surówka au discutat o formulare a hidrodinamicii anormale coerentă din punct de vedere termodinamic pornind de la diagramele triunghiulare anormale AVV și AAA care conțin cel puțin un vertex axial. În lucrarea [68], se are în vedere doar anomalia datorată triunghiului AVV . Deoarece majo-

ritatea lucrărilor în care se urmărește modelarea transportului anomal pornind de la teoria cinetică sau hidrodinamică au în vedere doar anomaliile care implică vertexul axial, acestea mai poartă numele și de teorii *chirale*.

Secțiunea aceasta a raportului prezintă pe scurt rezultatele obținute folosind o formulare a hidrodinamicii relativiste în care se urmărește propagarea excitațiilor într-un sistem în care sarcinile VAH pot fluctua. Ecuațiile care stau la baza acestui sistem sunt ecuațiile de continuitate pentru curenții VAH și ecuația de conservare a tensorului energie-impuls (TEI):

$$\nabla_\mu J_V^\mu = 0, \quad \nabla_\mu J_A^\mu = 0, \quad \nabla_\mu J_H^\mu = 0, \quad \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (93)$$

În total, avem la dispoziție $3 + 4 = 7$ ecuații pentru $3 \times 4 + 10 = 22$ de componente care sunt, în principiu, independente (considerăm că TEI este simetric, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$). Deoarece numărul de grade de libertate depășește numărul de ecuații, este necesară reducerea gradelor de libertate sau suplimentarea ecuațiilor cu noi ecuații de evoluție. Varianta a doua este adoptată în teoriile hidrodinamice de ordinul 2 sau superior. În cele ce urmează, vom considera prima varianta, în care gradele suplimentare de libertate sunt fixate prin relațiile constitutive cuantice. Mai exact, considerăm descompunerea curenților de sarcină J_ℓ^μ și a TEI în raport cu viteza macroscopică u^μ :

$$\begin{aligned} J_\ell^\mu &= Q_\ell u^\mu + V_\ell^\mu, \\ T^{\mu\nu} &= E u^\mu u^\nu - (P + \varpi) \Delta^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu} + W^\mu u^\nu + W^\nu u^\mu, \end{aligned} \quad (94)$$

unde V^μ și W^μ reprezintă fluxurile de sarcină și de căldură în sistemul propriu al fluidului (unde $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$), iar $\Pi^{\mu\nu}$ reprezintă tensiunile anizotrope. Presiunea dinamică ϖ este nulă în cazul constituenților de masă nulă, pentru care urma TEI este nulă, $T^\mu{}_\mu = 0$. Mai departe, considerăm că fluidul este în rotație, astfel încât

$$u_\Omega = \Gamma(\partial_t + \Omega\partial_\varphi), \quad \Gamma = (1 - \rho^2\Omega^2)^{-1/2}. \quad (95)$$

În acest caz, conform rezultatelor amintite în sec. 2.4, relațiile constitutive pentru V^μ , W^μ și $\Pi^{\mu\nu}$ sunt date de efectele helicalo-vorticale (EHV):

$$\begin{aligned} V_\ell^\mu &= \sigma_\ell^\omega \omega_\Omega^\mu + \sigma_\ell^\tau \tau_\Omega^\mu, \\ W^\mu &= \sigma_\varepsilon^\omega \omega^\mu + \sigma_\varepsilon^\tau \tau^\mu, \\ \Pi^{\mu\nu} &= \Pi_2(\omega^\mu \tau^\nu + \omega^\nu \tau^\mu), \end{aligned} \quad (96)$$

unde vectorii ω și τ au fost prezentați în sec. 2.3. Conductivitățile vorticale, σ_ℓ^ω și $\sigma_\varepsilon^\omega$, cele circulare, σ_ℓ^τ și σ_ε^τ , precum și coeficientul Π_2 , au fost prezentate în sec. 2.4. Merită remarcate legăturile dintre conductivitățile termice vorticală și circulară, σ_ℓ^ω și σ_ε^τ , și densitatea de

sarcină și conductivitatea vorticală axială, Q_A și σ_A^ω :

$$\kappa^\omega = Q_A, \quad \kappa^\tau = \sigma_A^\omega. \quad (97)$$

Analizând sistemul de ecuații (93) cu ecuațiile constitutive (94) și (96) în ipoteza micilor perturbații ale vitezei, densităților de sarcină și temperaturii față de valorile acestora în cazul rotației rigide, spectrul de excitații permise datorită efectelor helicalo-vorticale va fi relevant. Ignorând excitațiile transversale, vor fi relevate excitațiile corespunzătoare undelor sonore obișnuite, ale undelor helicalo-vorticale prezise în lucrarea [8], și a unei chirale, care nu se propagă, suferind doar atenuare datorită efectelor disipative.

Planul acestei secțiuni este după cum urmează. În subsec. 4.1 vor fi prezentate detaliile referitoare la metodologia utilizată, care are la bază studiul ecuațiilor de conservare la nivelul micilor perturbații (în regim liniar). Excitațiile helicalo-vorticale care apar în fluidul perfect (subsec. 4.2) și în fluidul real (disipativ), la potențiale chimice nule (subsec. 4.3). În ultimele două secțiuni, rezultatele sunt obținute analitic în limita temperaturilor mari. Pe viitor, este necesară analiza cazului temperaturilor neglijabile (când efectele de degenerare sunt importante), precum și analiza regimurilor intermediare, folosind o metodă numerică. Mai multe detalii pot fi găsite consultând lucrarea [27].

4.1 Micile perturbații

Presupunând că sistemul de coordonate este ales astfel încât vectorul vorticitate să fie aliniat axei z , facem presupunerea că sistemul este omogen în raport cu rotațiile în jurul acestei axe și deci vom considera că presupunerea simetriei axiale este validă. Plecând de la soluția pentru starea în rotație rigidă descrisă în preambulul acestei secțiuni și analizată folosind teoria cuantică de câmp în subsec. 2.4, vom considera mici perturbații la nivelul vitezei, densităților de sarcină și presiunii. Vom considera pentru simplitate că aceste perturbații se propagă doar de-a lungul axei z . În aproximația liniară, perturbațiile pot fi descompuse folosind baza Fourier la nivel de moduri individuale, după cum urmează:

$$u = u_\Omega + \delta u e^{-ik(vt-z)} \partial_z, \quad P = P_0(1 + \delta T e^{-ik(vt-z)}), \quad Q_\ell = Q_{\ell;0} + \delta Q_\ell e^{-ik(vt-z)}. \quad (98)$$

Mai departe, analiza se va concentra asupra vecinătății imediate a axei de rotație, când $\rho\Omega \ll 1$, iar temperatura T va fi considerată semnificativ mai mare decât $\mu_{\ell;0}$ și Ω . În acest regim, se obțin următoarele expresii:

$$\begin{aligned} u &\simeq \partial_t + \Omega \partial_\varphi + \delta u e^{-ik(vt-z)} \partial_z, & a &\simeq -ikv\delta u e^{-ik(vt-z)} \partial_z, \\ \omega &\simeq \Omega \partial_z + \Omega \delta u e^{-ik(vt-z)} \left(\partial_t - \frac{i}{2} kv\rho \partial_\rho \right), & \tau &\simeq 0. \end{aligned} \quad (99)$$

Aceeași descompunere în raport cu modurile Fourier poate fi făcută și pentru densitățile de sarcină, respectiv pentru presiune:

$$Q_\ell = Q_{\ell;0} + \delta Q_\ell e^{-ik(vt-z)}, \quad P = P_0 + \delta P e^{-ik(vt-z)}. \quad (100)$$

Mai sus și în cele ce urmează, indicele 0 denotă starea neperturbată (de fundal). Considerând că derivatele și vorticității sunt

$$\begin{aligned} \nabla_\mu u^\mu &= ike^{-ik(vt-z)} \delta u, \\ \nabla_\mu \omega^\mu &= -2ikv\Omega e^{-ik(vt-z)} \delta u, \\ \omega^\nu \nabla_\nu u^\mu &= ik\Omega e^{-ik(vt-z)} \delta u \delta^\mu_z, \end{aligned} \quad (101)$$

ecuațiile de conservare (102) se reduc la următoarele relații:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_\mu J_\ell^\mu}{ike^{-ik(vt-z)}} &= (Q_\ell - 2v\Omega\sigma_\ell^\omega) \delta u - v\delta Q_\ell + \Omega\delta\sigma_\ell^\omega, \\ \frac{\nabla_\nu T^{t\nu}}{ike^{-ik(vt-z)}} &= (E + P - 3v\Omega\kappa^\omega) \delta u - v\delta E + \Omega\delta\kappa^\omega, \\ -\frac{\nabla_\nu T^{z\nu}}{ike^{-ik(vt-z)}} &= [v(E + P) - 2\Omega\kappa^\omega] \delta u - \delta P + v\Omega\delta\kappa^\omega. \end{aligned} \quad (102)$$

4.2 Fluide perfecte

Undele sonore se disting prin faptul că acestea se propagă în absența vorticității, drept urmare sunt de ordinul 0 în raport cu Ω . Considerând următoarea dezvoltare în puteri ale lui Ω ,

$$\begin{aligned} v &= v_0 + v_1\Omega, & \delta u &= \delta u_0 + \delta u_1\Omega, \\ \delta P &= \delta P_0 + \delta P_1\Omega, & \delta Q_\ell &= \delta Q_{\ell;0} + \delta Q_{\ell;1}\Omega, \end{aligned} \quad (103)$$

ultimele două relații ale ec. (102) pot fi exprimate în ordinul 0 după cum urmează:

$$\begin{pmatrix} 4P & -3v_0 \\ 4v_0P & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_0 \\ \delta P_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (104)$$

Soluțiile netriviiale se obțin impunând anularea determinantului matricei din membrul stâng, relevând astfel vitezele de propagare a sunetului în fluidul ultrarelativist:

$$v_0^{a;\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \delta P_0^{a;\pm} = \pm \frac{4P}{\sqrt{3}} \delta u_0. \quad (105)$$

Mai sus, notația \pm indică faptul că sunt două moduri diferite cu ajutorul cărora se propagă undelor sonore. Considerând ecuațiile de conservare a sarcinilor [prima relație din ec. (102)], precum și ordinul 1 al ec. (102), se pot obține expresii pentru amplitudinile fluctuațiilor în

densitățile de sarcină, precum și corecții de ordin superior în raport cu Ω pentru viteza de propagare și pentru amplitudinea perturbațiilor (mai multe detalii se găsesc în lucrarea [27]).

Deoarece undele vorticale nu pot exista în absența vorticității, este de așteptat ca viteza lor de propagare să fie cel puțin de ordinul 1 (liniară) în Ω . Conform notației din ec. (103), această presupunere implică $v_0 = 0$, astfel încât sectorul TEI al ec. (102) se reduce la:

$$\delta u_0^{v;*} = \delta P_0^{v;*} = \delta P_1^{v;*} = 0, \quad \delta u_1^{v;*} = -\frac{1}{4P} \frac{\partial \kappa^\omega}{\partial Q_\ell} \delta Q_{\ell;0}^{v;*} = -\frac{1}{4P} \delta Q_{A;0}^{v;*}, \quad (106)$$

unde indicele superior v denotă cantități referitoare la undele vorticale, iar steluța $*$ $\in \{\pm, A\}$ este folosită pentru distingerea între cele două moduri helicalo-vorticale (\pm) și modul chiralovortical. Vitezele de propagare ale modurilor vorticale pot fi obținute din ecuația de conservare a curenților de sarcină, ec. (102):

$$\left(\frac{\partial \sigma_\ell^\omega}{\partial Q_{\ell'}} - \frac{Q_\ell}{4P} \frac{\partial \kappa^\omega}{\partial Q_{\ell'}} - v_1 \delta_{\ell,\ell'} \right) \delta Q_{\ell';0}^{v;*} = 0. \quad (107)$$

Din ecuația de mai sus, se vede că vitezele de propagare permise sunt valorile proprii ale matricei \mathbb{W} , definită prin

$$\mathbb{W}_{\ell,\ell'} = \left(\frac{\partial \sigma_\ell^\omega}{\partial Q_{\ell'}} \right)_P - \frac{Q_\ell}{4P} \delta_{A,\ell'}. \quad (108)$$

Ecuația este dificil de rezolvat deoarece conductivitățile vorticale σ_ℓ^ω sunt date în funcție de potențialele chimice μ_ℓ în ec. (57), în timp ce pentru construcția matricei \mathbb{W} este necesară derivarea acestora în raport cu densitățile de sarcină. Pentru a putea obține soluții analitice, este convenabilă exprimarea vitezelor de propagare ca serii în puteri inverse ale temperaturii. Pentru undele helicalo-vorticale, primul ordin nenul este T^{-1} , caz în care se obține:

$$v^{v;\pm} = \pm \frac{6 \ln 2\Omega}{\pi^2 T} + O(\Omega^2, \Omega T^{-2}). \quad (109)$$

Pentru unda chiralovorticală, contribuția dominantă la viteză este proporțională cu T^2 :

$$v^{v;A} = -\frac{9\mu_A \Omega}{7\pi^2 T^2}. \quad (110)$$

Este interesant că dacă mediul nu prezintă dezechilibru axial ($\mu_A = 0$), unda chirală nu se propagă.

Înainte de încheierea acestei secțiuni, este important de remarcat că undele vorticale au fost intens studiate în absența sectorului helical. În lucrarea [69], Jiang *et al.* studiază propagarea excitațiilor într-un mediu cu dezechilibru axial și vectorial, presupunând că sectorul hidrodinamic este “înghețat” ($\delta u = \delta T = 0$). În absența gradelor de libertate referitoare la viteză, temperatură și sarcină helicală, perturbațiile se propagă exclusiv cu ajutorul sectoarelor axial și vectorial (AV), astfel rezultând viteza

$$v_{AV}^\pm = \frac{3\Omega(\mu_A \pm \mu_V)}{\pi^2 T^2}. \quad (111)$$

Relația de mai sus coincide cu cea prezentată în ec. (8) din lucrarea [69]. Ca și trăsătură comună cu unda chiralo-vorticală prezentată în ec. (110), viteza este proporțională cu puterea întâi a vorticității și invers proporțională cu pătratul temperaturii. O diferență importantă însă este faptul că viteza de propagare este determinată de combinația $\mu_A \pm \mu_V$ și deci rămâne nenulă chiar și în absența dezechilibrului axial (când $\mu_A = 0$).

Un alt exemplu este unda termică chirală, obținută în lucrarea [70] considerând că fluctuațiile în viteză, sarcină vectorială și sarcină helicală sunt înghețate ($\delta u = \delta \mu_V = \delta \mu_H = 0$). În acest caz, se obține viteza de propagare

$$v_{\text{CHW}} = \pm \frac{\Omega}{\pi T} \sqrt{\frac{5}{7}}, \quad (112)$$

care nu depinde deloc de potențialul chimic axial sau vectorial.

4.3 Fluide reale

În fluidele reale, mișcarea diferențială a straturilor alăturate de fluid suferă disipare. De asemenea, gradientii de temperatură pot induce fluxuri de căldură, care disipează energia termică dinspre zonele mai calde înspre cele mai reci. Aceste fenomene disipative pot fi modelate prin adăugarea următorilor termeni în TEI, respectiv în curenții de sarcină:

$$\Pi_{\text{diss}}^{\mu\nu} = \eta \left(\Delta^{\mu\alpha} \Delta^{\nu\beta} + \Delta^{\mu\beta} \Delta^{\nu\alpha} - \frac{2}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta^{\alpha\beta} \right) \nabla_\alpha u_\beta, \quad n_\ell^\mu = \kappa_\ell \nabla^\mu \left(\frac{\mu_\ell}{T} \right), \quad (113)$$

unde $\nabla^\mu = \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu$ și $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$ este proiectorul pe hipersuprafața ortogonală pe u^μ . Coeficienții de transport η (vâscozitatea dinamică) și κ_ℓ (conductivitatea termică) pot fi obținuți folosind teoria cinetică relativistă [71]:

$$\eta = \tau \frac{E + P}{5}, \quad \kappa_\ell = \tau \left(\frac{J_{10}^+}{3} - \frac{Q_\ell^2 T}{E + P} \right), \quad (114)$$

unde τ e timpul de relaxare și

$$J_{10}^+ = \frac{\pi^2 T^2 + 3\mu_\ell^2 T Q_\ell}{\pi^2 T^2 + \mu_\ell^2 \mu_\ell}. \quad (115)$$

Impunând ca raportul η/s dintre vâscozitatea dinamică și densitatea de entropie

$$s = \frac{E + P - \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\mu}}{T}, \quad (116)$$

să fie constant, se obține următoarea expresie pentru timpul de relaxare:

$$\tau = \frac{5\eta}{sT} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{Q}}{E + P} \right). \quad (117)$$

La temperaturi mari, vâscozitatea este

$$\eta = \frac{\eta E + P - \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\mu}}{T} \simeq \frac{\eta 7\pi^2 T^3}{s 45}. \quad (118)$$

Ținând cont de termenii disipativi, ecuațiile de conservare ec. (102) devin

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_\mu J_\ell^\mu}{ik e^{-ik(vt-z)}} &= (Q_\ell - 2v\Omega\sigma_\ell^\omega)\delta u - v\delta Q_\ell - ik\kappa_\ell\delta\left(\frac{\mu_\ell}{T}\right) + \Omega\delta\sigma_\ell^\omega, \\ \frac{\nabla_\nu T^{t\nu}}{ik e^{-ik(vt-z)}} &= (E + P - 3v\Omega\kappa^\omega)\delta u - v\delta E + \Omega\delta\kappa^\omega, \\ -\frac{\nabla_\nu T^{z\nu}}{ik e^{-ik(vt-z)}} &= \left[v(E + P) - 2\Omega\kappa^\omega + \frac{4i\eta k}{3}\right]\delta u - \delta P + v\Omega\delta\kappa^\omega. \end{aligned} \quad (119)$$

În cazul când potențialele chimice se anulează, $\mu_{\ell;0} = 0$, densitățile de sarcină sunt nule ($Q_{\ell;0} = 0$), în timp ce conductivitățile vorticale satisfac $\sigma_{V;0}^\omega = \sigma_{H;0}^\omega = \kappa^\omega = 0$ și $\sigma_{A;0}^\omega = \frac{T^2}{6}$. Fluctuațiile δP , δQ_ℓ , $\delta\sigma_\ell^\omega$ și $\delta\kappa^\omega$ pot fi exprimate prin

$$\begin{aligned} \delta P &= \frac{7\pi^2 T^3}{45}\delta T, & \delta Q_\ell &= \frac{T^2}{3}\delta\mu_\ell, \\ \delta\sigma_{V/H}^\omega &= \frac{2T \ln 2}{\pi^2}\delta\mu_{H/V}, & \delta\sigma_A^\omega &= \frac{T}{3}\delta T, & \delta\kappa^\omega &= \frac{T^2}{3}\delta\mu_A. \end{aligned} \quad (120)$$

În limita descrisă mai sus, ec. (119) devine

$$\begin{pmatrix} 4P_0 & -3v & \Omega & 0 & 0 \\ 4vP_0 + \frac{4i\eta k}{3} & -1 & v\Omega & 0 & 0 \\ -\frac{v\Omega T_0^2}{3} & \frac{\Omega T_0^2}{12P_0} & -v - \frac{3ik\kappa_A}{T_0^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v - \frac{3ik\kappa_V}{T_0^3} & \frac{6\Omega \ln 2}{\pi^2 T_0} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6\Omega \ln 2}{\pi^2 T_0} & -v - \frac{3ik\kappa_H}{T_0^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta P \\ \delta Q_A \\ \delta Q_V \\ \delta Q_H \end{pmatrix} = 0. \quad (121)$$

Vitezele de propagare pot fi obținute impunând anularea determinantului matricei din partea stângă a semnelui egal. Blocul 2×2 din stânga sus descrie undele sonore, în timp ce blocul 2×2 din dreapta jos descrie undele helicalo-vorticale. Elementul de pe poziția (3, 3) corespunde unei axiale vorticale. În ordinul 1 în raport cu vorticitatea Ω și cu coeficienții de transport η și κ_A , se obțin relațiile:

$$v^{a;\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{ik\eta}{6P_0}, \quad v^A = -\frac{3ik\kappa_A}{T_0^3}, \quad (122)$$

de unde se vede că modul axialo-vortical suferă atenuare exponențială. Propagarea undelor helicalo-vorticale are loc cu vitezele

$$v^{v;\pm} = -\frac{3ikv}{2T^3}(\kappa_V + \kappa_H) \pm \sqrt{\left(\frac{6\Omega \ln 2}{\pi^2 T_0}\right)^2 - \left[\frac{3k}{2T^3}(\kappa_V - \kappa_H)\right]^2}. \quad (123)$$

Din ecuația de mai sus, reiese că undele helicalo-vorticale se pot propaga doar în cazul când cantitatea de sub radical este pozitivă:

$$|\Omega| > \left| \frac{\pi^2 T_0}{6 \ln 2} \times \frac{3k}{2T^3} (\kappa_V - \kappa_H) \right| \quad (124)$$

5 Anomaliile în electrodinamica cuantică cu vertex helical

Anomaliile cuantice reprezintă violări ale legilor de conservare stabilite la nivelul teoriei libere datorate interacțiunilor. Aceste violări pot fi evidențiate folosind teoria perturbațiilor considerând media pe vid a operatorilor de curenți de sarcină, în prezența câmpurilor de interacțiune clasice (externe). În cazul curentului axial, conservarea acestuia este violată la nivelul diagramelor triunghiulare, reprezentând bucle cu trei vertexuri, dintre care cel puțin unul este de tip axial (A), adică corespunde curentului axial. În teoria fermionilor cu simetrie $U(1)_V \times U(1)_A$ (corespunzând transformărilor vectorială și axială), legea de conservare a curentului axial este modificată după cum urmează [35, 44, 45]:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \hat{J}_A^\mu &= 2iM \hat{\Psi} \gamma^5 \hat{\Psi} + \mathcal{A}_{AVV} + \mathcal{A}_{AAA} + \mathcal{A}_{ATT}, \\ \mathcal{A}_{AVV} &= -\frac{e_V^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}^V F_{\alpha\beta}^V, \\ \mathcal{A}_{AAA} &= -\frac{e_A^2}{48\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}^A F_{\alpha\beta}^A, \\ \mathcal{A}_{ATT} &= \frac{1}{384\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} \tilde{R}^\sigma{}_{\lambda\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (125)$$

unde $F_{\mu\nu}^V$ și $F_{\mu\nu}^A$ reprezintă tensorul câmpului electromagnetic, respectiv cel al câmpului de interacțiune axial, iar e_V și e_A reprezintă sarcinile corespunzătoare. Mai sus, $R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu} \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} + \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}$ reprezintă tensorul Riemann, $\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\beta g_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta})$ este simbolul Christoffel iar $g_{\mu\nu}$ e metrica spațiu-timpului. Fiecare dintre termenii de mai sus provine dintr-o diagramă triunghiulară, mai exact \mathcal{A}_{AVV} provine din diagrama care are un vertex axial și două vertexuri vectoriale.

Pe lângă violarea legilor de conservare valide în teoria clasică, este cunoscut faptul că anomaliile axiale și diagramele triunghiulare corespunzătoare sunt răspunzătoare pentru generarea transportului anomal [29], generat de câmpuri electromagnetice externe [46, 47] sau datorită vorticității mediului [48, 49, 50]. Să luăm ca exemplu conductivitățile vorticale din

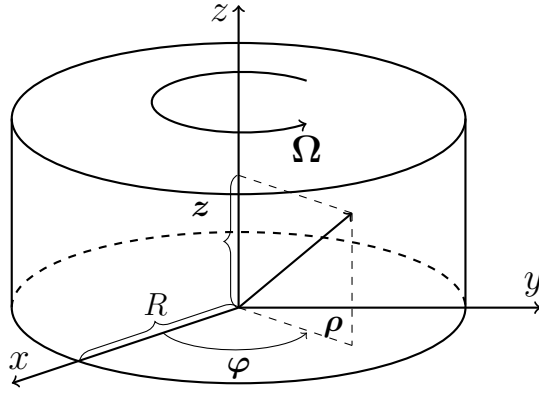


Figura 5: Geometria sistemelor în rotație în jurul axei z , cu viteza unghiulară $\Omega = \Omega \mathbf{k}$. Coordonatele cilindrice ρ , φ și z ale unui punct oarecare de coordonate (x, y, z) sunt reprezentate schematic. Frontiera se găsește la distanța R de axa de rotație.

modele. Rezultatele fac obiectul unui articol [30] care este momentan în lucru.

6.1 Condiții macroscopice pe frontieră în teoria cuantică de câmp

Să considerăm cazul câmpului Klein-Gordon în interiorul unui cilindru de rază R (sistemul este reprezentat schematic în Fig. 5). Ne interesează să găsim o legătură între condițiile pe frontieră impuse pentru câmp și valoarea vitezei pe suprafața cilindrului, măsurată într-o stare în rotație rigidă cu viteza unghiulară Ω , corespunzătoare temperaturii β . Pentru simplitate, păstrăm discuția la nivelul cuantelor fără masă. Folosind teoria cinetică a gazelor, se observă că soluția corespunzătoare rotației rigide este una de echilibru termodinamic global, astfel încât tensorul energie-impuls este cel corespunzător fluidului perfect:

$$T_{\text{RKT}}^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} = (E_{\text{RKT}} + P_{\text{RKT}})u_{\text{RKT}}^{\hat{\alpha}}u_{\text{RKT}}^{\hat{\gamma}} + P_{\text{RKT}}\eta^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}, \quad (127)$$

unde $P_{\text{RKT}} = \frac{1}{3}E_{\text{RKT}}$ în cazul particulelor fără masă, iar $u_{\text{RKT}}^{\hat{\alpha}}$ este cuadriviteza corespunzătoare rotației rigide:

$$u_{\text{RKT}}^{\hat{0}} = \Gamma_{\text{RKT}}, \quad u_{\text{RKT}}^{\hat{\rho}} = 0, \quad u_{\text{RKT}}^{\hat{\varphi}} = \Gamma_{\text{RKT}}v_{\text{RKT}}, \quad u_{\text{RKT}}^{\hat{z}} = 0. \quad (128)$$

Viteza v_{RKT} corespunzătoare rotației rigide cu viteză unghiulară Ω și factorul Lorentz Γ_{RKT} aferent sunt date prin:

$$v_{\text{RKT}} = \rho\Omega, \quad \Gamma_{\text{RKT}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{RKT}}^2}}. \quad (129)$$

Densitatea de energie E_{RKT} are expresia:

$$E_{\text{RKT}} = \frac{\pi^2\Gamma^4}{30\beta^4}. \quad (130)$$

Soluțiile ecuației Klein-Gordon sunt:

$$f_j = N_j \frac{e^{-i\omega_j t + ik_j z + im_j \varphi}}{\sqrt{8\pi^2 \omega_j}} J_{m_j}(q_j \rho), \quad (131)$$

unde $q_j = \sqrt{\omega_j^2 - k_j^2}$ este valoarea impulsului pe direcția radială, k_j este impulsul de-a lungul axei z , ω_j este energia, m_j este proiecția momentului cinetic pe axa z iar N_j este o constantă de normare. Indicele j se referă la colecția numerelor cuantice care caracterizează soluția f_j . Pentru a asigura ortogonalitatea soluțiilor (131), trebuie satisfăcută relația:

$$[q_j R J'_{m_j}(q_j R)] + \Psi J_{m_j}(q_j R) = 0. \quad (132)$$

Relația de mai sus definește condițiile pe frontieră de tip Robin. Se recuperează condițiile Dirichlet când $\Psi \rightarrow \infty$, respectiv condițiile von Neumann pentru $\Psi \rightarrow 0$. Pentru $m_j = m$ fixat, ec. (132) admite o infinitate de soluții $q_j \rightarrow q_{m,\ell}$ ($\ell = 1, 2, 3, \dots$) care formează o mulțime discretă.

Mediile componentelor TEI într-o stare în rotație rigidă la temperatură finită se pot calcula cu formula:

$$\langle : T_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} : \rangle_{\beta;\Omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|N_{km\ell}|^2 dk}{12\pi^2 \omega_{km\ell} (e^{\beta \tilde{\omega}_{km\ell}} - 1)} F_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}, \quad (133)$$

unde $\tilde{\omega}_{km\ell} = \omega_{km\ell} - \Omega m$ reprezintă energia măsurată de către observatorii aflați în rotație rigidă iar termenii $F_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}$ au expresiile:

$$\begin{aligned} F_{\hat{0}\hat{0}} &= (6\omega_{km\ell}^2 + \rho^{-2}m^2 - q_{m\ell}^2) J_m^2(q_{m\ell}\rho) + q_{m\ell}^2 J_m'^2(q_{m\ell}\rho), \\ F_{\hat{\varphi}\hat{0}} &= -6\omega_{km\ell}\rho^{-1}m J_m^2(q_{m\ell}\rho), \\ F_{\hat{\rho}\hat{\rho}} &= (-3\rho^{-2}m^2 + 3q_{m\ell}^2) J_m^2(q_{m\ell}\rho) + 2q_{m\ell}\rho^{-1}J_m(q_{m\ell}\rho)J_m'(q_{m\ell}\rho) + 3q_{m\ell}^2 J_m'^2(q_{m\ell}\rho), \\ F_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} &= (5\rho^{-2}m^2 + q_{m\ell}^2) J_m^2(q_{m\ell}\rho) - 2q_{m\ell}\rho^{-1}J_m(q_{m\ell}\rho)J_m'(q_{m\ell}\rho) - q_{m\ell}^2 J_m'^2(q_{m\ell}\rho), \\ F_{\hat{z}\hat{z}} &= (6k^2 - \rho^{-2}m^2 + q_{m\ell}^2) J_m^2(q_{m\ell}\rho) - q_{m\ell}^2 J_m'^2(q_{m\ell}\rho). \end{aligned} \quad (134)$$

Pentru ca factorul Bose-Einstein $(e^{\beta \tilde{\omega}_{km\ell}} - 1)^{-1}$ să nu divergă, energia $\tilde{\omega}_{km\ell}$ trebuie să fie totdeauna pozitivă. Acest lucru trebuie asigurat prin condițiile pe frontieră, în sensul că Ψ trebuie ales astfel încât $\omega_{km\ell} > \Omega m$ pentru orice valori ale lui k , m și ℓ , inclusiv când $k = 0$ și $\ell = 1$ (prima rădăcină). Drept urmare, avem de satisfăcut suplimentar condiția $q_{m,1} > m\Omega$. Se știe că pentru condițiile Dirichlet ($\Psi \rightarrow \infty$) și von Neumann ($\Psi = 0$), relația $q_{m,\ell}R > m \geq m\Omega R$ este totdeauna satisfăcută, unde ultima inegalitate este validă atunci când $\Omega R \leq 1$ (suprafața $\rho\Omega = 1$ corespunde orizontului de rotație, unde toate valorile medii diverg deoarece viteza observatorilor în rotație rigidă atinge viteza luminii). Explorările numerice arată că valorile pozitive ale lui Ψ interpolează între zerourile aferente condițiilor von Neumann și Dirichlet, asigurând condiția $\tilde{\omega}_{km\ell} > 0$, în timp ce pentru $\Psi < 0$, zerourile

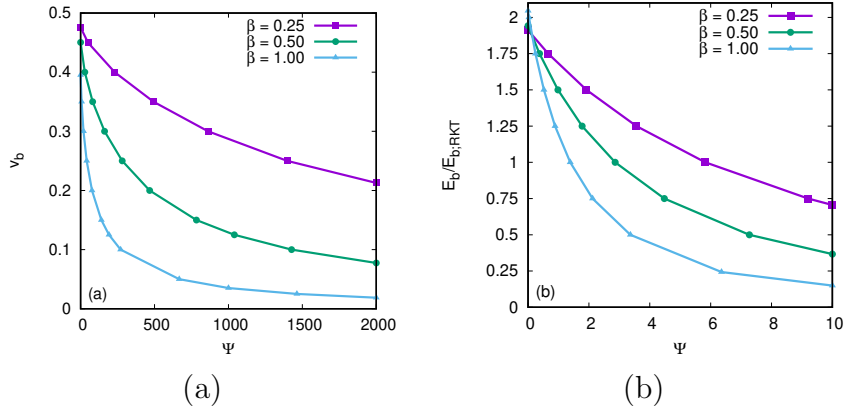


Figura 6: Dependența valorilor (a) v_b și (b) $E_b/E_{b;\text{RKT}}$ de Ψ pentru diverse valori ale inversei temperaturii β pentru $\Omega = 0.5$ și $R = 1$.

se deplasează spre stânga.

Pentru evaluarea vitezei v aferentă stării în rotație rigidă, se poate utiliza reperul Landau, definit prin:

$$T^{\hat{\alpha}}_{\hat{\gamma}} u^{\hat{\gamma}} = -E u^{\hat{\alpha}}, \quad v = \frac{u^{\hat{\phi}}}{u^{\hat{0}}}, \quad (135)$$

unde E este densitatea de energie Landau, u^μ este viteza Landau iar v reprezintă analogul cuantic al mărimii v_{RKT} (129). Se poate arăta că între componentele TEI și v există relația:

$$T^{\hat{0}\hat{\phi}} = \frac{v}{1+v^2} (T^{\hat{0}\hat{0}} + T^{\hat{\phi}\hat{\phi}}). \quad (136)$$

Evaluând ec. (136) pe frontieră și impunând $v(R) = v_b$, rezultă relația:

$$\Psi = \frac{3 \sum_{m,\ell} \left(1 + \frac{\Psi^2 - m^2}{q^2 R^2}\right)^{-1} \int \frac{dk}{\omega(e^{\beta\tilde{\omega}} - 1)} \left[\omega R m - \frac{v_b (\omega^2 R^2 + m^2)}{1 + v_b^2} \right]}{\frac{v_b}{1 + v_b^2} \sum_{m,\ell} \left(1 + \frac{\Psi^2 - m^2}{q^2 R^2}\right)^{-1} \int \frac{dk}{\omega(e^{\beta\tilde{\omega}} - 1)}}, \quad (137)$$

unde indicii m , ℓ și k au fost suprimați pentru a nu încălca expresia. Ecuația de mai sus permite determinarea iterativă a lui Ψ , pornind de la o valoare test $\Psi^{(0)}$, care se introduce în membrul drept al egalității pentru a obține în membrul stâng o nouă valoare $\Psi^{(1)}$. La iterația n , se introduce $\Psi^{(n-1)}$ în membrul drept și se obține în membrul stâng $\Psi^{(n)}$. Algoritmul atinge convergența când

$$|\Psi^{(n)} - \Psi^{(n-1)}| < \varepsilon, \quad (138)$$

unde $\varepsilon = 0.001$. Rezultatul aplicării algoritmului de mai sus se poate vedea în Fig. 6, unde sunt reprezentate dependențele vitezei pe perete v_b și a raportului $E_b/E_{b;\text{RKT}}$ de Ψ pentru trei valori ale lui β . Se poate observa că $v_b < \Omega R = 0.5$ pentru toate valorile lui $\Psi \geq 0$.

Alegerea lui Ψ nu influențează doar valoarea vitezei pe frontieră (v_b), ci și profilele componentelor TEI. În Fig. 7(a) și 7(b) se pot vedea comportamentele energiei Landau E și

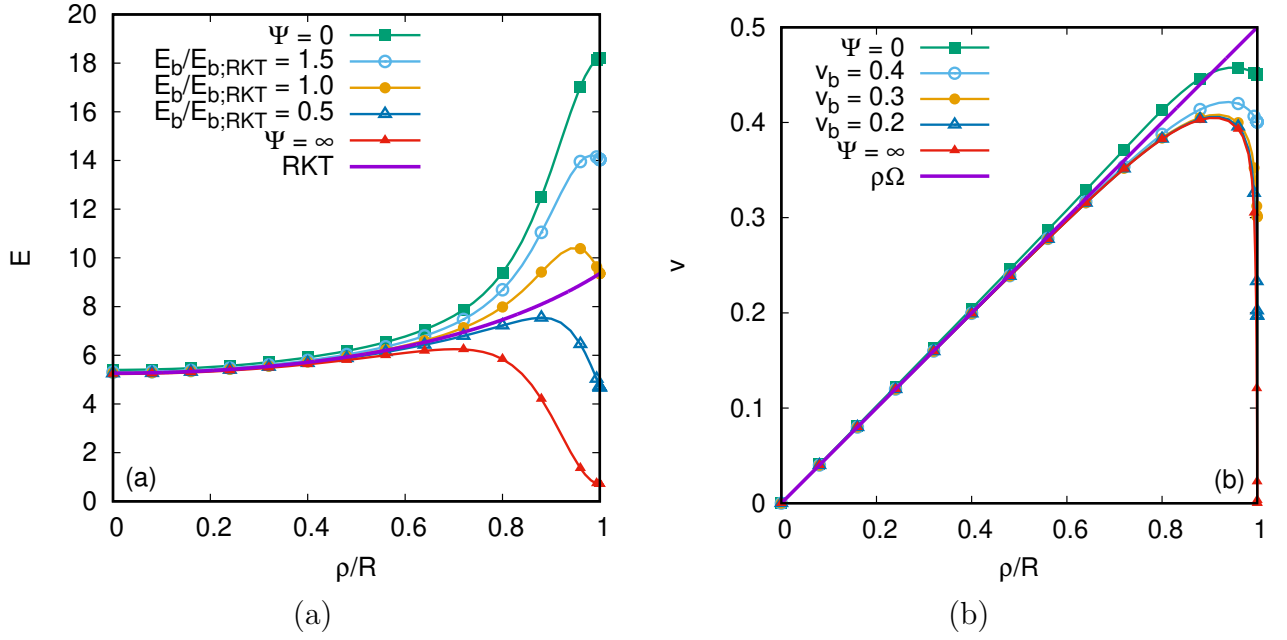


Figura 7: Profilele (a) energiei Landau E și (b) vitezei azimutale v ca funcție de ρ/R pentru diferite valori ale lui Ψ . Rezultatele obținute cu teoria cinetică relativistă E_{RKT} (130) și $v_{\text{RKT}} = \rho\Omega$ (129) sunt reprezentate folosind linii continue de culoare mov. Valorile parametrilor sunt $\Omega = 0.5$, $R = 1$ și $\beta = 0.5$.

vitezei azimutale v (135) pentru $\Psi = 0$ (condiții von Neumann), $\Psi = \infty$ (condiții Dirichlet) și pentru valori speciale ale lui Ψ , alese pentru cazul (a) astfel încât raportul $E_b/E_{b;\text{RKT}}$ să fie egal cu 0.5, 1 și 1.5. Pentru cazul (b), sau ales valori ale lui Ψ astfel încât $v_b = 0.2, 0.3$ și 0.4. În ambele cazuri, $R = 1$, $\Omega = 0.5$ și $\beta = 0.5$. Cazul corespunzător lui $\Psi = 0$ iese în evidență printr-o creștere semnificativă a energiei în vecinătatea frontierei, în timp ce viteza Landau depășește predicția teoriei cinetice a gazelor ($v_b > \Omega R$).

6.2 Model cinetic pentru sistemul format din quarcuri și gluoni

Rezultatele preliminare prezentate în cadrul acestei secțiuni fac obiectul unui articol în lucru [30].

Un sistem compus din particule bozonice (*gluonii*), distribuite conform funcției \tilde{f}_g , precum și din particule și antiparticule fermionice (*quarcurile* și *antiquarcurile*), distribuite conform funcțiilor \tilde{f}_q și $\tilde{f}_{\bar{q}}$, poate fi modelat folosind ecuația Boltzmann relativistă:

$$\tilde{p}^\mu \tilde{\partial}_\mu \begin{pmatrix} \tilde{f}_q \\ \tilde{f}_{\bar{q}} \\ \tilde{f}_g \end{pmatrix} = \frac{\tilde{p} \cdot \tilde{u}}{\tilde{c}^2 \tilde{\tau}_{\text{A-W}}} \begin{pmatrix} \tilde{f}_q - \tilde{f}_q^{(0)} \\ \tilde{f}_{\bar{q}} - \tilde{f}_{\bar{q}}^{(0)} \\ \tilde{f}_g - \tilde{f}_g^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (139)$$

unde $\tilde{\tau}_{\text{A-W}}$ reprezintă timpul de relaxare întrebuințat în modelul Anderson-Witting pentru integrala de coliziune. Distribuțiile la echilibru termodinamic corespunzătoare quarcurilor $\tilde{f}_q^{(0)}$ și antiquarcurilor ($\tilde{f}_{\bar{q}}^{(0)}$) corespund statisticii Fermi-Dirac, în timp ce distribuția la echilibru

termodinamic a gluonilor $\tilde{f}_g^{(0)}$ corespunde statisticii Bose-Einstein, după cum urmează:¹

$$\begin{aligned}\tilde{f}_q^{(0)} &= \frac{g_q}{(2\pi\tilde{\hbar})^3} \left[\exp\left(-\frac{\tilde{p}\cdot\tilde{u}}{\tilde{k}_B\tilde{T}} - \alpha\right) + 1 \right]^{-1}, \\ \tilde{f}_{\bar{q}}^{(0)} &= \frac{g_q}{(2\pi\tilde{\hbar})^3} \left[\exp\left(-\frac{\tilde{p}\cdot\tilde{u}}{\tilde{k}_B\tilde{T}} + \alpha\right) + 1 \right]^{-1}, \\ \tilde{f}_g^{(0)} &= \frac{g_g}{(2\pi\tilde{\hbar})^3} \left[\exp\left(-\frac{\tilde{p}\cdot\tilde{u}}{\tilde{k}_B\tilde{T}}\right) - 1 \right]^{-1}.\end{aligned}\quad (140)$$

Mai sus, $\alpha = \tilde{\mu}/\tilde{k}_B\tilde{T}$ reprezintă raportul dintre potențialul chimic $\tilde{\mu}$ și energia termică $\tilde{k}_B\tilde{T}$, în timp ce \tilde{u} reprezintă cuadriviteza în reperul Landau. Semnul lui α este pozitiv pentru leptoni (quarcuri) și negativ pentru anti-leptoni (antiquarcuri). Presupunem că potențialul chimic aferent gluonilor se anulează. Factorii de degenerare pentru gluoni și quarcuri sunt $g_g = 2 \times 8 = 16$ și $g_q = 6N_f$, unde N_f reprezintă numărul de arome (considerăm doar cazurile $N_f = 2$ și 3). Definind cuadricurentul \tilde{N}^μ și tensorul energie-impuls $\tilde{T}^{\mu\nu}$ prin:

$$\begin{aligned}\tilde{N}^\mu &= \tilde{c} \int \frac{d^3\tilde{p}}{\tilde{p}^0} \tilde{p}^\mu (\tilde{f}_q - \tilde{f}_{\bar{q}}), \\ \tilde{T}^{\mu\nu} &= \tilde{c} \int \frac{d^3\tilde{p}}{\tilde{p}^0} \tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu (\tilde{f}_q + \tilde{f}_{\bar{q}} + \tilde{f}_g),\end{aligned}\quad (141)$$

ecuațiile de conservare $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{N}^\mu = 0$ și $\tilde{\nabla}_\nu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0$ sunt garantate când \tilde{u} reprezintă viteza în reperul Landau, mai exact atunci când:

$$\tilde{T}^\mu{}_\nu \tilde{u}^\nu = -\tilde{E} \tilde{u}^\mu. \quad (142)$$

Mai mult, cantitățile $\tilde{n}^{(0)}$ și $\tilde{E}^{(0)}$ corespunzătoare echilibrului sunt egale cu \tilde{n} și $\tilde{E} = 3\tilde{P}$. Aceste egalități implică

$$\begin{aligned}\tilde{n} &= \frac{\alpha g_q}{6} \left(\frac{\tilde{k}_B\tilde{T}}{\tilde{c}\tilde{\hbar}} \right)^3 \left(1 + \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right), \\ \tilde{P} &= \frac{\tilde{n}\tilde{k}_B\tilde{T}}{\alpha(\pi^2 + \alpha^2)} \left[\frac{(7g_q + 4g_g)\pi^4}{60g_q} + \frac{\alpha^2\pi^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4} \right] \\ &= \frac{\tilde{\hbar}\tilde{c}}{6\pi^2} \left(\frac{\tilde{k}_B\tilde{T}}{\tilde{\hbar}\tilde{c}} \right)^4 \left[\frac{\pi^4}{60}(7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{4}(\alpha^4 + 2\alpha^2\pi^2) \right].\end{aligned}\quad (143)$$

¹În această secțiune, signatura metricii este $(-, +, +, +)$.

Densitatea de entropie se poate calcula folosind formulele [20, 71]:

$$\begin{aligned}\tilde{s} &= \left(\frac{\tilde{E} + \tilde{P}}{\tilde{n}\tilde{k}_B\tilde{T}} - \alpha \right) \tilde{k}_B\tilde{n} \\ &= \tilde{k}_B \left(\frac{\tilde{k}_B\tilde{T}}{\tilde{h}\tilde{c}} \right)^3 \left[\frac{\pi^2}{90}(7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{6}\alpha^2 \right].\end{aligned}\quad (144)$$

Notând cu \tilde{P}_{ref} și \tilde{T}_{ref} presiunea și temperatura de referință, densitatea de referință poate fi introdusă prin relația

$$\tilde{n}_{\text{ref}} = \frac{\tilde{P}_{\text{ref}}}{\tilde{k}_B\tilde{T}_{\text{ref}}}.\quad (145)$$

Notăm cu α_0 valoarea lui α corespunzătoare cazului când $\tilde{P} = \tilde{P}_{\text{ref}}$ și $\tilde{T} = \tilde{T}_{\text{ref}}$. E convenabilă introducerea notației:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &\equiv \frac{\pi^4}{60}(7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{4}(\alpha_0^4 + 2\alpha_0^2\pi^2) \\ &= \frac{6\pi^2\tilde{P}_{\text{ref}}}{\tilde{k}_B\tilde{T}_{\text{ref}}} \left(\frac{\tilde{h}\tilde{c}}{\tilde{k}_B\tilde{T}_{\text{ref}}} \right)^3.\end{aligned}\quad (146)$$

Cea de-a doua egalitate poate fi considerată ca o definiție a lui α_0 . Cu ajutorul definițiilor de mai sus, \tilde{n} , \tilde{P} și \tilde{s} pot fi scrise în formă adimensională după cum urmează:

$$\begin{aligned}n &= \frac{g_q}{\mathcal{A}_0}\alpha(\pi^2 + \alpha^2)T^3, \\ P &= \frac{1}{\mathcal{A}_0} \left[\frac{\pi^4}{60}(7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{4}(\alpha^4 + 2\alpha^2\pi^2) \right] T^4, \\ s &= \frac{6\pi^2}{\mathcal{A}_0} \left[\frac{\pi^2}{60}(7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{6}\alpha^2 \right] T^3.\end{aligned}\quad (147)$$

Funcțiile de distribuție pot fi adimensionalizate în raport cu $\tilde{f}_{\text{ref}} = \tilde{n}_{\text{ref}}\tilde{c}^3/(\tilde{k}_B\tilde{T}_{\text{ref}})^3$, după cum urmează:

$$\begin{aligned}f_q^{(0)} &= \frac{3g_q}{4\pi\mathcal{A}_0} \left[\exp\left(-\alpha - \frac{p \cdot u}{T}\right) + 1 \right]^{-1}, \\ f_{\bar{q}}^{(0)} &= \frac{3g_q}{4\pi\mathcal{A}_0} \left[\exp\left(\alpha - \frac{p \cdot u}{T}\right) + 1 \right]^{-1}, \\ f_g^{(0)} &= \frac{3g_g}{4\pi\mathcal{A}_0} \left[\exp\left(-\frac{p \cdot u}{T}\right) - 1 \right]^{-1}.\end{aligned}\quad (148)$$

Mai sus, impulsul a fost adimensionalizat în raport cu

$$\tilde{p}_{\text{ref}} = \frac{\tilde{k}_B\tilde{T}_{\text{ref}}}{\tilde{c}}.\quad (149)$$

Pentru sisteme care sunt aproape de echilibrul termodinamic local, procedura Chapman-

Enskog permite exprimarea curentului de difuzie J^μ prin relațiile:

$$\begin{aligned} J^\mu &= -\lambda_{\text{charge}} \Delta^{\mu\nu} \nabla_\nu \alpha \\ &= -\lambda_{\text{heat}} \Delta^{\mu\nu} \left(\nabla_\nu T - \frac{T}{4P} \nabla_\nu P \right), \end{aligned} \quad (150)$$

unde λ_{charge} e difusivitatea de sarcină iar λ_{heat} e conductivitatea termică. Contribuția anizotropă la presiune, $\Pi^{\mu\nu}$, poate fi scrisă după cum urmează:

$$\Pi^{\mu\nu} = -2\eta \nabla^{\langle\mu} u^{\nu\rangle}, \quad (151)$$

unde η e coeficientul de vâscozitate dinamică. Mai departe, prezentăm o analiză a coeficienților de transport λ_{charge} , λ_{heat} și η prin prisma procedurii Chapman-Enskog.

Utilizăm descompunerea $f = f^{(0)} + \delta f$ a funcției de distribuție, unde considerăm că δf e o perturbăție mică atunci când sistemul e aproape de echilibru. Prin varianta simplificată a procedurii Chapman-Enskog, δf poate fi obținut sub forma [20]:

$$\delta f = \frac{\tau_{\text{A-W}}}{p \cdot u} p^\mu \partial_\mu f \simeq \frac{\tau_{\text{A-W}}}{p \cdot u} p^\mu \partial_\mu f^{(0)}, \quad (152)$$

unde am presupus că produsul $\tau_{\text{A-W}} \delta f$ este neglijabil. Deoarece $\delta N^\mu = N^\mu - N_{(0)}^\mu = J^\mu$ și $\delta T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - T_{(0)}^{\mu\nu} = \Pi^{\mu\nu}$, cantitățile de neechilibru pot fi obținute folosind formulele:

$$\begin{aligned} J^\mu &= \int \frac{d^3 p}{p^0} p^\mu (\delta f_q - \delta f_{\bar{q}}) \simeq -\tau_{\text{A-W}} \left[\partial_\lambda T_{1;-}^{\mu\lambda} - (\partial_\lambda u_\kappa) T_{2;-}^{\mu\lambda\kappa} \right], \\ \Pi^{\mu\nu} &= \int \frac{d^3 p}{p^0} p^\mu p^\nu (\delta f_q + \delta f_{\bar{q}} + \delta f_g) \simeq -\tau_{\text{A-W}} \left[\partial_\lambda T_{1;+}^{\mu\nu\lambda} - (\partial_\lambda u_\kappa) T_{2;+}^{\mu\nu\lambda\kappa} \right], \end{aligned} \quad (153)$$

unde notația $T_{n;\pm}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$ se referă la următoarele integrale [72]:

$$\begin{aligned} T_{n;-}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} &= \int \frac{d^3 p}{p^0} \frac{p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_k}}{(-p \cdot u)^n} [f_q^{(0)} - f_{\bar{q}}^{(0)}], \\ T_{n;+}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} &= \int \frac{d^3 p}{p^0} \frac{p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_k}}{(-p \cdot u)^n} [f_q^{(0)} + f_{\bar{q}}^{(0)} + f_g^{(0)}]. \end{aligned} \quad (154)$$

Pentru calculul lui J^μ și $\Pi^{\mu\nu}$ sunt utile următoarele rezultate:

$$\begin{aligned} T_{1;-}^{\mu\lambda} &= \frac{n}{3} (4u^\mu u^\lambda + \eta^{\mu\lambda}), \\ T_{2;-}^{\mu\lambda\kappa} &= \frac{n}{3} [6u^\mu u^\lambda u^\kappa + (u^\mu \eta^{\lambda\kappa} + u^\lambda \eta^{\mu\kappa} + u^\kappa \eta^{\mu\lambda})], \\ T_{1;+}^{\mu\nu\lambda} &= P [6u^\mu u^\nu u^\lambda + (u^\mu \eta^{\nu\lambda} + u^\nu \eta^{\mu\lambda} + u^\lambda \eta^{\mu\nu})], \\ T_{2;+}^{\mu\nu\lambda\kappa} &= \frac{P}{5} [48u^\mu u^\nu u^\lambda u^\kappa + (\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\kappa} + \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\kappa} + \eta^{\mu\kappa} \eta^{\nu\lambda}) \\ &\quad + 6(u^\mu u^\nu \eta^{\lambda\kappa} + u^\mu u^\lambda \eta^{\nu\kappa} + u^\mu u^\kappa \eta^{\nu\lambda} \\ &\quad + u^\nu u^\lambda \eta^{\mu\kappa} + u^\nu u^\kappa \eta^{\mu\lambda} + u^\lambda u^\kappa \eta^{\mu\nu})]. \end{aligned} \quad (155)$$

După puțin calcul, se obțin următoarele rezultate:

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu} &\simeq -\tau_{\text{A-W}} \left\{ (4u^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu}) DP + (u^\mu \Delta^{\nu\lambda} \right. \\ &\quad \left. + u^\nu \Delta^{\mu\lambda}) \partial_\lambda P + \frac{4P}{5} [6\partial_\lambda (u^\mu u^\nu u^\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \partial^\nu u^\mu + \partial^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda u^\lambda] \right\}, \\ J^\mu &\simeq -\tau_{\text{A-W}} \left[\partial_\lambda (nu^\mu u^\lambda) + \frac{1}{3} \Delta^{\mu\lambda} \partial_\lambda n \right].\end{aligned}\quad (156)$$

Pentru obținerea relațiilor constitutive, se utilizează forma ecuațiilor de conservare corespunzătoare fluidului perfect pentru a obține:

$$\begin{aligned}\partial_\lambda (nu^\mu u^\lambda) &\simeq nDu^\mu, \\ Du^\mu &\simeq -\frac{1}{E+P} \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu P, \\ DP &= -\frac{1}{3} (E+P) \partial_\mu u^\mu.\end{aligned}\quad (157)$$

Rezultă [71]:

$$J^\mu = -\lambda_{\text{charge}} \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu \alpha, \quad \Pi^{\mu\nu} = -2\eta \partial^{<\mu} u^{\nu>}, \quad (158)$$

unde conductivitatea de sarcină λ_{charge} și vâscozitatea dinamică η sunt

$$\lambda_{\text{charge}} = \frac{\tau_{\text{A-W}} n}{12} \partial_\alpha \ln \left(\frac{n^4}{P^3} \right), \quad \eta = \frac{4\tau_{\text{A-W}} P}{5}. \quad (159)$$

Efectuând derivata după α , se obține:

$$\lambda_{\text{charge}} = n\tau_{\text{A-W}} \left[\frac{\pi^2 + 3\alpha^2}{3\alpha(\pi^2 + \alpha^2)} - \frac{nT}{4P} \right], \quad (160)$$

Mai departe, observând că

$$\partial_\nu \alpha = -\frac{E+P}{nT} \left(\frac{\partial_\nu T}{T} - \frac{\partial_\nu P}{E+P} \right), \quad (161)$$

se poate obține următoarea relație pentru λ_{heat} :

$$\lambda_{\text{heat}} = \lambda_{\text{charge}} \left(\frac{E+P}{nT} \right)^2 \quad (162)$$

După un mic calcul, rezultă:

$$\lambda_{\text{heat}} = \frac{4\tau_{\text{A-W}} P}{T} \left[\frac{4g_q P T^2}{3\mathcal{A}_0 n^2} (\pi^2 + 3\alpha^2) - 1 \right]. \quad (163)$$

Pentru simularea plasmei quarc-gluon, raportul dintre vâscozitatea dinamică și densi-

tatea de entropie trebuie menținut la o valoare constantă. Acest lucru se poate realiza implementând timpul de relaxare după cum urmează:

$$\tau_{A-W} = \frac{\tau_{A-W;0}}{T} \frac{\frac{\pi^2}{90}(7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{6}\alpha^2}{\frac{\pi^4}{90}(7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{4}(\alpha^4 + 2\alpha^2\pi^2)}, \quad (164)$$

unde

$$\tau_{A-W;0} = \frac{15\pi^2\tilde{\hbar}}{2\tilde{k}_B\tilde{T}_{\text{ref}}}(\eta/s). \quad (165)$$

În cazul în care sistemul quarc-antiquarc-gluon este implementat folosind statistica necuantică dată de distribuția Maxwell-Jüttner la potențial chimic finit, populațiile la echilibru se înlocuiesc cu

$$\begin{aligned} \tilde{f}_q^{(0)} &= \frac{g_q}{(2\pi\tilde{\hbar})^3} \exp\left(\alpha + \frac{\tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}}{\tilde{k}_B\tilde{T}}\right), \\ \tilde{f}_{\bar{q}}^{(0)} &= \frac{g_q}{(2\pi\tilde{\hbar})^3} \exp\left(-\alpha + \frac{\tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}}{\tilde{k}_B\tilde{T}}\right), \\ \tilde{f}_g^{(0)} &= \frac{g_g}{(2\pi\tilde{\hbar})^3} \exp\left(\frac{\tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}}{\tilde{k}_B\tilde{T}}\right), \end{aligned} \quad (166)$$

unde $\tilde{n}^{(0)}$ și $\tilde{E}^{(0)}$ corespunzătoare distribuțiilor de echilibru trebuie să fie egale cu \tilde{n} și $\tilde{E} = 3\tilde{P}$. Acest lucru e posibil atunci când sunt satisfăcute relațiile de mai jos:

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= \frac{2g_q \sinh \alpha}{\pi^2} \left(\frac{\tilde{k}_B\tilde{T}}{\tilde{\hbar}\tilde{c}}\right)^3, \\ \tilde{P} &= \frac{2g_q \cosh \alpha + g_g \tilde{n} \tilde{k}_B\tilde{T}}{2g_q \sinh \alpha} \\ &= \frac{\tilde{\hbar}\tilde{c}}{\pi^2} (2g_q \cosh \alpha + g_g) \left(\frac{\tilde{k}_B\tilde{T}}{\tilde{\hbar}\tilde{c}}\right)^4. \end{aligned} \quad (167)$$

Densitatea de entropie pentru statistica Maxwell-Jüttner este [20, 71]:

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= \left(\frac{\tilde{E} + \tilde{P}}{\tilde{n}\tilde{k}_B\tilde{T}} - \alpha\right) \tilde{k}_B\tilde{n} \\ &= \frac{\tilde{k}_B}{\pi^2} [4(2g_q \cosh \alpha + g_g) - 2g_q\alpha \sinh \alpha] \left(\frac{\tilde{k}_B\tilde{T}}{\tilde{\hbar}\tilde{c}}\right)^3. \end{aligned} \quad (168)$$

Notând cu \tilde{P}_{ref} și \tilde{T}_{ref} o presiune și o temperatură de referință, se pot introduce notația

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &\equiv 2g_q \cosh \alpha_0 + g_g \\ &= \frac{\pi^2 \tilde{P}_{\text{ref}}}{\tilde{k}_B\tilde{T}_{\text{ref}}} \left(\frac{\tilde{\hbar}\tilde{c}}{\tilde{k}_B\tilde{T}_{\text{ref}}}\right)^3, \end{aligned} \quad (169)$$

unde α_0 e valoarea lui α pentru care $\tilde{P} = \tilde{P}_{\text{ref}}$ și $\tilde{T} = \tilde{T}_{\text{ref}}$. Notând cu \tilde{n}_{ref} densitatea de referință din Eq. (145), formele adimensionale ale lui \tilde{n} , \tilde{P} și \tilde{s} pot fi exprimate după cum urmează:

$$\begin{aligned} n &= \frac{2g_q}{\mathcal{A}_0} T^3 \sinh \alpha, \\ P &= \frac{T^4}{\mathcal{A}_0} (2g_q \cosh \alpha + g_g), \\ s &= \frac{T^3}{\mathcal{A}_0} [4(2g_q \cosh \alpha + g_g) - 2g_q \alpha \sinh \alpha]. \end{aligned} \quad (170)$$

Adimensionalizând funcțiile de distribuție în raport cu $\tilde{f}_{\text{ref}} = \tilde{n}_{\text{ref}} \tilde{c}^3 / (\tilde{k}_B \tilde{T}_{\text{ref}})^3$, se obține:

$$\begin{pmatrix} f_q^{(0)} \\ f_{\bar{q}}^{(0)} \\ f_g^{(0)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\tilde{n}_{\text{ref}}} \left(\frac{\tilde{k}_B \tilde{T}_{\text{ref}}}{2\pi \tilde{\hbar} \tilde{c}} \right)^3 \begin{pmatrix} g_q e^\alpha \\ g_q e^{-\alpha} \\ g_g \end{pmatrix} e^{p \cdot u / T}. \quad (171)$$

Având în vedere că

$$\partial_\nu \alpha = -\frac{E + P}{nT} \left(\frac{\partial_\nu T}{T} - \frac{\partial_\nu P}{E + P} \right), \quad (172)$$

conductivitatea termică λ_{heat} în modelul Maxwell-Jüttner este:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{heat}} &= \lambda_{\text{charge}} \left(\frac{E + P}{nT} \right)^2 \\ &= \frac{\tau_{\text{A-W}}(E + P)}{3T \tanh \alpha} \left(\frac{E + P}{nT} - 3 \tanh \alpha \right). \end{aligned} \quad (173)$$

Importanța relativă a conductivităților de sarcină și de căldură în raport cu vâscozitatea dinamică poate fi estimată prin raporturile de mai jos:

$$\begin{aligned} \frac{T}{\eta} \lambda_{\text{charge}} &= \frac{5}{12} \frac{\cosh \alpha}{\cosh \alpha + g_g / 2g_q} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\sinh \alpha \tanh \alpha}{\cosh \alpha + g_g / 2g_q} \right), \\ \frac{T}{\eta} \lambda_{\text{heat}} &= \frac{20 \cosh \alpha}{3 \sinh^2 \alpha} \left(\cosh \alpha + \frac{g_g}{2g_q} - \frac{3 \sinh^2 \alpha}{4 \cosh \alpha} \right). \end{aligned} \quad (174)$$

Pentru valori mici ale lui α , densitatea de sarcină \tilde{n} și presiunea \tilde{P} : satisfac:

$$\tilde{n} \simeq \frac{2g_q \alpha}{\pi^2} \left(\frac{\tilde{k}_B \tilde{T}}{\tilde{\hbar} \tilde{c}} \right)^3, \quad \tilde{P} \simeq (2g_q + g_g) \frac{\tilde{\hbar} \tilde{c}}{\pi^2} \left(\frac{\tilde{k}_B \tilde{T}}{\tilde{\hbar} \tilde{c}} \right)^4. \quad (175)$$

Se observă că $n \rightarrow 0$ în absența potențialului chimic al quarcurilor (când $\alpha \rightarrow 0$). Presiunea totală în modelul bazat pe statistica Maxwell-Jüttner în limita $\alpha \rightarrow 0$ este egală cu presiunea

gazului ideal cu $2g_q + g_g$ grade de libertate. Mai mult, ec. (174) se reduce la

$$\begin{aligned}\frac{T}{\eta}\lambda_{\text{charge}} &= \frac{5}{12} \frac{1 + O(\alpha^2)}{1 + g_g/2g_q}, \\ \frac{T}{\eta}\lambda_{\text{heat}} &= \frac{20}{3\alpha^2} \left[1 + \frac{g_g}{2g_q} + O(\alpha^2) \right].\end{aligned}\quad (176)$$

În timp ce $\lambda_{\text{charge}}T/\eta$ atinge o valoare constantă când $\alpha \rightarrow 0$, raportul $\lambda_{\text{heat}}T/\eta$ diverge precum inversul pătratului lui α . Acest comportament a fost pus în evidență în [71] în cazul modelului bazat pe statisticile Fermi-Dirac și Bose-Einstein. Mai mult, este în mod surprinzător în concordanță calitativă cu comportamentul evidențiat în [73] ca și analog al legii Wiedemann-Franz, obținut în cadrul corespundenței AdS/CFT.

În limita $\alpha \rightarrow \infty$, contribuția antiquarcurilor este suprimată exponențial, iar contribuția gluonilor devine neglijabilă, după cum indică comportamentul asimptotic al lui \tilde{n} și \tilde{P} :

$$\tilde{n} = \frac{g_q}{\pi^2} \left(\frac{\tilde{k}_B \tilde{T}}{\tilde{\hbar} \tilde{c}} \right)^3 e^\alpha, \quad \tilde{P} = \tilde{n} \tilde{k}_B \tilde{T}.\quad (177)$$

Drept urmare, densitatea de sarcină crește liniar cu fugacitatea, e^α , iar ecuația de stare a gazului ideal este recuperată. Mai mult, ec. (174) se reduce la:

$$\frac{T}{\eta}\lambda_{\text{charge}} \rightarrow \frac{5}{48}, \quad \frac{T}{\eta}\lambda_{\text{heat}} \rightarrow \frac{5}{3}.\quad (178)$$

Cum de altfel a fost remarcat și în [71], conductivitatea de sarcină devine independentă de numărul de arome, în timp ce conductivitatea termică continuă să depindă de acest parametru. Obținem că atât $T\lambda_{\text{charge}}/\eta$ cât și $T\lambda_{\text{heat}}/\eta$ tind spre valori constante nenule când $\alpha \rightarrow \infty$, ceea ce contrastează cu rezultatele obținute în [71] folosind statistica cuantică, unde ambele rapoarte se anulează în această limită.

Rapoartele $\frac{T}{\eta}\lambda_{\text{charge}}$ și $\frac{T}{\eta}\lambda_{\text{heat}}$ obținute în ec. (174) sunt reprezentate în Fig. 8 folosind linii continue pentru $N_f = 2$ (2 arome) și $N_f = 3$ (3 arome). Pentru evidențierea comportamentului lui $\frac{T}{\eta}\lambda_{\text{heat}}$ atât la valori mici, cât și la valori mari ale lui α , raportul este înmulțit cu $\tanh^2 \alpha$, astfel compensând divergența din limita $\alpha \rightarrow 0$. Valorile limită pentru valori mici și mari ale lui α , obținute în ec. (176) și (178), sunt reprezentate folosind linii punctate.

Impunând o valoare constantă a raportului η/s , se poate obține următoarea expresie pentru timpul de relaxare $\tau_{\text{A-W}}$:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{A-W}} &= \frac{\tau_{\text{A-W};0}}{T} \left(1 - \frac{\alpha}{4} \frac{2g_q \sinh \alpha}{2g_q \cosh \alpha + g_g} \right), \\ \tau_{\text{A-W};0} &= \frac{5\tilde{\hbar}\tilde{c}(\eta/s)}{\tilde{k}_B \tilde{T}_{\text{ref}} \tilde{L}_{\text{ref}}}.\end{aligned}\quad (179)$$

Din formula de mai sus se vede că restricția $|\alpha| \lesssim 4.09141$ trebuie impusă pentru ca $\tau_{\text{A-W}}$ să rămână pozitiv. În restul acestei secțiuni, considerăm doar cazul când $\tilde{k}_B \tilde{T} = 600$ MeV

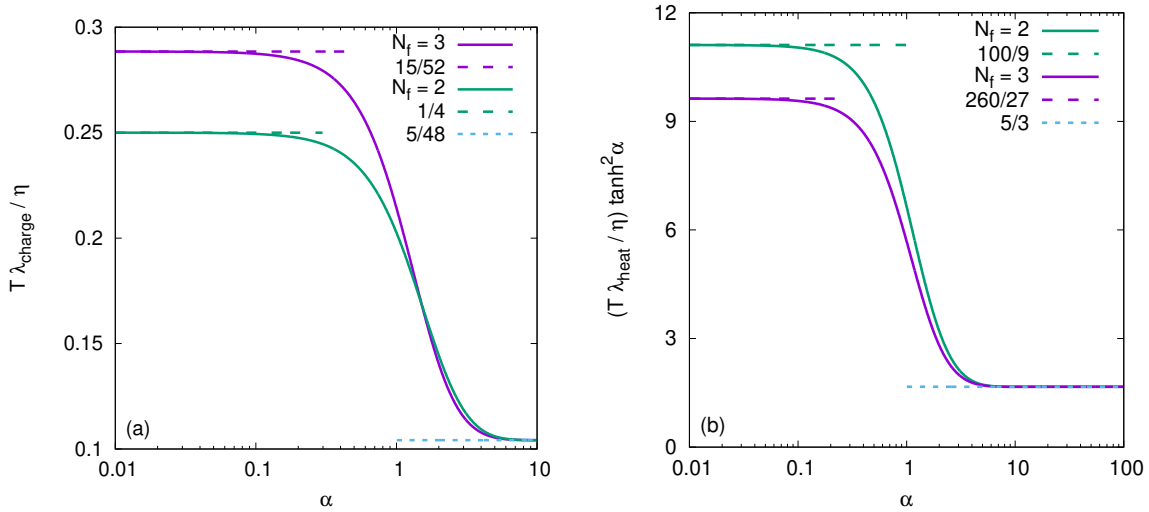


Figura 8: Frațiile (a) $T\lambda_{\text{charge}}/\eta$ și (b) $(T\lambda_{\text{heat}}/\eta)\tanh^2\alpha$ reprezentate în raport cu $\alpha = \mu/T$. Liniile continue reprezintă rezultatele analitice (174) pentru $N_f = 2$ și $N_f = 3$. Liniile punctate corespund limitelor date în ec. (176) și (178) pentru valori mici, respectiv mari ale lui α . Frația corespunzătoare lui λ_{heat} e înmulțită cu $\tanh^2\alpha$ pentru eliminarea comportamentului divergent în limita $\alpha \rightarrow 0$.

și $(\overline{\eta/s}) = 1/4\pi$, iar α variază între 0 și 4. Lungimea de referință este variată între $1 \text{ fm} \leq \tilde{L}_{\text{ref}} \leq 10 \text{ fm}$.

Modelul bazat pe statistica Maxwell-Jüttner are remarcabila proprietate că, pentru valori mici ale lui $\alpha = \mu/T$, raportul $\frac{T}{\eta}\lambda_{\text{heat}}$ diverge precum α^{-2} , astfel recuperând legea dată în ec. (5.6) a referinței [73] (obținută în cadrul corespondenței AdS/CFT), precum și în ec. (33) din referința [71]. Deoarece modelul considerat aici este bazat pe statistica Maxwell-Jüttner, comportamentul gazului ideal este atins când $\alpha \rightarrow \infty$. Aceasta implică că raportul $T\lambda_{\text{heat}}/\eta$ tinde către valoarea constantă $5/3$. Aceasta este una dintre diferențele majore ale modelului descris mai sus și cel propus în [71]. O altă limitare majoră a modelului bazat pe statistica Maxwell-Jüttner este că densitatea de entropie (170) devine negativă la valori mari ale lui α , ceea ce implică faptul că raportul η/s nu poate fi menținut constant când α depășește valoarea $\alpha_0 \simeq 4.09$, iar s se apropie de valoarea 0. În particular, rezultatele obținute cu modelul acesta nu pot fi considerate realiste când $\alpha \gtrsim 1$.

În cele ce urmează, vom discuta niște rezultate numerice obținute folosind modelul Lattice Boltzmann dezvoltat în lucrarea [74]. Pentru extragerea coeficienților de transport folosind simulări numerice, am considerat problema atenuării undelor longitudinale discutată în [19]. Mai exact, considerăm o undă armonică având vectorul de unde $k = 2\pi/L$ care se propagă de-a lungul direcției z într-un domeniu infinit având periodicitatea L . Se presupune că sistemul e omogen în raport cu direcțiile transversale x și y . Considerăm descompunerea

$$n = n_0 + \delta n, \quad P = P_0 + \delta P, \quad (180)$$

unde perturbațiile δn și δP sunt considerate mici, având același ordin de mărime ca și viteza $\beta = u/c \ll 1$.

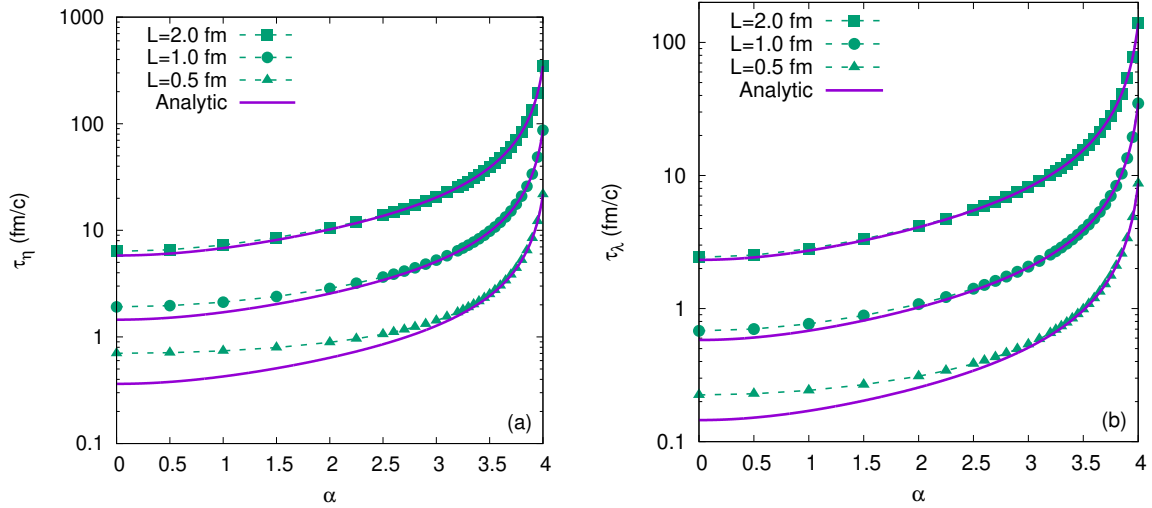


Figura 9: Timpii de atenuare a undelor longitudinale inițializate conform (a) $\delta n_0 = \delta P_0 = 0$ și $\beta_0 = 10^{-3}$; și (b) $\delta n_0/n_0 = 10^{-3}$, $\delta P_0 = 0$ și $\beta_0 = 0$, reprezentate în raport cu α .

Timpii de atenuare τ_η și τ_λ , definiți ca durată după care amplitudinea unei longitudinale scade cu factorul e (baza logaritmului natural), sunt reprezentați în Fig. 9. Se observă o divergență a acestor timpi în limita când $\alpha \rightarrow 4$, adică atunci când timpul de relaxare $\tau_{A-W} \rightarrow 0$. De asemenea, se observă că pentru valori fixate ale lui α , timpul de atenuare scade considerabil pe măsură ce lungimea de undă L scade, ceea ce indică o disipare crescută în acest regim.

7 Stări termice pe spații curbe

Ultima secțiune a acestui raport prezintă detalii referitoare la utilizarea formalismului teoriei de câmp la temperaturi finite pentru analiza stărilor termice pe spații curbe. Datorită importanței sale prin prisma corespondenței adS/CFT, rezultatele prezentate în această secțiune se concentrează pe stările termice pe spațiul anti-de Sitter (adS). În subsec. 7.1 sunt discutate proprietățile bozonilor Klein-Gordon și ale fermionilor Dirac la temperatură finită pe spațiul adS, luându-se ca reper teoria cinetică relativistă pentru particulele care urmează statistica cuantică aferentă câmpului studiat. Rezultatele acestea au fost diseminate prin lucrarea [1] și prin prezentarea de tip poster [5]. Pentru cazul sistemelor în rotație, rezultatele diseminate prin prezentarea [6] și în lucrarea [10] sunt prezentate pe scurt în subsec. 7.2.

7.1 Stări termice statice pe spațiul anti-de Sitter

Materialul din această subsecțiune rezumă pe scurt rezultatele discutate în lucrarea [1].

Spațiul anti-de Sitter reprezintă o soluție de vid a ecuațiilor Einstein corespunzătoare unei constante cosmologice negative. La fel ca și spațiul Minkowski, spațiul adS este maximal simetric, admitând 10 vectori Killing liniar independenți. Metrica pe acest spațiu poate fi

pusă sub forma:

$$ds_{\text{adS}}^2 = a^2 \sec^2 \rho [-d\tau^2 + d\rho^2 + \sin^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (181)$$

Distanța cea mai scurtă dintre două puncte cu coordonatele x și x' este dată de intervalul geodetic $s_{\text{adS}}(x, x')$, care satisface:

$$\cos\left(\frac{s_{\text{adS}}}{a}\right) = \frac{\cos \Delta\tau}{\cos \rho \cos \rho'} - \cos \gamma \tan \rho \tan \rho', \quad (182)$$

unde $\Delta\tau = \tau - \tau'$ iar γ reprezintă unghiul dintre vectorii \mathbf{x} și \mathbf{x}' :

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{\rho \rho'}. \quad (183)$$

Stările termice clasice pot fi caracterizate folosind teoria cinetică relativistă. În cazul particulelor bosonice, se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} E_{\text{adS}}^{S,\text{RKT}}(\beta) - 3P_{\text{adS}}^{S,\text{RKT}}(\beta) &= \frac{m^3 \cos \rho}{2\pi^2 \beta} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} K_1\left(\frac{mj\beta}{\cos \rho}\right), \\ P_{\text{adS}}^{S,\text{RKT}}(\beta) &= \frac{m^2 \cos^2 \rho}{2\pi^2 \beta^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} K_2\left(\frac{mj\beta}{\cos \rho}\right), \end{aligned} \quad (184)$$

în timp ce pentru particulele fermionice se obțin expresiile:

$$\begin{aligned} E_{\text{adS}}^{F,\text{RKT}}(\beta) - 3P_{\text{adS}}^{F,\text{RKT}}(\beta) &= \frac{2m^3 \cos \rho}{\pi^2 \beta} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} K_1\left(\frac{mj\beta}{\cos \rho}\right), \\ P_{\text{adS}}^{F,\text{RKT}}(\beta) &= \frac{2m^2 \cos^2 \rho}{\pi^2 \beta^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j^2} K_2\left(\frac{mj\beta}{\cos \rho}\right). \end{aligned} \quad (185)$$

În cazul particulelor fără masă, relațiile (184) și (185) se reduc la:

$$E_{\text{adS}}^{S,\text{RKT}}(\beta) \Big|_{m=0} = \frac{\pi^2 \cos^4 \rho}{30\beta^4}, \quad E_{\text{adS}}^{F,\text{RKT}}(\beta) \Big|_{m=0} = \frac{7\pi^2 \cos^4 \rho}{60\beta^4}. \quad (186)$$

Pentru studiul stărilor termice folosind teoria cuantică de câmp, se construiesc prima dată funcțiile Green ale lui Feynman pentru starea de vid, rezolvând formele neomogene ale ecuațiilor Klein-Gordon și Dirac:

$$\begin{aligned} (\square - m^2 - \xi R)G_{\text{vid}}^{\text{adS}}(x, x') &= \frac{\delta^4(x - x')}{\sqrt{-g}}, \\ (i\not{D} - m)S_{\text{vid}}^{\text{adS}}(x, x') &= \frac{\delta^4(x - x')}{\sqrt{-g}}, \end{aligned} \quad (187)$$

unde $R = -12/a^2$ este scalarul Ricci iar ξ este o constantă de cuplaj ($\xi = 0$ corespunde

cuplajului minimal iar $\xi = 1/6$ corespunde cuplajului conform).

În cazul câmpului Klein-Gordon, se obține relația [75]:

$$-iG_{\text{vid}}^{\text{adS}}(x, x') = \mathcal{C}_S \left[-\sin\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right) \right]^{-3-2\eta} \times {}_2F_1 \left[\frac{3}{2} + \eta, \frac{1}{2} + \eta; 1 + 2\eta; \text{cosec}^2\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right) \right]$$

unde constanta \mathcal{C}_S este

$$\mathcal{C}_S = -\frac{1}{8\pi a^2} \frac{\Gamma(-2\eta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \eta\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \eta\right)} \left(\frac{1}{4} - \eta^2\right) \tan(\pi\eta) \quad (188)$$

iar parametrul η depinde de masa cuantelor:

$$\eta = \sqrt{m^2 a^2 + \xi R a^2 + \frac{9}{4}}. \quad (189)$$

În cazul câmpului Dirac, se obține:

$$iS_{\text{vid}}^{\text{adS}}(x, x') = [\mathcal{A}_F(s_{\text{adS}}) + \mathcal{B}_F(s_{\text{adS}})\not{n}] \Lambda(x, x'), \quad (190)$$

unde $\not{n} = \gamma^{\hat{\alpha}} n_{\hat{\alpha}}$, iar $n_{\hat{\alpha}} = \partial_{\hat{\alpha}} s_{\text{adS}}$ reprezintă tangenta în punctul x la geodezica care leagă punctul x de x' . În mod similar, $n_{\hat{\alpha}'} = \partial_{\hat{\alpha}'} s_{\text{adS}}$ este tangenta în punctul x' la aceeași geodezică. Bispinorul transportului paralel $\Lambda(x, x')$ are expresia [76]

$$\Lambda(x, x') = \frac{\sec \frac{s_{\text{adS}}}{2a}}{\sqrt{\cos(\rho/a) \cos(\rho'/a)}} \left[\cos \frac{\Delta t}{2a} \left(\cos \frac{\rho}{2a} \cos \frac{\rho'}{2a} + \sin \frac{\rho}{2a} \sin \frac{\rho'}{2a} \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\rho \rho'} \right) + \sin \frac{\Delta t}{2a} \left(\sin \frac{\rho}{2a} \cos \frac{\rho'}{2a} \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\rho} \gamma^{\hat{0}} + \sin \frac{\rho'}{2a} \cos \frac{\rho}{2a} \frac{\mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\rho'} \gamma^{\hat{0}} \right) \right]. \quad (191)$$

Funcțiile \mathcal{A}_F și \mathcal{B}_F depind doar de s_{adS} , după cum urmează:

$$\mathcal{A}_F(s_{\text{adS}}) = \frac{\Gamma(2+ma)}{16\pi^{\frac{3}{2}} a^3 4^{ma} \Gamma\left(\frac{1}{2} + ma\right)} \cos\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right) \left[-\sin^2\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right) \right]^{-2-ma} \times {}_2F_1 \left[1+ma, 2+ma; 1+2ma; \text{cosec}^2\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right) \right], \quad (192)$$

$$\mathcal{B}_F(s_{\text{adS}}) = \frac{i\Gamma(2+ma)}{16\pi^{\frac{3}{2}} a^3 4^{ma} \Gamma\left(\frac{1}{2} + ma\right)} \sin\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right) \left[-\sin^2\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right) \right]^{-2-ma} \times {}_2F_1 \left[ma, 2+ma; 1+2ma; \text{cosec}^2\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right) \right]. \quad (193)$$

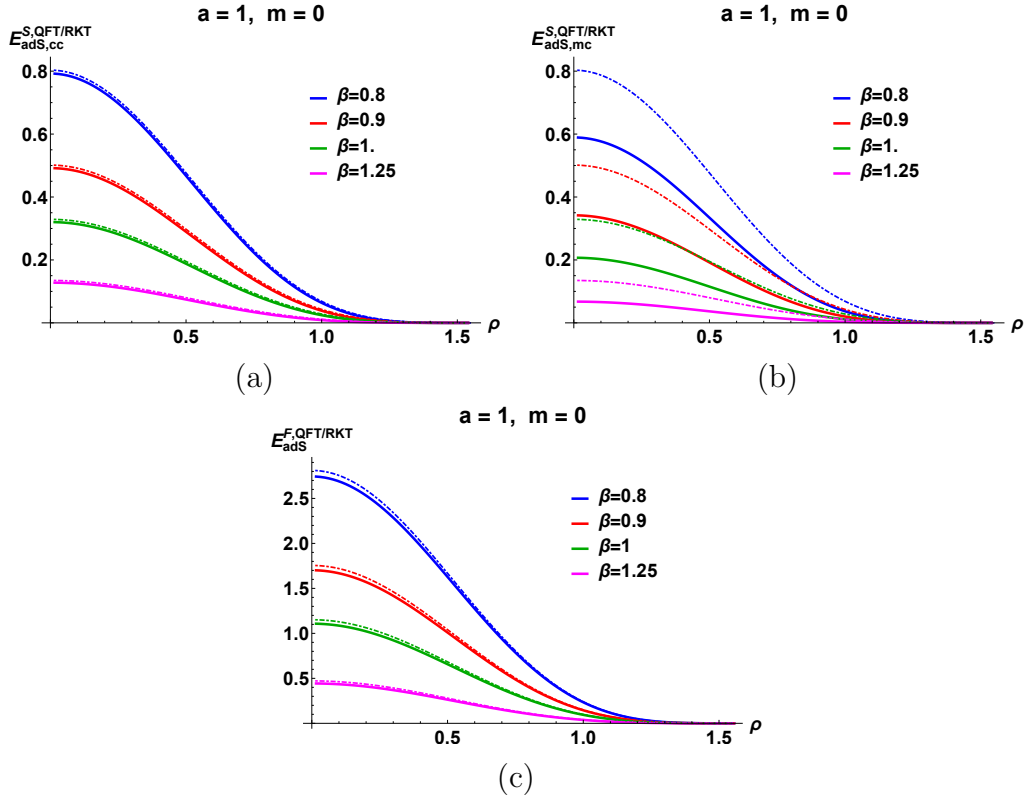


Figura 10: Densitatea de energie $E_{\text{ads}}^{S/F,QFT/RKT}$ pentru câmpul scalar cuplat conform (a) și minimal (b), respectiv pentru câmpul Dirac (c). Raza de curbură a spațiului adS este fixată la $a = 1$. Figurile prezintă patru seturi de date, corespunzând diferitelor valori ale inversului temperaturii β . Liniile continue reprezintă rezultatele (196, 197, 200), obținute folosind teoria cuantică de câmp. Liniile punctate reprezintă rezultatele (186) obținute folosind teoria cinetică relativistă.

Construcția stărilor termice se face pornind de la funcția Green a lui Feynman pentru o stare la temperatura β^{-1} :

$$G_{\beta}^{\text{adS}}(x, x') = \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_{\text{vac}}^{\text{adS}}(\tau + ij\bar{\beta}, \mathbf{x}; \tau', \mathbf{x}'), \quad (194)$$

$$S_{\beta}^{\text{adS}}(x, x') = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j S_{\text{vac}}^{\text{adS}}(\tau + ij\bar{\beta}, \mathbf{x}; \tau', \mathbf{x}'), \quad (195)$$

unde $\bar{\beta} = \beta/a$. Expresiile pentru componentele tensorului energie-impuls sunt complicate, de aceea mai jos e reprodusă doar expresia pentru densitatea de energie. În cazul câmpului Klein-Gordon fără masă cuplat minimal ($\xi = 0$), se obține:

$$E_{\text{adS,cc}}^{S,\text{QFT}}(\beta) = \frac{\cos^4 \rho}{192\pi^2 a^4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_{\text{cc}}}{[\cos(2\rho) + \cosh(j\bar{\beta})]^3 \sinh^4\left(\frac{j\bar{\beta}}{2}\right)}, \quad (196)$$

$$E_{\text{adS,mc}}^{S,\text{QFT}}(\beta) = \frac{\cos^6 \rho}{8\pi^2 a^4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_{\text{mc}}}{[\cos(2\rho) + \cosh(j\bar{\beta})]^3 \sinh^4\left(\frac{j\bar{\beta}}{2}\right)}, \quad (197)$$

unde

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{cc}} = & 3 \cos(6\rho) [2 + \cosh(j\bar{\beta})] + 18 \cos(4\rho) \cosh(j\bar{\beta}) [2 + \cosh(j\bar{\beta})] \\ & + \cos(2\rho) [44 + 51 \cosh(j\bar{\beta}) + 30 \cosh(2j\bar{\beta}) + 10 \cosh(3j\bar{\beta})] \\ & + 31 + 33 \cosh(j\bar{\beta}) + 15 \cosh(2j\bar{\beta}) + 11 \cosh(3j\bar{\beta}), \end{aligned} \quad (198)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{mc}} = & \frac{1}{2} \cos(4\rho) [1 + 2 \cosh(j\bar{\beta})] + 3 \cos(2\rho) [1 + \cosh(2j\bar{\beta})] \\ & - 2 + 5 \cosh(j\bar{\beta}) + \frac{3}{2} \cosh(2j\bar{\beta}). \end{aligned} \quad (199)$$

Pentru câmpul Dirac fără masă, se obține:

$$E_{\text{adS}}^{F,\text{QFT}}(\beta) = \frac{3 \cos^4 \rho}{4\pi^2 a^4} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{\cosh\left(\frac{j\bar{\beta}}{2}\right)}{\sinh^4\left(\frac{j\bar{\beta}}{2}\right)}. \quad (200)$$

Rezultatele obținute folosind teoria cuantică de câmp sunt reprezentate împreună cu cele obținute folosind teoria cinetică relativistă în Fig. 10. Se observă că importanța relativă a corecțiilor cuantice în cazul câmpului scalar este semnificativ mai mică când câmpul este cuplat conform ($\xi = 1/6$) decât când cuplajul este minimal ($\xi = 0$). Rezultatul pentru câmpul Dirac (pentru care cuplajul minimal este totodată și cuplaj conform) este mai degrabă asemănător cu cel obținut în cazul câmpului scalar cuplat conform decât în cazul cuplajului minimal. Rezultatele prezentate mai sus sunt discutate mai pe larg în [1].

7.2 Stări termice în rotație pe spațiul anti-de Sitter

În această subsecțiune, considerăm efectul rotației rigide cu viteză unghiulară $\Omega = \Omega \mathbf{k}$ asupra stărilor la temperatură finită β_0^{-1} . Media condensatului fermionic se poate calcula folosind formula [42]

$$\frac{1}{2} \langle [\widehat{\Psi}, \widehat{\Psi}] \rangle_{\beta_0, \Omega} = \mathcal{Z}^{-1} \text{tr}(\widehat{\rho} \widehat{\Psi} \widehat{\Psi}), \quad \widehat{\rho} = e^{-\beta_0(\widehat{H} - \Omega \widehat{M}^z)}, \quad (201)$$

unde $\widehat{H} = i\partial_t$ este Hamiltonianul sistemului, $\widehat{M}^z = -i\partial_\varphi + S^z$ și $S^z = \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2$ reprezintă proiecțiile pe axa z a operatorilor momentului cinetic total și spinului, iar $\mathcal{Z} = \text{tr}(\widehat{\rho})$ reprezintă funcția de partiție a sistemului.

Evaluarea ec. (201) poate fi făcută folosind metoda separării punctelor [56],

$$\langle \widehat{\Psi} \widehat{\Psi} \rangle_{\beta_0, \Omega} = - \lim_{x' \rightarrow x} \text{tr}[iS_{\beta_0, \Omega}^F(x, x') \Lambda(x', x)], \quad (202)$$

unde $S_{\beta_0, \Omega}^F(x, x')$ reprezintă propagatorul Feynman la temperatură finită iar $\Lambda(x, x')$ este bispinorul transportului paralel introdus în ec. (191).

Pornind de la ecuația de evoluție a lui Heisenberg pentru câmpul liber, se poate arăta că în general

$$\widehat{\rho} \widehat{\Psi}(t, \varphi) \widehat{\rho}^{-1} = e^{-\beta_0 \Omega S^z} \widehat{\Psi}(t + i\beta_0, \varphi + i\beta_0 \Omega). \quad (203)$$

La temperatură finită, propagatorul Feynman este anti-periodic în raport cu componenta imaginară a coordonatei temporale [25]. Această proprietate permite calcularea lui $S_{\beta_0, \Omega}^F(\Delta t, \Delta \varphi) \equiv S_{\beta_0, \Omega}^F(t, \varphi; t', \varphi')$ folosind formula [57]:

$$S_{\beta_0, \Omega}^F(\Delta t, \Delta \varphi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-j\beta_0 \Omega S^z} S_{\text{vac}}^F(\Delta t + ij\beta_0, \Delta \varphi + ij\beta_0 \Omega), \quad (204)$$

unde $S_{\text{vac}}^F(x, x')$ este propagatorul Feynman corespunzătoare stării de vid. Expresia de mai sus este validă numai când stările de vid obținute în limita temperaturii nule ($\beta_0 \rightarrow \infty$) și corespunzând stărilor în rotație (Ω finit) sunt identice cu vidul static ($\Omega = 0$). Această proprietate este satisfăcută pe spațiul adS când parametrul de rotație satisface $|\Omega| \leq \omega$ [58]. Pentru simplitate, discuția va fi limitată la acest caz în cele ce urmează.

Datorită simetriei maxime a spațiului adS, $S_{\text{vac}}^F(x, x')$ poate fi exprimat sub forma [59]:

$$iS_{\text{vac}}^F(x, x') = [\mathcal{A}(s) + \mathcal{B}(s)\not{n}] \Lambda(x, x'), \quad (205)$$

unde $n_\mu = \nabla_\mu s(x, x')$ reprezintă versorul tangent în punctul x la geodezica care unește punctele x și x' , în timp ce distanța geodezică (intervalul geodezic) s este dat de formula:

$$\cos \omega s = \frac{\cos \omega \Delta t}{\cos \omega r \cos \omega r'} - \cos \gamma \tan \omega r \tan \omega r'. \quad (206)$$

Mai sus, γ reprezintă unghiul dintre \mathbf{x} și \mathbf{x}' , astfel încât $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \Delta \varphi$.

În cazul particulelor fără masă, funcțiile \mathcal{A} și \mathcal{B} au următoarele expresii:

$$\mathcal{A}|_{M=0} = \frac{\omega^3}{16\pi^2} \left(\cos \frac{\omega s}{2} \right)^{-3}, \quad \mathcal{B}|_{M=0} = \frac{i\omega^3}{16\pi^2} \left(\sin \frac{\omega s}{2} \right)^{-3}. \quad (207)$$

Pornind de la ec. (202), înlocuind propagatorul la temperatură finită cu expresia din formula (204), folosind expresia din ec. (205) pentru propagatorul corespunzător vidului, precum și ec. (191) pentru bispinorul transportului paralel și ec. (207) pentru expresia explicită a funcțiilor \mathcal{A} și \mathcal{B} , se poate arăta că [58]:

$$\langle : \hat{\Psi} \hat{\Psi} : \rangle_{\beta_0, \Omega} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} (\cos \omega r)^4 \cosh \frac{\omega j \beta_0}{2} \cosh \frac{\Omega j \beta_0}{2}}{2\pi^2 [\sinh^2(\frac{\omega j \beta_0}{2}) + \cos^2 \omega r - \sin^2 \omega r \sin^2 \theta \sinh^2(\frac{\Omega j \beta_0}{2})]^2}. \quad (208)$$

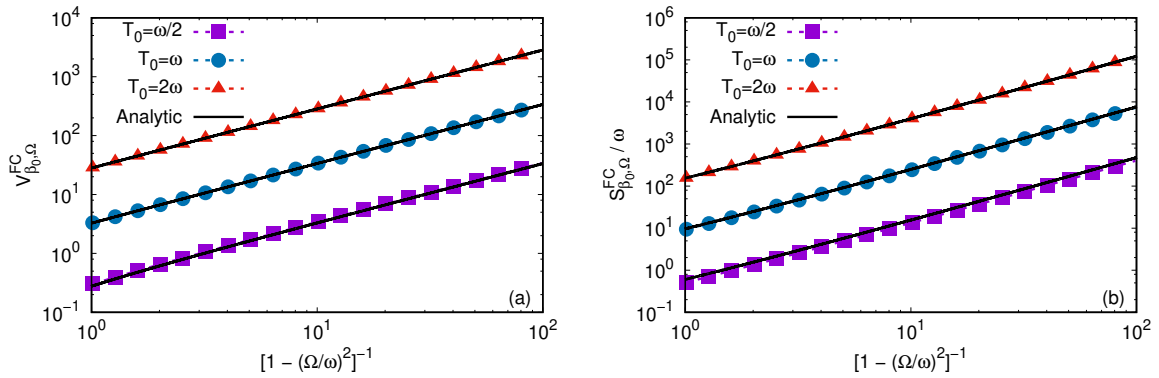


Figura 11: Dependența (a) lui $V_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}}$; și (b) a lui $S_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}}/\omega$ în raport cu $(1 - \Omega^2/\omega^2)^{-1}$, reprezentată în scară logaritmică. Linii punctate cu simboluri reprezintă rezultatele numerice obținute pornind de la ec. (208), în timp ce curbele analitice corespund ec. (209) și (210).

Condensatul fermionic conținut în întreg spațiului adS se poate obține integrând ec. (208) pe tot volumul acestuia:

$$\begin{aligned} V_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}} &= \int d^3x \sqrt{-g} \langle : \hat{\Psi} \hat{\Psi} : \rangle_{\beta_0, \Omega} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \cosh(\frac{\Omega j \beta_0}{2}) / \sinh(\frac{\omega j \beta_0}{2})}{\cosh(\omega j \beta_0) - \cosh(\Omega j \beta_0)} \\ &\simeq \frac{3\zeta(3)T_0^3}{\omega(\omega^2 - \Omega^2)} - \frac{(3\omega^2 - \Omega^2)T_0}{6\omega(\omega^2 - \Omega^2)} \ln 2 + O(T_0^{-1}). \end{aligned} \quad (209)$$

Integrând doar pe frontiera spațiului adS, se obține

$$\begin{aligned} S_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}} &= \int d\Omega \sqrt{-g} \langle : \hat{\Psi} \hat{\Psi} : \rangle_{\beta_0, \Omega} \\ &\simeq \frac{7\pi^3 T^4}{45(\omega^2 - \Omega^2)^{3/2}} \left[\frac{\omega}{\Omega} \tan^{-1} \left(\frac{\Omega/\omega}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}} \right) + \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \right] + O(T^2). \end{aligned} \quad (210)$$

Se poate observa că $V_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}}$ (209) și $S_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}}$ sunt amplificate de rotație prin factorii $(1 - \Omega^2/\omega^2)^{-1}$, respectiv $(1 - \Omega^2/\omega^2)^{-3/2}$. Fig. 11(a) și 11(b) indică dependența lui $V_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}}$ și a lui $S_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}}$ de

$(1 - \Omega^2/\omega^2)^{-1}$, pentru diferite valori ale temperaturii $T_0 = \beta_0^{-1}$. Se poate observa că rezultatele analitice (209) și (210) (reprezentate cu linii negre continue) sunt în bună concordanță cu rezultatele numerice (reprezentate cu linii punctate și simboluri), care sunt calculate pornind de la ec. (208).

Rezultatele prezentate mai sus se regăsesc în lucrarea [10].

Bibliografie

- [1] V. E. Ambruş, C. Kent, E. Winstanley, *Int J. Mod. Phys. D* **27** (2018) 1843014.
- [2] V. E. Ambruş, *Rigidly-rotating quantum thermal states in bounded systems*, [Apăsați aici pentru descărcarea prezentării].
- [3] V. E. Ambruş, *Helical massive fermions under rotation*, *J. High Energ. Phys.* **2020** (2020) 16.
- [4] V. E. Ambruş, *Rigidly-rotating quantum thermal states in bounded systems*, arXiv:1904.01123 [hep-th].
- [5] V. E. Ambruş, C. Kent, E. Winstanley, *Quantum thermal states on anti-de Sitter space*. [Apăsați aici pentru descărcarea posterului].
- [6] V. E. Ambruş, *Quantum corrections in rigidly-rotating thermal states on anti-de Sitter space*, [Apăsați aici pentru descărcarea prezentării].
- [7] V. E. Ambruş, E. Winstanley, *Exact solutions in quantum field theory under rotation*, arXiv:1908.10244 [hep-th].
- [8] V. E. Ambruş, M. Chernodub, *Helical vortical effects, helical waves, and anomalies of Dirac fermions*, arXiv: 1912.11034 [hep-th].
- [9] M. N. Chernodub, V. E. Ambruş, *Phase diagram of helically imbalanced QCD matter*. arXiv: 2005.03575 [hep-th].
- [10] V. E. Ambruş, *Fermion condensation under rotation on anti-de Sitter space*, *Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl.* **13** (2020) 199. arXiv:1912.02014 [hep-th].
- [11] V. E. Ambruş, *Quantum constitutive equations for finite temperature Dirac fermions under rotation*. [Apăsați aici pentru descărcarea posterului].
- [12] B. V. Jacak, B. Müller, *Nature* **337** (2012) 310–314.
- [13] M. Gyulassy, L. McLerran, *Nucl. Phys. A* **750** (2005) 30–63.
- [14] B. Müller, J. Schukraft, B. Wyslouch, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **62** (2012) 361–386.
- [15] STAR Collaboration, *Nature* **548** (2017) 62.
- [16] P. K. Kovtun, D. T. Son, A. O. Starinets, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 111601.
- [17] J. D. Bjorken, *Phys. Rev. D* **27** (1983) 140.
- [18] W. Florkowski, R. Ryblewski, M. Strickland, *Phys. Rev. C* **88** (2013) 024903.
- [19] V. E. Ambruş, *Phys. Rev. C* **97** (2018) 024914.

- [20] C. Cercignani, G. M. Kremer, *The relativistic Boltzmann equation: theory and applications* (Birkhäuser Verlag, 2002).
- [21] W. Florkowski, B. Friman, A. Jaiswal, E. Speranza, *Relativistic fluid dynamics with spin*, Phys. Rev. C **97** (2018) 041901.
- [22] W. Florkowski, A. Kumar, R. Ryblewski, *Thermodynamic versus kinetic approach to polarization-vorticity coupling*, Phys. Rev. C **98** (2018) 044906.
- [23] F. Becattini, W. Florkowski, E. Speranza, *Spin tensor and its role in non-equilibrium thermodynamics*, Phys. Lett. B **789** (2019) 419.
- [24] M. Buzzegoli, F. Becattini, *General thermodynamic equilibrium with axial chemical potential for the free Dirac field*, JHEP **12** (2018) 002.
- [25] M. Laine, A. Vuorinen, *Basics of thermal field theory* (Springer, Heidelberg, Germany, 2016).
- [26] S. Mallik, S. Sarkar, *Hadrons at finite temperature* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2016).
- [27] V. E. Ambruş, M. N. Chernodub, *Vortical waves in a quantum fluid with vector, axial and helical charges*, articol în lucru.
- [28] D. E. Kharzeev, J. Liao, S. A. Voloshin, G. Wang, Prog. Part. Nucl. Phys. **88** (2016) 1.
- [29] K. Landsteiner, E. Megías, F. Pena-Benitez, *Gravitational Anomaly and Transport Phenomena*, Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 021601.
- [30] V. E. Ambruş, *Lattice Boltzmann model for quantum statistics of ultrarelativistic particles*, articol în lucru.
- [31] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, *Large N field theories, string theory and gravity*, Phys. Rep. **323** (2000) 183–386.
- [32] H. Matsui, *Instability of de Sitter spacetime induced by quantum conformal anomaly*, JCAP**01**(2019) 003.
- [33] M. J. Duff, Class. Quantum Grav. **11** (1994) 1387.
- [34] V. E. Ambruş, E. Winstanley, *Rotating fermions on anti-de Sitter space-time*. Articol în lucru.
- [35] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum field theory* (Dover, 1980).
- [36] F. Becattini, E. Grossi, *Quantum corrections to the stress-energy tensor in thermodynamic equilibrium with acceleration*, Phys. Rev. D **92** (2015) 045037.

- [37] F. Becattini, L. BucciAntini, E. Grossi, L. Tinti, *Local thermodynamical equilibrium and the β -frame for a quantum relativistic fluid*, Eur. Phys. J C **75** (2015) 191.
- [38] N. Weickgenannt, X.-L. Sheng, E. Speranza, Q. Wang, D. H. Rischke, *Kinetic theory for massive spin-1/2 particles from the Wigner-function formalism*, Phys. Rev. D **100** (2020) 056018.
- [39] [73] N. Weickgenannt, E. Speranza, X.-L. Sheng, Q. Wang, D. H. Rischke, *Generating spin polarization from vorticity through nonlocal collisions*, arXiv:2005.01506 [hep-ph] (2020).
- [40] J. I. Kapusta, P. V. Landshoff, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **15** (1989) 267.
- [41] B. R. Iyer, *Dirac field theory in rotating coordinates*, Phys. Rev. D **26** (1982) 1900.
- [42] A. Vilenkin, Phys. Rev. D **21** (1980) 2260–2269.
- [43] I. Bouras, E. Molnár, H. Niemi, Z. Xu, A. El, O. Fochler, C. Greiner, D. H. Rischke, Phys. Rev. C **82** (201) 024910.
- [44] R. A. Bertlmann, *Anomalies in quantum field theory* (Clarendon Press, Oxford, U.K., 1996).
- [45] M. Buzzegoli, *Thermodynamic equilibrium of massless fermions with vorticity, chirality and magnetic field*, Ph.D. Thesis (2020).
- [46] K. Fukushima, D. E. Kharzeev, H. J. Warringa, *Chiral magnetic effect*, Phys. Rev. D **78** (2008) 074033.
- [47] V. Braguta, M. N. Chernodub, V. A. Goy, K. Landsteiner, A. V. Molochkov, M. I. Polikarpov, *Temperature dependence of the axial magnetic effect in two-color quenched QCD*, Phys. Rev. D **89** (2014) 074510.
- [48] O. Rogachevsky, A. Sorin, O. Teryaev, *Chiral vortical effect and neutron asymmetries in heavy-ion collisions*, Phys. Rev. C **82** (2010) 054910.
- [49] M. Baznat, K. Gudima, A. Sorin, O. Teryaev, *Helicity separation in heavy-ion collisions*, Phys. Rev. C **88** (2013) 061901.
- [50] M. Baznat, K. Gudima, A. Sorin, O. Teryaev, *Hyperon polarization in heavy-ion collisions and holographic gravitational anomaly*, Phys. Rev. C **97** (2018) 041902.
- [51] K. Landsteiner, E. Megías, F. Pena-Benitez, *Anomalous transport from Kubo formulae*, capitol (pag. 433) in *Lecture Notes in Physics 871: Strongly interacting matter in magnetic fields*. Editori: D. Kharzeev, K. Landsteiner, A. Schmitt, H.-U. Yee (Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2013).

- [52] A. Romeo, A. A. Saharian, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 105019.
- [53] J. Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113.
- [54] S. Chen, G. D. Doolen, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **30** (1998) 329.
- [55] I. I. Cotăescu, *Rom. J. Phys.* **52** (2007) 895–940.
- [56] P. B. Groves, P. R. Anderson, E. D. Carlson, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 124017.
- [57] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, 1982).
- [58] V. E. Ambruş, E. Winstanley, *AIP Conf. Proc.* **1634** (2014) 40–49.
- [59] W. Mück, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000) 3021–3026.
- [60] V. E. Ambruş, E. Winstanley, *Class. Quant. Grav.* **34** (2017) 145010.
- [61] X.-G. Huang, T. Koide, *Nucl. Phys. A* **889** (2012) 73.
- [62] M. Tanabashi *et al.* (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **98** (2018) 030001.
- [63] M. Gell-Mann and M. Levy, *The Axial Vector Current In Beta Decay*, *Nuovo Cim.* **16** (1960) 705.
- [64] M. Ruggieri, M. N. Chernodub, Z. Lu, *Topological susceptibility, divergent chiral density and phase diagram of chirally imbalanced QCD medium at finite temperature*, *Phys. Rev. D* **102** (2020) 014031.
- [65] O. Scavenius, A. Mocsy, I. N. Mishustin, D. H. Rischke, *Chiral phase transition within effective models with constituent quarks*, *Phys. Rev. C* **64** (2001) 045202.
- [66] A. Mocsy, I. N. Mishustin, P. J. Ellis, *Role of fluctuations in the linear sigma model with quarks*, *Phys. Rev. C* **70** (2004) 015204.
- [67] D. T. Son, P. Surówka, *Hydrodynamics with Triangle Anomalies*, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 191601.
- [68] M. A. Stephanov, Y. Yin, *Chiral kinetic theory*, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 162001.
- [69] Y. Jiang, X. G. Huang, J. Liao, *Chiral vortical wave and induced flavor charge transport in a rotating quark-gluon plasma*, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 071501.
- [70] M. N. Chernodub, *Chiral heat wave and mixing of magnetic, vortical and heat waves in chiral media*, *JHEP***01** (2016) 100.
- [71] A. Jaiswal, B. Friman, K. Redlich, *Phys. Lett. B* **751** (2015) 548.

- [72] V. E. Ambruş, AIP Conf. Proc. **1796** (2017) 020006.
- [73] D. T. Son, A. O. Starinets, J. High Energy Phys. **JHEP03** (2006) 052.
- [74] V. E. Ambruş, R. Blaga, Phys. Rev. C **98** (2018) 035201.
- [75] C. Kent, E. Winstanley, Phys. Rev. D **91** (2015) 044044.
- [76] V. E. Ambruş, E. Winstanley, Class. Quantum Gravit. **34** (2017) 145010.