

Raport științific

privind implementarea proiectului PN-III-P1-1.1-PD-2016-1423, intitulat

Corecții cuantice în sisteme mezoscopice

în perioada ianuarie 2019-decembrie 2019 (etapa 2)

Decrierea etapei 2

Etapa 2	Rezultate livrate pe etapa: - Un articol ISI; - O prezentare la o conferință internațională.	Data raportare: 06/12/2019
Obiectiv O2	Denumire Obiectiv: Corecții cuantice pe spații curbe	
Activitate A1.1	Denumire Activitate: A2.1. Analiză comparativă a TEI obținut folosind teoria cuantică de câmp și teoria cinetică a gazelor pe spațiul anti-de Sitter.	
Activitate A2.2	Denumire Activitate: A2.2. Analiză comparativă a TEI obținut folosind teoria cuantică de câmp și teoria cinetică a gazelor pe Universul Static al lui Einstein (ESU).	
Obiectiv O3	Denumire Obiectiv: Teoria cinetică pe spațiul Minkowski în prezența frontierelor (2019)	
Activitate A1.1	Denumire Activitate: A3.1. Model lattice Boltzmann pentru curgeri în interiorul unui cilindru.	

Verificarea stadiului livrabilelor

Angajat	Realizat	Grad de îndeplinire
Un articol ISI	Un articol ISI publicat [2]; Un articol ISI în curs de evaluare [1], Un articol ISI tip Proceedings Paper publicat [3], Un articol tip Proceedings Paper în curs de evaluare [4], Un capitol de carte în curs de evaluare [5].	Rezultat livrat.
O prezentare la o conferință internațională	Două prezentări la conferințe internaționale [6, 7]	Rezultat livrat.

Raport de activitate (Etapa 2)

Obiectivul O2. Corecții cuantice pe spații curbe

Pe spațiul Minkowski, sistemele cuantice la temperaturi finite prezintă corecții față de predicțiile clasice ale teoriei cinetice relativiste atunci când acestea sunt accelerate (liniar sau centrifugal) sau când sunt supuse acțiunii câmpului electromagnetic. Aceste corecții pot fi uneori corelate cu anomalii cuantice, care impun violarea în prezența interacțiunilor a unor legi de conservare stabilite la nivelul câmpului clasic, în urma procedurilor de regularizare (sau renormare). Cel mai cunoscut exemplu este cel al anomaliei axiale, care aduce legii clasice de conservare a curentului axial o corecție în prezența câmpului electromagnetic. Aceste anomalii dau naștere fenomenelor de transport anomal, care permit excitarea de către un curent (să zicem, curentul electric) a unui curent de altă natură (de exemplu, curentul axial). Exemplele includ efectele care implică fermionii chirali, având la bază curentul axial, cum ar fi: efectul magneto-chiral (generarea unui curent electric de către un exces de particule chirale în câmp magnetic extern), efectul de separare chirală (generarea curentului axial de către excesul de particule încărcate electric în câmp magnetic extern) sau efectul vortico-chiral (generarea curenților electrici sau axiali într-un mediu cu vorticitate nenulă) [8].

Pe spații curbe, se poate întâlni a treia sursă care generează anomalii, și anume gravitația. Legi care sunt valabile la nivelul câmpurilor clasice pot primi corecții cuantice datorită cuplajului dintre câmp și curbura locală a spațiu-timpului. Un exemplu bine-cunoscut este anomalia conformă, datorită căreia urma tensorului energie-impuls a unui câmp conform (fără masă) nu se mai anulează, primind corecții care depind de curbura spațiului [9].

Pentru a înțelege mai bine efectele cuplajului câmpului cuantic cu gravitația, în cadrul acestui obiectiv propunem un studiu al stărilor cuantice la temperaturi finite în contextul a două spații diferite, și anume spațiul anti-de Sitter și universul static al lui Einstein.

Activitatea A2.1. Analiză comparativă a TEI obținut folosind teoria cuantică de câmp și teoria cinetică a gazelor pe spațiul anti-de Sitter. În cadrul acestei activități, se urmărește utilizarea formalismului teoriei de câmp la temperaturi finite pentru analiza stărilor termice în rotație pe spațiul anti-de Sitter (adS). Studiul câmpurilor pe acest spațiu a devenit de interes larg datorită coniecturii corespondenței anti-de Sitter / teoria conformă de câmp (adS / CFT) [10]. Această corespondență a permis sondarea unor proprietăți ale materiei care interacționează tare, cum ar fi plasma cuarc-gluon [11].

Activitatea A2.1 are ca și scop investigarea proprietăților câmpurilor cuantice pe spațiul de Sitter la temperaturi finite prin comparație cu predicțiile clasice ale teoriei cinetice relativiste. În cazul unui sistem static, studiul câmpurilor Klein-Gordon și Dirac a fost prezentat în lucrarea [12] și diseminate prin prezentarea [6]. Pentru cazul sistemelor în rotație, rezultatele preliminare au fost diseminate prin prezentarea [7] și în lucrarea [3]. Mai multe detalii se pot găsi în secțiunea 1.

Activitatea A2.2. Analiză comparativă a TEI obținut folosind teoria cuantică de câmp și teoria cinetică a gazelor pe Universul Static al lui Einstein (ESU). Spațiu anti-de Sitter considerat la activitatea precedentă are simetrie maximală, este conform cu spațiul Minkowski și are o frontieră temporală. Prima caracteristică plasează spațiul anti-de Sitter în clasa specială a spațiilor cu simetrie maximală (din care mai fac parte universul de Sitter și spațiul Minkowski), în timp ce a doua impune ca proprietățile câmpurilor care prezintă simetrie conformă să fie identice cu cele de pe spațiul Minkowski (exceptând cele care sunt afectate de anomalii cuantice). Ultima caracteristică permite studiul stărilor în rotație rigidă fără inconvenientul apariției suprafeței luminale (în exteriorul căreia mișcarea rigidă se efectuează cu viteze supraluminice). Mai exact, forța centrifugă este atenuată de curbura spațiului atunci când viteza unghiulară Ω este suficient

de mică.

În timp ce universul static al lui Einstein nu are simetrie maximală și nu este conform cu spațiul Minkowski, acesta păstrează ultima dintre caracteristicile enumerate mai sus. Fiind un spațiu compact având frontiera la o distanță finită de punctele sale interioare, acesta permite studiul stărilor în rotație rigidă fără formarea suprafeței luminale când viteza unghiulară este suficient de mică. Studiul stărilor cuantice în rotație și la temperaturi finite pe acest spațiu permite sondarea efectului curburii asupra proprietăților câmpurilor și în absența simetriilor maximale. Totodată, este interesant studiul efectului potențialului chimic nenul, care permite introducerea unui dezechilibru net între particule și anti-particule care persistă în echilibrul termodinamic, fiind caracterizat printr-o densitate de sarcină nenulă. O analiză preliminară al efectelor cuantice care apar în prezența potențialului chimic pe spațiul Minkowski a fost diseminată prin capitolul de carte [5] și este prezentată în Sec. 2.

Obiectivul O3. Teoria cinetică pe spațiul Minkowski în prezența frontierelor (2019)

În cadrul acestui obiectiv, se urmărește dezvoltarea unei metodologii pentru studiul sistemelor mezoscopice la nivel clasic, utilizând teoria cinetică relativistă la baza căreia stă ecuația Boltzmann relativistă. Efectele cuantice, mai exact diferența dintre particulele bozonice și cele fermionice (care sunt supuse principiului de excluziune al lui Pauli), sunt încorporate în teorie la nivelul integralei de coliziune, care impune ca starea cu entropie maximă să fie descrisă de distribuțiile Bose-Einstein, respectiv Fermi-Dirac. În activitatea A3.1 propusă pentru anul acesta, se urmărește punerea bazelor unui model lattice Boltzmann pentru studiul numeric al curgerii

Activitatea A3.1. Model lattice Boltzmann pentru curgeri în interiorul unui cilindru. În cadrul experimentelor de ciocnire a ionilor

grei ultrarelativiști, o parte a energiei disponibile în centrul de masă al ciocnirii este eliberată prin formarea plasmei cuarc-gluon. Corelarea puternică între constituenții săi elementari permite studiul evoluției acesteia (cel puțin în fază intermediară, după coliziune și înaintea hadronizării cuarcilor liberi) folosind modele cinetice. O provocare în această direcție o constituie dezvoltarea uneltelor care să permită studiul numeric al caracteristicilor acestor modele într-o manieră eficientă din punctul de vedere al resurselor computaționale necesare, însă fără sacrificarea acurateții. În cazul teoriei cinetice nerelativiste, metoda lattice Boltzmann s-a dovedit a fi foarte eficientă, cu precădere pentru curgeri aproape de echilibru termodinamic [13]. În cadrul acestei activități, am considerat implementarea unui model lattice Boltzmann pentru curgerile ultrarelativiste ale particulelor bozonice și fermionice. Mai multe detalii sunt prezentate în Sec. 3.

1 Analiza corecțiilor cuantice pe spații curbe

Rezultatele prezentate în această secțiune au fost diseminate prin publicația [12]. Să considerăm parametrizarea spațiului anti-de Sitter (adS) folosind coordonatele (t, r, θ, φ) , pentru care elementul de linie este:

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \omega r} \left[-dt^2 + dr^2 + \frac{\sin^2 \omega r}{\omega^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (1)$$

Pentru evitarea buclor temporale închise, domeniul coordonatei temporale este extins de la $[0, 2\pi]$ la $t \in (-\infty, \infty)$. Această extensie corespunde spațiului de acoperire care extinde spațiul adS. Domeniul coordonatei radiale este $0 \leq \omega r < \frac{\pi}{2}$, unde parametrul ω reprezintă inversul razei de curbură a spațiului adS, fiind corelat cu scalarul Ricci prin relația

$$R = -12\omega^2. \quad (2)$$

Discuția din această secțiune este concentrată pe proprietățile câmpului Dirac. Structura spinorială a acestuia este facilitată de utilizarea tetradei în etalonarea carteziană, definită prin [14]:

$$e_{\hat{0}} = \cos \omega r \partial_t, \quad e_{\hat{i}} = \cos \omega r \left[\frac{\omega r}{\sin \omega r} \left(\delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} \right) + \frac{x^i x^j}{r^2} \right] \partial_j. \quad (3)$$

În raport cu vectorii tetradei de mai sus, se pot defini matricile gamma locale, $\gamma^\mu = e_{\hat{\alpha}}^\mu \gamma^{\hat{\alpha}}$, pornind de la cele de pe spațiul Minkowski, care satisfac următoarele relații standard de anticmutare:

$$\{\gamma^{\hat{\alpha}}, \gamma^{\hat{\gamma}}\} = -2\eta^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}. \quad (4)$$

La temperatură finită β_0^{-1} și în rotație rigidă cu viteză unghiulară $\Omega = \Omega \mathbf{k}$, media condensatului fermionic se poate calcula folosind formula [15]

$$\langle \hat{\Psi} \hat{\Psi} \rangle_{\beta_0, \Omega} = \mathcal{Z}^{-1} \text{tr}(\hat{\rho} \hat{\Psi} \hat{\Psi}), \quad \hat{\rho} = e^{-\beta_0(\hat{H} - \Omega \hat{M}^z)}, \quad (5)$$

unde $\hat{H} = i\partial_t$ este Hamiltonianul sistemului, $\hat{M}^z = -i\partial_\varphi + S^z$ și $S^z = \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2$ reprezintă proiecțiile pe axa z a operatorilor momentului cinetic total și spinului, iar $\mathcal{Z} = \text{tr}(\hat{\rho})$ reprezintă funcția de partiție a sistemului.

Evaluarea ec. (5) poate fi făcută folosind metoda separării punctelor, după cum urmează [16]

$$\langle \hat{\Psi} \hat{\Psi} \rangle_{\beta_0, \Omega} = - \lim_{x' \rightarrow x} \text{tr}[iS_{\beta_0, \Omega}^F(x, x')\Lambda(x', x)], \quad (6)$$

unde $S_{\beta_0, \Omega}^F(x, x')$ reprezintă propagatorul Feynman la temperatură finită iar $\Lambda(x, x')$ este bispinorul transportului paralel, a cărui expresie pe spațiul adS

este [21]:

$$\Lambda(x, x') = \frac{\sec(\omega s/2)}{\sqrt{\cos \omega r \cos \omega r'}} \left[\begin{aligned} & \cos \frac{\omega \Delta t}{2} \left(\cos \frac{\omega r}{2} \cos \frac{\omega r'}{2} + \sin \frac{\omega r}{2} \sin \frac{\omega r'}{2} \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\gamma}}{r r'} \right) \\ & + \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \left(\sin \frac{\omega r}{2} \cos \frac{\omega r'}{2} \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{r} \gamma^{\hat{0}} + \sin \frac{\omega r'}{2} \cos \frac{\omega r}{2} \frac{\mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\gamma}}{r'} \gamma^{\hat{0}} \right) \end{aligned} \right]. \quad (7)$$

Pornind de la ecuația de evoluție a lui Heisenberg pentru câmpul liber, se poate arăta că în general

$$\hat{\rho} \hat{\Psi}(t, \varphi) \hat{\rho}^{-1} = e^{-\beta_0 \Omega S^z} \hat{\Psi}(t + i\beta_0, \varphi + i\beta_0 \Omega). \quad (8)$$

La temperatură finită, propagatorul Feynman este anti-periodic în raport cu componenta imaginară a coordonatei temporale [17]. Această proprietate permite calcularea lui $S_{\beta_0, \Omega}^F(\Delta t, \Delta \varphi) \equiv S_{\beta_0, \Omega}^F(t, \varphi; t', \varphi')$ folosind formula [18]:

$$S_{\beta_0, \Omega}^F(\Delta t, \Delta \varphi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-j\beta_0 \Omega S^z} S_{\text{vac}}^F(\Delta t + ij\beta_0, \Delta \varphi + ij\beta_0 \Omega), \quad (9)$$

unde $S_{\text{vac}}^F(x, x')$ este propagatorul Feynman corespunzătoare stării de vid. Expresia de mai sus este validă numai când stările de vid obținute în limita temperaturii nule ($\beta_0 \rightarrow \infty$) și corespunzând stărilor în rotație (Ω finit) sunt identice cu vidul static ($\Omega = 0$). Această proprietate este satisfăcută pe spațiul adS când parametrul de rotație satisface $|\Omega| \leq \omega$ [19]. Pentru simplitate, discuția va fi limitată la acest caz în cele ce urmează.

Datorită simetriei maxime a spațiului adS, $S_{\text{vac}}^F(x, x')$ poate fi exprimat sub forma [20]:

$$iS_{\text{vac}}^F(x, x') = [\mathcal{A}(s) + \mathcal{B}(s)\not{n}] \Lambda(x, x'), \quad (10)$$

unde $n_\mu = \nabla_\mu s(x, x')$ reprezintă versorul tangent în punctul x la geodezica

care unește punctele x și x' , în timp ce distanța geodezică (intervalul geodezic) s este dat de formula:

$$\cos \omega s = \frac{\cos \omega \Delta t}{\cos \omega r \cos \omega r'} - \cos \gamma \tan \omega r \tan \omega r'. \quad (11)$$

Mai sus, γ reprezintă unghiul dintre \mathbf{x} și \mathbf{x}' , astfel încât $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \Delta \varphi$. În cazul particulelor fără masă, funcțiile \mathcal{A} și \mathcal{B} au următoarele expresii:

$$\mathcal{A}|_{M=0} = \frac{\omega^3}{16\pi^2} \left(\cos \frac{\omega s}{2} \right)^{-3}, \quad \mathcal{B}|_{M=0} = \frac{i\omega^3}{16\pi^2} \left(\sin \frac{\omega s}{2} \right)^{-3}. \quad (12)$$

Pornind de la ec. (6), înlocuind propagatorul la temperatură finită cu expresia din formula (9), folosind expresia din ec. (10) pentru propagatorul corespunzător vidului, precum și ec. (7) pentru bispinorul transportului paralel și ec. (12) pentru expresia explicită a funcțiilor \mathcal{A} și \mathcal{B} , se poate arăta că [19]:

$$\langle : \hat{\Psi} \hat{\Psi} : \rangle_{\beta_0, \Omega} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} (\cos \omega r)^4 \cosh \frac{\omega j \beta_0}{2} \cosh \frac{\Omega j \beta_0}{2}}{2\pi^2 [\sinh^2(\frac{\omega j \beta_0}{2}) + \cos^2 \omega r - \sin^2 \omega r \sin^2 \theta \sinh^2(\frac{\Omega j \beta_0}{2})]^2}. \quad (13)$$

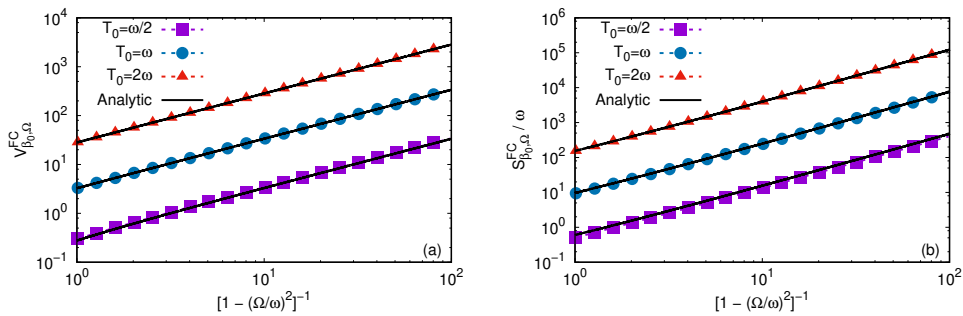


Figura 1: Dependența (a) lui $V_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}}$; și (b) a lui $S_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}}/\omega$ în raport cu $(1 - \Omega^2/\omega^2)^{-1}$, reprezentată în scară logaritmică. Liniile punctate cu simboluri reprezintă rezultatele numerice obținute pornind de la ec. (13), în timp ce curbele analitice corespund ec. (14) și (15).

Condensatul fermionic conținut în întreg spațiul adS se poate obține integrând ec. (13) pe tot volumul acestuia:

$$V_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}} = \int d^3x \sqrt{-g} \langle : \hat{\Psi} \hat{\Psi} : \rangle_{\beta_0, \Omega} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \cosh(\frac{\Omega j \beta_0}{2}) / \sinh(\frac{\omega j \beta_0}{2})}{\cosh(\omega j \beta_0) - \cosh(\Omega j \beta_0)} \\ \simeq \frac{3\zeta(3)T_0^3}{\omega(\omega^2 - \Omega^2)} - \frac{(3\omega^2 - \Omega^2)T_0}{6\omega(\omega^2 - \Omega^2)} \ln 2 + O(T_0^{-1}). \quad (14)$$

On the boundary, the following result is obtained:

$$S_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}} = \int d\Omega \sqrt{-g} \langle : \hat{\Psi} \hat{\Psi} : \rangle_{\beta_0, \Omega} \\ \simeq \frac{7\pi^3 T^4}{45(\omega^2 - \Omega^2)^{3/2}} \left[\frac{\omega}{\Omega} \tan^{-1} \left(\frac{\Omega/\omega}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}} \right) + \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \right] + O(T^2). \quad (15)$$

Se poate observa că $V_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}}$ (14) și $S_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}}$ sunt amplificate de rotație prin factorii $(1 - \Omega^2/\omega^2)^{-1}$, respectiv $(1 - \Omega^2/\omega^2)^{-3/2}$. Fig. 1(a) și 1(b) indică dependența lui $V_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}}$ și a lui $S_{\beta_0, \Omega}^{\text{FC}}$ de $(1 - \Omega^2/\omega^2)^{-1}$, pentru diferite valori ale temperaturii $T_0 = \beta_0^{-1}$. Se poate observa că rezultatele analitice (14) și (15) (reprezentate cu linii negre continue) sunt în bună concordanță cu rezultatele numerice (reprezentate cu linii punctate și simboluri), care sunt calculate porndind de la ec. (13).

Rezultatele prezentate mai sus se regădesc în lucrarea [3], care este momentan în curs de evaluare.

2 Efectul potențialului chimic asupra stărilor în rotație

Rezultatele discutate în această secțiune fac obiectul capitolului de carte [5], fiind dezvoltate suplimentar în lucrările [1] și [2].

În teoria cinetică relativistă, particulele (q) și antiparticulele (\bar{q}) de masă M sunt distribuite conform funcției Fermi-Dirac, după cum urmează:¹

$$f_{q/\bar{q}} = \frac{g_F}{(2\pi)^3} [\exp(p_\lambda \beta^\lambda \mp \mu/T) + 1]^{-1}, \quad (16)$$

unde p_λ reprezintă cuadriimpulsul particulelor, satisfăcând $p^2 = (p^t)^2 - \mathbf{p}^2 = M^2$, g_F reprezintă numărul de grade de libertate internă (pentru gradele de spin, avem $g_F = 2$), T și μ reprezintă temperatura locală și potențialul chimic local, iar $\beta^\lambda = u^\lambda/T$ reprezintă cuadvectoul de temperatură. Viteza macroscopică u^λ este cea corespunzătoare rotației rigide, având expresia:

$$u^{\hat{\alpha}} = \Gamma(1, 0, v^{\hat{\varphi}}, 0), \quad v^{\hat{\varphi}} = \rho\Omega, \quad (17)$$

unde ρ reprezintă distanța până la axa de rotație iar Ω e viteza unghiulară a rotației. Indicii cu căciulă se referă la componente în raport cu tetrada cilindrică:

$$e_{\hat{t}} = \partial_t, \quad e_{\hat{\rho}} = \partial_\rho, \quad e_{\hat{\varphi}} = \rho^{-1}\partial_\varphi, \quad e_{\hat{z}} = \partial_z. \quad (18)$$

Factorul Lorentz Γ care apare în ec. (17) este

$$\Gamma = (1 - \rho^2\Omega^2)^{-1/2}. \quad (19)$$

În condițiile de mai sus, se poate arăta că temperatura T și potențialul chimic μ sunt date de:

$$T = \Gamma T_0, \quad \mu = \Gamma \mu_0, \quad (20)$$

unde T_0 și μ_0 reprezintă valorile temperaturii și potențialului chimic pe axa de rotație.

Pornind de la funcțiile de distribuție $f_{q/\bar{q}}$ introduse în ec. (16), se pot

¹În unități Planck, $c = \hbar = k_B = 1$.

calcula curentul de sarcină $J^{\hat{\alpha}}$ și tensorul energie-impuls $T^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}$:

$$J_{\text{F}}^{\hat{\alpha}} = \int \frac{d^3p}{p^{\hat{t}}} p^{\hat{\alpha}} [f_q - f_{\bar{q}}], \quad (21)$$

$$T_{\text{F}}^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} = \int \frac{d^3p}{p^{\hat{t}}} p^{\hat{\alpha}} p^{\hat{\sigma}} [f_q + f_{\bar{q}}]. \quad (22)$$

Deoarece gazul este în echilibru termodinamic global, mărimile de mai sus au forma corespunzătoare fluidului perfect, mai exact:

$$J_{\text{F}}^{\hat{\alpha}} = Q_{\text{F}} u^{\hat{\alpha}}, \quad T_{\text{F}}^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} = (E_{\text{F}} + P_{\text{F}}) u^{\hat{\alpha}} u^{\hat{\sigma}} - P_{\text{F}} \eta^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}, \quad (23)$$

unde Q_{F} , E_{F} și P_{F} reprezintă densitatea de sarcină, densitatea de energie, respectiv presiunea. Aceste mărimi se pot calcula pornind de la ec. (22), folosind formulele:

$$\begin{aligned} Q_{\text{F}} &= \frac{g_{\text{F}}}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dp p^2 \left(\frac{1}{e^{(p^{\hat{t}}-\mu)/T} + 1} - \frac{1}{e^{(p^{\hat{t}}+\mu)/T} + 1} \right), \\ \begin{pmatrix} E_{\text{F}} \\ E_{\text{F}} - 3P_{\text{F}} \end{pmatrix} &= \frac{g_{\text{F}}}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{p^{\hat{t}}} \begin{pmatrix} (p^{\hat{t}})^2 \\ M^2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{e^{(p^{\hat{t}}-\mu)/T} + 1} + \frac{1}{e^{(p^{\hat{t}}+\mu)/T} + 1} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Pentru particulele fără masă (sau în limita ultrarelativistă când masa acestora este neglijabilă), se obțin următoarele relații:

$$Q_{\text{F}} = g_{\text{F}} \frac{\mu}{6} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right), \quad (25)$$

$$P_{\text{F}} = g_{\text{F}} \frac{7\pi^2}{360} \left(T^4 + \frac{30\mu^2 T^2}{7\pi^2} + \frac{15\mu^4}{7\pi^4} \right), \quad (26)$$

în timp ce $E_{\text{F}} = 3P_{\text{F}}$.

În cazul în care masa e nenulă, în principiu trebuie utilizat calculul numeric pentru evaluarea densității de sarcină Q_{F} integralelor care apar în ec. (24). Fig. 2 reprezintă dependența lui E_{F} de (a) coordonata radială ρ și de (b) fac-

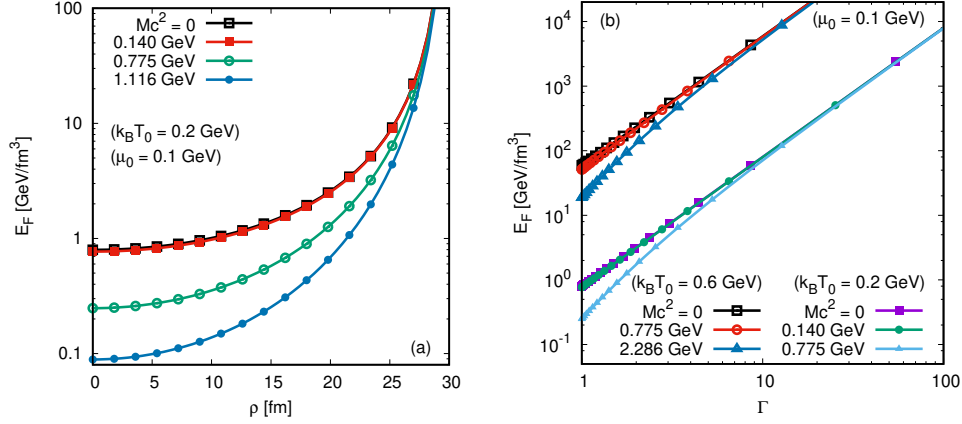


Figura 2: (a) Rezultatele numerice pentru densitatea de energie E_F (24), exprimată în GeV/fm^3 pentru $\mu_0 = 0.1 \text{ GeV}$ și $k_B T_0 = 0.2 \text{ GeV}$, pentru $Mc^2 = 0, 0.14 \text{ GeV}, 0.775 \text{ GeV}$ și 1.116 GeV . (b) Reprezentare în scară dublu logaritmică a lui E_F , la ($k_B T_0 = 0.2 \text{ GeV}$ și 0.6 GeV), pentru diferite valori ale masei. S-a considerat un număr $g_F = 6$ de grade de libertate, contabilizând contribuțiile de la trei arome de cuarci și două valori ale spinului.

torul Lorentz Γ , pentru diferite valori ale masei. Valorile numerice sunt tipice pentru condițiilor corespunzătoare plasmei cuarc-gluon formată în urma coliziunii ionilor grei [22, 23]. Masele alese corespund pionului (0.140 GeV), mezonului ρ (0.775 GeV), hyperonului Λ^0 (1.116 GeV) și hyperonului “charmed” Λ_c^+ (2.286 GeV). [24].

Tranziția de la teoria cinetică relativistă la teoria cuantică de câmp la temperaturi finite se poate face înlocuind componentele cuadrivectorul de impuls al particulelor cu operatorii cuantici corespunzători. Pentru o temperatură finită T_0 , la potențial chimic finit μ_0 și în rotație rigidă cu viteza unghiulară Ω , media unui operator cuantic \hat{A} se poate calcula folosind relația [25]:

$$\langle \hat{A} \rangle_{T_0} = Z^{-1} \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}), \quad \hat{\rho}_F = \exp \left[-(\hat{H}_F - \Omega \hat{M}_F^z - \mu_0 \hat{Q}_F) / T_0 \right], \quad (27)$$

unde $Z = \text{Tr} \hat{\rho}$ este funcția de partiție, $\hat{H} = i\partial_t$ este Hamiltonianul, \hat{Q}_F este

operatorul de sarcină, iar \widehat{M}_F^z este proiecția pe axa z a momentului cinetic total. Urma se calculează pe toate stările conținute în spațiul Fock.

Pentru reprezentarea stărilor din spațiul Fock, considerăm un sistem complet de soluții de tip particulă $U_j(x) \equiv U_{E,k,m}^\lambda(x)$ și anti-particulă $V_j(x) = i\gamma^2 U_j^*(x)$ care sunt vectori proprii atât ai operatorilor \widehat{H} și \widehat{M}^z care intervin în expresia lui $\widehat{\rho}$, cât și ai proiecției \widehat{P}^z pe axa z a operatorului de impuls și ai operatorului de elicitate $\widehat{W}_0 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}/p$:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_F U_j &= E_j U_j, & \widehat{M}_F^z U_j &= m_j U_j, \\ \widehat{P}_F^z U_j &= k_j U_j, & \widehat{W}_0 U_j &= \lambda_j U_j, \end{aligned} \quad (28)$$

Considerăm dezvoltarea operatorului de câmp $\widehat{\Psi}$ în raport acest set de moduri [26]:

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi} &= \sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{|E|>M} dE |E| \int_{-p}^p dk \Theta(\tilde{E}) \\ &\quad \times \left[\hat{b}_{E,k,m}^\lambda U_{E,k,m}^\lambda(x) + \hat{d}_{E,k,m}^{\lambda\dagger} V_{E,k,m}^\lambda(x) \right], \end{aligned} \quad (29)$$

unde \hat{b}_j reprezintă operatorul de anihilare a unei particule iar \hat{d}_j^\dagger reprezintă operatul de creare a unei anti-particule.

La nivelul operatorilor uniparticulă de creare (\hat{b}_j^\dagger și \hat{d}_j^\dagger) și anihilare (\hat{b}_j și \hat{d}_j), acțiunea operatorului statistic $\widehat{\rho}_F$ este

$$\widehat{\rho}_F \hat{b}_j^\dagger (\widehat{\rho}_F)^{-1} = e^{-(E_j - \Omega m_j - \mu_0)/T_0} \hat{b}_j^\dagger, \quad \widehat{\rho}_F \hat{d}_j^\dagger (\widehat{\rho}_F)^{-1} = e^{-(E_j - \Omega m_j + \mu_0)/T_0} \hat{d}_j^\dagger, \quad (30)$$

unde $m_j = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots$ reprezintă valoarea proprie a operatorului \widehat{M}^z . Drept urmare, mediile la temperatură finită a produselor de doi operatori uni-

particulă sunt [15, 27]:

$$\langle \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j'} \rangle_{T_0} = \frac{\delta_{j,j'}}{\exp[(\tilde{E}_j - \mu_0)/T_0] + 1}, \quad \langle \hat{d}_j^\dagger \hat{d}_{j'} \rangle_{T_0} = \frac{\delta_{j,j'}}{\exp[(\tilde{E}_j + \mu_0)/T_0] + 1}, \quad (31)$$

unde $\tilde{E}_j = E_j - \Omega m_j$ reprezintă energia măsurată în reperul aflat în rotație rigidă.

Pornind de la definiția curentului de sarcină pentru câmpul Dirac,

$$\hat{J}^{\hat{\alpha}} = \hat{\Psi} \gamma^{\hat{\alpha}} \hat{\Psi}, \quad (32)$$

se poate calcula media acestuia la temperatură finită:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \langle : \hat{J}^t : \rangle_{T_0} \\ \langle : \hat{J}^{\hat{\varphi}} : \rangle_{T_0} \end{array} \right) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_M^{\infty} dE \left[\frac{1}{e^{(|\tilde{E}| - \mu_0)/T_0} + 1} - \frac{1}{e^{(|\tilde{E}| + \mu_0)/T_0} + 1} \right] \\ &\quad \times \int_{-p}^p dk \begin{pmatrix} E J_m^+(q\rho) \\ q J_m^\times(q\rho) \end{pmatrix}, \quad (33) \end{aligned}$$

în timp ce $\hat{J}^{\hat{z}} = \hat{J}^{\hat{p}} = 0$. În limita masei nule, partea dreaptă a expresiei de mai sus poate fi calculată exact, rezultatul fiind:

$$\begin{aligned} \langle : \hat{J}^t : \rangle_{T_0} &= \Gamma \left[\frac{\mu}{3} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) + \frac{\mu \Omega^2 \Gamma^2}{4\pi^2} \left(\frac{4}{3} \Gamma^2 - \frac{1}{3} \right) \right], \\ \langle : \hat{J}^{\hat{\varphi}} : \rangle_{T_0} &= \rho \Omega \Gamma \left[\frac{\mu}{3} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) + \frac{\mu \Omega^2 \Gamma^2}{12\pi^2} (4\Gamma^2 - 3) \right]. \quad (34) \end{aligned}$$

Termenii de pe prima poziție corespund rezultatelor obținute în cadrul teoriei cinetice relativiste, în timp ce termenii de pe a doua poziție reprezintă corecții cuantice. Având în vedere că $T = T_0 \Gamma$ și $\mu = \mu_0 \Gamma$ depind liniar de factorul Lorentz Γ , se poate observa că în termenii de pe poziția a doua, puterea dominantă a lui Γ este cu două unități superioară puterii corespunzătoare termenilor de pe prima poziție. Drept urmare, în vecinătatea suprafeței luminale, când $\Gamma \rightarrow \infty$, corecțiile cuantice devin dominante.

Utilizând descompunerea:

$$\langle : \widehat{J}^{\hat{\alpha}} : \rangle_{T_0} = Q_{\beta} u^{\hat{\alpha}} + \mathcal{J}_{\beta}^{\hat{\alpha}}, \quad (35)$$

se poate obține expresia pentru densitatea de sarcină:

$$Q_{\beta} = \frac{\mu_0 \Gamma^3}{3} \left(T_0^2 + \frac{\mu_0^2}{\pi^2} \right) + \frac{\mu_0 \Omega^2}{4\pi^2} \Gamma^3 (2\Gamma^2 - 1), \quad (36)$$

precum și pentru curentul de sarcină în sistemul propriu:

$$\mathcal{J}^{\hat{\alpha}} = j_{\beta}(\rho\Omega, 0, 1, 0)^T, \quad j_{\beta} = -\rho\Omega^3 \frac{\mu\Gamma^5}{6\pi^2}. \quad (37)$$

Curentul de mai sus reprezintă un efect pur cuantic care descrie un transport al particulelor încărcate indus de rotație.

Operatorul aferent tensorului energie-impuls corespunzătoru câmpului Dirac este:

$$\widehat{T}_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left[\widehat{\Psi} \gamma_{(\mu} \partial_{\nu)} \widehat{\Psi} - \partial_{(\mu} \widehat{\Psi} \gamma_{\nu)} \widehat{\Psi} \right]. \quad (38)$$

La temperatură finită, media acestuia este:

$$\begin{aligned} \langle : \widehat{T}_{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} : \rangle_{T_0} &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_M^{\infty} dE E \int_{-p}^p dk \mathfrak{T}_{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} \operatorname{sgn}(\tilde{E}) \\ &\quad \times \left[\frac{1}{e^{(|\tilde{E}|-\mu_0)/T_0} + 1} + \frac{1}{e^{(|\tilde{E}|+\mu_0)/T_0} + 1} \right], \end{aligned} \quad (39)$$

where the tensor $\mathfrak{T}_{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}$ has the following non-vanishing components:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\hat{t}\hat{t}} &= E J_m^+(q\rho), \quad \mathfrak{T}_{\hat{t}\hat{\varphi}} = -\frac{1}{2\rho} \left[m J_m^+(q\rho) - \frac{1}{2} J_m^-(q\rho) \right] - \frac{q}{2} J_m^{\times}(q\rho), \\ \mathfrak{T}_{\hat{\rho}\hat{\rho}} &= \frac{q^2}{E} \left[J_m^+(q\rho) - \frac{m}{q\rho} J_m^{\times}(q\rho) \right], \quad \mathfrak{T}_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \frac{mq}{\rho E} J_m^{\times}(q\rho), \quad \mathfrak{T}_{\hat{z}\hat{z}} = \frac{k^2}{E} J_m^+(q\rho). \end{aligned} \quad (40)$$

În cazul masei nule, se obțin următoarele rezultate:

$$\begin{aligned}
\langle : \widehat{T}_{\hat{t}\hat{t}} : \rangle_{T_0} &= \frac{7\pi^2\Gamma^4}{60} \left(T_0^4 + \frac{30\mu_0^2 T_0^2}{7\pi^2} + \frac{15\mu_0^4}{7\pi^4} \right) \left(\frac{4}{3}\Gamma^2 - \frac{1}{3} \right) \\
&\quad + \frac{\Omega^2\Gamma^4}{8} \left(T_0^2 + \frac{3\mu_0^2}{\pi^2} \right) \left(\frac{8}{3}\Gamma^4 - \frac{16}{9}\Gamma^2 + \frac{1}{9} \right), \\
\langle : \widehat{T}_{\hat{t}\hat{\varphi}} : \rangle_{T_0} &= -\rho\Omega \left[\frac{7\pi^2\Gamma^6}{45} \left(T_0^4 + \frac{30\mu_0^2 T_0^2}{7\pi^2} + \frac{15\mu_0^4}{7\pi^4} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\Omega^2\Gamma^6}{9} \left(T_0^2 + \frac{3\mu_0^2}{\pi^2} \right) \left(\frac{3}{2}\Gamma^2 - \frac{1}{2} \right) \right], \\
\langle : \widehat{T}_{\hat{\rho}\hat{\rho}} : \rangle_{T_0} &= \frac{7\pi^2\Gamma^4}{180} \left(T_0^4 + \frac{30\mu_0^2 T_0^2}{7\pi^2} + \frac{15\mu_0^4}{7\pi^4} \right) \\
&\quad + \frac{\Omega^2\Gamma^4}{24} \left(T_0^2 + \frac{3\mu_0^2}{\pi^2} \right) \left(\frac{4}{3}\Gamma^2 - \frac{1}{3} \right), \\
\langle : \widehat{T}_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} : \rangle_{T_0} &= \frac{7\pi^2\Gamma^4}{180} \left(T_0^4 + \frac{30\mu_0^2 T_0^2}{7\pi^2} + \frac{15\mu_0^4}{7\pi^4} \right) (4\Gamma^2 - 3) \\
&\quad + \frac{\Omega^2\Gamma^4}{24} \left(T_0^2 + \frac{3\mu_0^2}{\pi^2} \right) (8\Gamma^4 - 8\Gamma^2 + 1), \tag{41}
\end{aligned}$$

în timp ce $\langle : \widehat{T}_{\hat{z}\hat{z}} : \rangle_{T_0} = \langle : \widehat{T}_{\hat{\rho}\hat{\rho}} : \rangle_{T_0}$. Ca și în cazul curentului de sarcină, termenii de pe prima poziție corespund rezultatului obținut în cadrul teoriei cinetice relativiste, în timp ce termenii de pe poziția a doua reprezintă corecții cuantice. Din nou, se poate observa că corecțiile cuantice devin dominante în vecinătatea suprafeței luminale, datorită puterii superioare a lui Γ .

Analiza termenilor care apar în ec. (41) se poate face considerând următoarea descompunere hidrodinamică a tensorului energie-impuls [29]:

$$\langle : \widehat{T}^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} : \rangle_{T_0} = E_\beta u^{\hat{\alpha}} u^{\hat{\gamma}} - (P_\beta + \bar{\omega}) \Delta^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} + \Pi^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} + u^{\hat{\alpha}} W^{\hat{\gamma}} + u^{\hat{\gamma}} W^{\hat{\alpha}}, \tag{42}$$

unde E_β și P_β reprezintă densitatea de energie și presiunea, $W^{\hat{\alpha}}$ reprezintă fluxul de căldură în sistemul propriu, $\bar{\omega}$ este presiunea dinamică iar $\Pi^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}$ este tensorul presiunii anizotrope. Tensorul $\Delta^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} = \eta^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} - u^{\hat{\alpha}} u^{\hat{\gamma}}$ reprezintă

un proiector pe hipersuprafețele ortogonale pe $u^{\hat{\alpha}}$. Considerând că mișcarea rigidă nu implică expansiune ($\nabla \cdot u = 0$), se poate presupune că presiunea dinamică se anulează ($\bar{\omega} = 0$).

Pentru particulele fără masă, densitatea de energie este

$$E_{\beta} = \frac{7\pi^2}{60} \left(T^4 + \frac{30T^2\mu^2}{7\pi^2} + \frac{15\mu^4}{7\pi^4} \right) + \frac{\Omega^2\Gamma^2}{8} \left(T^2 + \frac{3\mu^2}{\pi^2} \right) \left(\frac{4\Gamma^2}{3} - \frac{1}{3} \right), \quad (43)$$

în timp ce fluxul de căldură este:

$$W^{\hat{\alpha}} = w_{\beta}(\rho\Omega, 0, 1, 0)^T, \quad w_{\beta} = \rho\Omega \frac{\Gamma^3}{18} \left(T^2 + \frac{3\mu^2}{\pi^2} \right). \quad (44)$$

Se poate observa că, sub efectul rotației rigide, în sistemul cuantic apare un flux de căldură care este absent în teoria clasică, reprezentând un exemplu de fenomen de transport cuantic. Tensorul presiunii anizotrope este

$$\Pi^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}} = \Pi_{\beta} \begin{pmatrix} [v^{\hat{\phi}}]^2 \Gamma^2 & 0 & v^{\hat{\phi}}\Gamma^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ v^{\hat{\phi}}\Gamma^2 & 0 & \Gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (45)$$

iar $\Pi_{\beta} = 0$ în limita particulelor fără masă.

Figura 3(a) prezintă diferența relativă $E_{\beta}/E_F - 1$ ca funcție de factorul Γ , pentru diverse valori ale parametrilor inspirate din condițiile tipice pentru plasma cuarc-gluon formată în urma coliziunii ionilor grei. Diferența relativă este de sub 10^{-2} pe axa de rotație, crescând pe măsură ce punctul de observație se depărtează de aceasta.

Diferența relativă $1 - E_F/E_{\beta}$, prezentată în Fig. 3(b), e neglijabilă pe axa de rotație. În apropierea suprafeței luminale, unde corecțiile cuantice devin dominante, această diferență tinde către 1. Linia punctată gri indică poziția unde corecțiile cuantice egalează predicția clasică, mai exact unde $E_{\beta} = 2E_F$. Această poziție se deplasează către suprafața luminală pe măsură

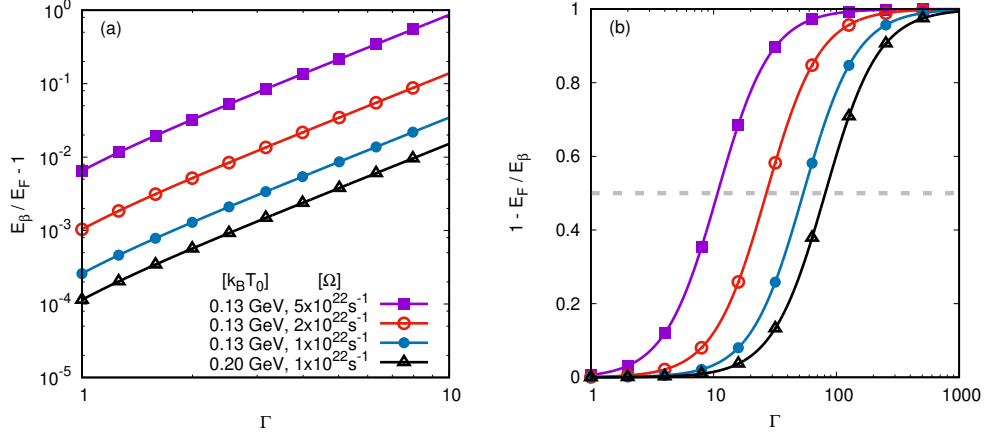


Figura 3: Diferențele relative (a) $E_\beta/E_F - 1$ și (b) $1 - E_F/E_\beta$ dintre densitatea de energie cuantică E_β (43) și cea obținută în cadrul teoriei cinetice relativiste, E_F (26), pentru particulele fără masă. Curbele corespund temperaturilor $k_B T_0 = 0.13$ GeV (pătrate colorate mov, cercuri goale roșii și cercuri colorate albastre) și 0.2 GeV (triunghiuri negre goale). Viteza unghiulară ia valorile $\Omega = 5 \times 10^{22} \text{ s}^{-1}$ (pătrate colorate mov), $2 \times 10^{22} \text{ s}^{-1}$ (cercuri goale roșii) și 10^{22} s^{-1} (cercuri albastre colorate și triunghiuri negre goale). Potențialul chimic pe axa de rotație are valoarea $\mu_0 = 0.1$ GeV.

ce temperatura crește sau viteza unghiulară scade.

Mai departe, considerăm efectul masei asupra densității de energie E_β . Fig. 4(a) arată o comparație între densitățile de energie E_β și E_F , ca funcții de distanța ρ de la axa de rotație. Pentru $\Omega = 5 \times 10^{22} \text{ s}^{-1}$, suprafața luminală este situată la distanța $\rho = c/\Omega = 6$ fm. Densitatea de energie pentru particulele de masă 0.14 GeV urmează îndeaproape rezultatul corespunzător limitei masei nule, în timp ce în cazul când $Mc^2 = 0.548$ GeV, se pot distinge diferențe față de această limită doar când $\rho \lesssim 5.5$ fm. Fig. 4(b) arată dependența densităților de energie E_β și E_F de Γ (19). Acestea încep a se distinge una de cealaltă când $\Gamma \gtrsim 10$ iar corecțiile cuantice (contribuind o divergență de ordin superior în vecinătatea suprafeței luminală) devin La valori mari ale lui Γ , atât curbele corespunzătoare teoriei cuantice cât și cele corespunzătoare teoriei clasice urmează comportamentul asimptotic

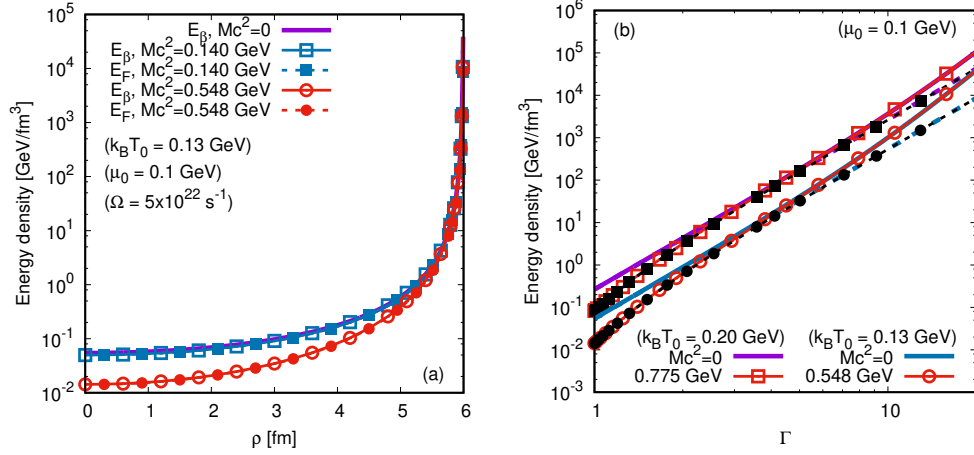


Figura 4: Dependența (a) de distanța ρ de la axa de rotație (măsurată în fm) și (b) de factorul Lorentz Γ (19), a densităților de energie E_β and E_F corespunzător sistemului cuantic (simboluri goale și linii continue) respectiv sistemului clasic (simboluri colorate și linii punctate) la $\mu_0 = 0.1$ GeV și $\Omega = 5 \times 10^{22} \text{ s}^{-1}$. În (a), temperatura pe axa de rotație e $k_B T_0 = 0.13$ GeV, în timp ce masa Mc^2 e 0 (linia continuă mov, corespunzând lui E_β), 0.140 GeV (pătrate albastre) și 0.548 GeV (cercuri roșii). În (b), $k_B T_0 = 0.20$ GeV (liniile din partea de sus a figurii) și 0.13 GeV (liniile din partea de jos). Rezultatele analitice pentru limita fără masă sunt reprezentate folosind linii continue (rezultatul cuantic) respectiv punctate (rezultatul clasic) fără simboluri (mov pentru cazul $k_B T_0 = 0.2$ GeV și albastru pentru $k_B T_0 = 0.13$ GeV).

corespunzător limitei masei nule.

3 Modele lattice Boltzmann pentru statistica cuantică a particulelor ultrarelativiste

Rezultatele preliminare prezentate în cadrul acestei secțiuni fac obiectul unui articol în lucru [28].

Un sistem compus din particule bozonice neutre (numite generic *gluoni*), distribuite conform funcției \tilde{f}_g , precum și din particule și antiparticule fermionice, numite generic *cuarci* și *anticuarci* și distribuite conform funcțiilor \tilde{f}_q și $\tilde{f}_{\bar{q}}$, poate fi modelat folosind ecuația Boltzmann relativistă:

$$\tilde{p}^\mu \tilde{\partial}_\mu \begin{pmatrix} \tilde{f}_q \\ \tilde{f}_{\bar{q}} \\ \tilde{f}_g \end{pmatrix} = \frac{\tilde{p} \cdot \tilde{u}}{\tilde{c}^2 \tilde{\tau}_{A-W}} \begin{pmatrix} \tilde{f}_q - \tilde{f}_q^{(0)} \\ \tilde{f}_{\bar{q}} - \tilde{f}_{\bar{q}}^{(0)} \\ \tilde{f}_g - \tilde{f}_g^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

unde τ_{A-W} reprezintă timpul de relaxare întrebuințat în modelul Anderson-Witting pentru integrala de coliziune. Distribuțiile la echilibru termodinamic corespunzătoare cuarcilor $\tilde{f}_q^{(0)}$ și anticuarcilor ($\tilde{f}_{\bar{q}}^{(0)}$) corespund statisticii Fermi-Dirac, în timp ce distribuția la echilibru termodinamic a gluonilor $\tilde{f}_g^{(0)}$ corespunde statisticii Bose-Einstein, după cum urmează:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_q^{(0)} &= \frac{g_q}{(2\pi\tilde{\hbar})^3} \left[\exp\left(-\frac{\tilde{p} \cdot \tilde{u}}{\tilde{k}_B \tilde{T}} - \alpha\right) + 1 \right]^{-1}, \\ \tilde{f}_{\bar{q}}^{(0)} &= \frac{g_q}{(2\pi\tilde{\hbar})^3} \left[\exp\left(-\frac{\tilde{p} \cdot \tilde{u}}{\tilde{k}_B \tilde{T}} + \alpha\right) + 1 \right]^{-1}, \\ \tilde{f}_g^{(0)} &= \frac{g_g}{(2\pi\tilde{\hbar})^3} \left[\exp\left(-\frac{\tilde{p} \cdot \tilde{u}}{\tilde{k}_B \tilde{T}}\right) - 1 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (47)$$

Mai sus, $\alpha = \tilde{\mu}/\tilde{k}_B \tilde{T}$ reprezintă raportul dintre potențialul chimic $\tilde{\mu}$ și energia termică $\tilde{k}_B \tilde{T}$, în timp ce \tilde{u} reprezintă cuadriviteza în reperul Landau. Sem-

mul lui α este pozitiv pentru leptoni (cuarci) și negativ pentru anti-leptoni (anticuarci). Presupunem că potențialul chimic aferent gluonilor se anulează. Factorii de degenerare pentru gluoni și cuarci sunt $g_g = 2 \times 8 = 16$ și $g_q = 6N_f$, unde N_f reprezintă numărul de arome (considerăm doar cazurile $N_f = 2$ și 3). Definind cuadricurentul \tilde{N}^μ și tensorul energie-impuls $\tilde{T}^{\mu\nu}$ prin:

$$\begin{aligned}\tilde{N}^\mu &= \tilde{c} \int \frac{d^3\tilde{p}}{\tilde{p}^0} \tilde{p}^\mu (\tilde{f}_q - \tilde{f}_{\bar{q}}), \\ \tilde{T}^{\mu\nu} &= \tilde{c} \int \frac{d^3\tilde{p}}{\tilde{p}^0} \tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu (\tilde{f}_q + \tilde{f}_{\bar{q}} + \tilde{f}_g),\end{aligned}\quad (48)$$

ecuațiile de conservare $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{N}^\mu = 0$ și $\tilde{\nabla}_\nu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0$ sunt garantate când \tilde{u} reprezintă viteza în reperul Landau, mai exact atunci când:

$$\tilde{T}^\mu{}_\nu \tilde{u}^\nu = -\tilde{E} \tilde{u}^\mu. \quad (49)$$

Mai mult, cantitățile $\tilde{n}^{(0)}$ și $\tilde{E}^{(0)}$ corespunzătoare echilibrului sunt egale cu \tilde{n} și $\tilde{E} = 3\tilde{P}$. Aceste egalități implică

$$\begin{aligned}\tilde{n} &= \frac{\alpha g_q}{6} \left(\frac{\tilde{k}_B \tilde{T}}{\tilde{c} \tilde{h}} \right)^3 \left(1 + \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right), \\ \tilde{P} &= \frac{\tilde{n} \tilde{k}_B \tilde{T}}{\alpha(\pi^2 + \alpha^2)} \left[\frac{(7g_q + 4g_g)\pi^4}{60g_q} + \frac{\alpha^2\pi^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4} \right] \\ &= \frac{\tilde{h} \tilde{c}}{6\pi^2} \left(\frac{\tilde{k}_B \tilde{T}}{\tilde{h} \tilde{c}} \right)^4 \left[\frac{\pi^4}{60} (7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{4} (\alpha^4 + 2\alpha^2\pi^2) \right].\end{aligned}\quad (50)$$

Densitatea de entropie se poate calcula folosind formulele [30, 31]:

$$\begin{aligned}\tilde{s} &= \left(\frac{\tilde{E} + \tilde{P}}{\tilde{n}\tilde{k}_B\tilde{T}} - \alpha \right) \tilde{k}_B\tilde{n} \\ &= \tilde{k}_B \left(\frac{\tilde{k}_B\tilde{T}}{\tilde{h}\tilde{c}} \right)^3 \left[\frac{\pi^2}{90}(7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{6}\alpha^2 \right].\end{aligned}\quad (51)$$

Notând cu \tilde{P}_{ref} și \tilde{T}_{ref} presiunea și temperatura de referință, densitatea de referință poate fi introdusă prin relația

$$\tilde{n}_{\text{ref}} = \frac{\tilde{P}_{\text{ref}}}{\tilde{k}_B\tilde{T}_{\text{ref}}}.\quad (52)$$

Notăm cu α_0 valoarea lui α corespunzătoare cazului când $\tilde{P} = \tilde{P}_{\text{ref}}$ și $\tilde{T} = \tilde{T}_{\text{ref}}$. E convenabilă introducerea notației:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &\equiv \frac{\pi^4}{60}(7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{4}(\alpha_0^4 + 2\alpha_0^2\pi^2) \\ &= \frac{6\pi^2\tilde{P}_{\text{ref}}}{\tilde{k}_B\tilde{T}_{\text{ref}}} \left(\frac{\tilde{h}\tilde{c}}{\tilde{k}_B\tilde{T}_{\text{ref}}} \right)^3.\end{aligned}\quad (53)$$

Cea de-a doua egalitate poate fi considerată ca o definiție a lui α_0 . Cu ajutorul definițiilor de mai sus, \tilde{n} , \tilde{P} și \tilde{s} pot fi scrise în formă adimensională după cum urmează:

$$\begin{aligned}n &= \frac{g_q}{\mathcal{A}_0}\alpha(\pi^2 + \alpha^2)T^3, \\ P &= \frac{1}{\mathcal{A}_0} \left[\frac{\pi^4}{60}(7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{4}(\alpha^4 + 2\alpha^2\pi^2) \right] T^4, \\ s &= \frac{6\pi^2}{\mathcal{A}_0} \left[\frac{\pi^2}{60}(7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{6}\alpha^2 \right] T^3.\end{aligned}\quad (54)$$

Funcțiile de distribuție pot fi adimensionalizate în raport cu $\tilde{f}_{\text{ref}} = \tilde{n}_{\text{ref}}\tilde{c}^3/(\tilde{k}_B\tilde{T}_{\text{ref}})^3$,

după cum urmează:

$$\begin{aligned}
f_q^{(0)} &= \frac{3g_q}{4\pi\mathcal{A}_0} \left[\exp\left(-\alpha - \frac{p \cdot u}{T}\right) + 1 \right]^{-1}, \\
f_{\bar{q}}^{(0)} &= \frac{3g_q}{4\pi\mathcal{A}_0} \left[\exp\left(\alpha - \frac{p \cdot u}{T}\right) + 1 \right]^{-1}, \\
f_g^{(0)} &= \frac{3g_g}{4\pi\mathcal{A}_0} \left[\exp\left(-\frac{p \cdot u}{T}\right) - 1 \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{55}$$

Mai sus, impulsul a fost adimensionalizat în raport cu

$$\tilde{p}_{\text{ref}} = \frac{\tilde{k}_B \tilde{T}_{\text{ref}}}{\tilde{c}}. \tag{56}$$

Pentru sisteme care sunt aproape de echilibrul termodinamic local, procedura Chapman-Enskog permite exprimarea curentului de difuzie J^μ prin relațiile:

$$\begin{aligned}
J^\mu &= -\lambda_{\text{charge}} \Delta^{\mu\nu} \nabla_\nu \alpha \\
&= -\lambda_{\text{heat}} \Delta^{\mu\nu} \left(\nabla_\nu T - \frac{T}{4P} \nabla_\nu P \right),
\end{aligned} \tag{57}$$

unde λ_{charge} e difusivitatea de sarcină iar λ_{heat} e conductivitatea termică. Tensorul presiunii izotrope $\Pi^{\mu\nu}$ poate fi scris după cum urmează:

$$\Pi^{\mu\nu} = -2\eta \nabla^{(\mu} u^{\nu)}, \tag{58}$$

unde η e coeficientul de vâscozitate dinamică. Mai departe, prezentăm o analiză a coeficienților de transport λ_{charge} , λ_{heat} și η prin prisma procedurii Chapman-Enskog.

Utilizăm descompunerea $f = f^{(0)} + \delta f$ a funcției de distribuție, unde considerăm că δf e o perturbăție mică atunci când sistemul e aproape de echilibru. Prin varianta simplificată a procedurii Chapman-Enskog, δf poate

fi obținut sub forma [30]:

$$\delta f = \frac{\tau_{A-W}}{p \cdot u} p^\mu \partial_\mu f \simeq \frac{\tau_{A-W}}{p \cdot u} p^\mu \partial_\mu f^{(0)}, \quad (59)$$

unde am presupus că produsul $\tau_{A-W} \delta f$ este neglijabil. Deoarece $\delta N^\mu = N^\mu - N_{(0)}^\mu = J^\mu$ și $\delta T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - T_{(0)}^{\mu\nu} = \Pi^{\mu\nu}$, cantitățile de neechilibru pot fi obținute folosind formulele:

$$\begin{aligned} J^\mu &= \int \frac{d^3 p}{p^0} p^\mu (\delta f_q - \delta f_{\bar{q}}) \simeq -\tau_{A-W} \left[\partial_\lambda T_{1;-}^{\mu\lambda} - (\partial_\lambda u_\kappa) T_{2;-}^{\mu\lambda\kappa} \right], \\ \Pi^{\mu\nu} &= \int \frac{d^3 p}{p^0} p^\mu p^\nu (\delta f_q + \delta f_{\bar{q}} + \delta f_g) \simeq -\tau_{A-W} \left[\partial_\lambda T_{1;+}^{\mu\nu\lambda} - (\partial_\lambda u_\kappa) T_{2;+}^{\mu\nu\lambda\kappa} \right], \end{aligned} \quad (60)$$

unde notația $T_{n;\pm}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$ se referă la următoarele integrale [32]:

$$\begin{aligned} T_{n;-}^{\alpha_1\dots\alpha_k} &= \int \frac{d^3 p}{p^0} \frac{p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_k}}{(-p \cdot u)^n} [f_q^{(0)} - f_{\bar{q}}^{(0)}], \\ T_{n;+}^{\alpha_1\dots\alpha_k} &= \int \frac{d^3 p}{p^0} \frac{p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_k}}{(-p \cdot u)^n} [f_q^{(0)} + f_{\bar{q}}^{(0)} + f_g^{(0)}]. \end{aligned} \quad (61)$$

Pentru calculul lui J^μ și $\Pi^{\mu\nu}$ sunt utile următoarele rezultate:

$$\begin{aligned} T_{1;-}^{\mu\lambda} &= \frac{n}{3} (4u^\mu u^\lambda + \eta^{\mu\lambda}), \\ T_{2;-}^{\mu\lambda\kappa} &= \frac{n}{3} [6u^\mu u^\lambda u^\kappa + (u^\mu \eta^{\lambda\kappa} + u^\lambda \eta^{\mu\kappa} + u^\kappa \eta^{\mu\lambda})], \\ T_{1;+}^{\mu\nu\lambda} &= P [6u^\mu u^\nu u^\lambda + (u^\mu \eta^{\nu\lambda} + u^\nu \eta^{\mu\lambda} + u^\lambda \eta^{\mu\nu})], \\ T_{2;+}^{\mu\nu\lambda\kappa} &= \frac{P}{5} [48u^\mu u^\nu u^\lambda u^\kappa + (\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\kappa} + \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\kappa} + \eta^{\mu\kappa} \eta^{\nu\lambda}) \\ &\quad + 6(u^\mu u^\nu \eta^{\lambda\kappa} + u^\mu u^\lambda \eta^{\nu\kappa} + u^\mu u^\kappa \eta^{\nu\lambda} \\ &\quad + u^\nu u^\lambda \eta^{\mu\kappa} + u^\nu u^\kappa \eta^{\mu\lambda} + u^\lambda u^\kappa \eta^{\mu\nu})]. \end{aligned} \quad (62)$$

După puțin calcul, se obțin următoarele rezultate:

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu} &\simeq -\tau_{\text{A-W}} \left\{ (4u^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu}) DP + (u^\mu \Delta^{\nu\lambda} \right. \\
&\quad \left. + u^\nu \Delta^{\mu\lambda}) \partial_\lambda P + \frac{4P}{5} [6\partial_\lambda (u^\mu u^\nu u^\lambda) \right. \\
&\quad \left. + \partial^\nu u^\mu + \partial^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda u^\lambda] \right\}, \\
J^\mu &\simeq -\tau_{\text{A-W}} \left[\partial_\lambda (nu^\mu u^\lambda) + \frac{1}{3} \Delta^{\mu\lambda} \partial_\lambda n \right]. \tag{63}
\end{aligned}$$

Pentru obținerea relațiilor constitutive, se utilizează forma ecuațiilor de conservare corespunzătoare fluidului perfect pentru a obține:

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda (nu^\mu u^\lambda) &\simeq nDu^\mu, \\
Du^\mu &\simeq -\frac{1}{E+P} \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu P, \\
DP &= -\frac{1}{3} (E+P) \partial_\mu u^\mu. \tag{64}
\end{aligned}$$

Rezultă [31]:

$$J^\mu = -\lambda_{\text{charge}} \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu \alpha, \quad \Pi^{\mu\nu} = -2\eta \partial^{<\mu} u^{\nu>}, \tag{65}$$

unde conductivitatea de sarcină λ_{charge} și vâscozitatea dinamică η sunt

$$\lambda_{\text{charge}} = \frac{\tau_{\text{A-W}} n}{12} \partial_\alpha \ln \left(\frac{n^4}{P^3} \right), \quad \eta = \frac{4\tau_{\text{A-W}} P}{5}. \tag{66}$$

Efectuând derivata după α , se obține:

$$\lambda_{\text{charge}} = n\tau_{\text{A-W}} \left[\frac{\pi^2 + 3\alpha^2}{3\alpha(\pi^2 + \alpha^2)} - \frac{nT}{4P} \right], \tag{67}$$

Mai departe, observând că

$$\partial_\nu \alpha = -\frac{E+P}{nT} \left(\frac{\partial_\nu T}{T} - \frac{\partial_\nu P}{E+P} \right), \quad (68)$$

se poate obține următoarea relație pentru λ_{heat} :

$$\lambda_{\text{heat}} = \lambda_{\text{charge}} \left(\frac{E+P}{nT} \right)^2 \quad (69)$$

După un mic calcul, rezultă:

$$\lambda_{\text{heat}} = \frac{4\tau_{\text{A-W}}P}{T} \left[\frac{4g_q P T^2}{3\mathcal{A}_0 n^2} (\pi^2 + 3\alpha^2) - 1 \right]. \quad (70)$$

Pentru simularea plasmei cuarc-gluon, raportul dintre vâscozitatea dinamică și densitatea de entropie trebuie menținut la o valoare constantă. Acest lucru se poate realiza implementând timpul de relaxare după cum urmează:

$$\tau_{\text{A-W}} = \frac{\tau_{\text{A-W};0}}{T} \frac{\frac{\pi^2}{90}(7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{6}\alpha^2}{\frac{\pi^4}{90}(7g_q + 4g_g) + \frac{g_q}{4}(\alpha^4 + 2\alpha^2\pi^2)}, \quad (71)$$

unde

$$\tau_{\text{A-W};0} = \frac{15\pi^2 \tilde{h}}{2\tilde{k}_B \tilde{T}_{\text{ref}}} (\overline{\eta/s}). \quad (72)$$

În cazul în care sistemul cuarc-anticuarc-gluon este implementat folosind statistica necuantică dată de distribuția Maxwell-Jüttner la potențial chimic

finit, populațiile la echilibru se înlocuiesc cu

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_q^{(0)} &= \frac{g_q}{(2\pi\tilde{\hbar})^3} \exp\left(\alpha + \frac{\tilde{p} \cdot \tilde{u}}{\tilde{k}_B\tilde{T}}\right), \\
\tilde{f}_{\bar{q}}^{(0)} &= \frac{g_{\bar{q}}}{(2\pi\tilde{\hbar})^3} \exp\left(-\alpha + \frac{\tilde{p} \cdot \tilde{u}}{\tilde{k}_B\tilde{T}}\right), \\
\tilde{f}_g^{(0)} &= \frac{g_g}{(2\pi\tilde{\hbar})^3} \exp\left(\frac{\tilde{p} \cdot \tilde{u}}{\tilde{k}_B\tilde{T}}\right),
\end{aligned} \tag{73}$$

unde $\tilde{n}^{(0)}$ și $\tilde{E}^{(0)}$ corespunzătoare distribuțiilor de echilibru trebuie să fie egale cu \tilde{n} și $\tilde{E} = 3\tilde{P}$. Acest lucru e posibil atunci când sunt satisfăcute relațiile de mai jos:

$$\begin{aligned}
\tilde{n} &= \frac{2g_q \sinh \alpha}{\pi^2} \left(\frac{\tilde{k}_B\tilde{T}}{\tilde{\hbar}\tilde{c}}\right)^3, \\
\tilde{P} &= \frac{2g_q \cosh \alpha + g_g \tilde{n} \tilde{k}_B\tilde{T}}{2g_q \sinh \alpha} \\
&= \frac{\tilde{\hbar}\tilde{c}}{\pi^2} (2g_q \cosh \alpha + g_g) \left(\frac{\tilde{k}_B\tilde{T}}{\tilde{\hbar}\tilde{c}}\right)^4.
\end{aligned} \tag{74}$$

Densitatea de entropie pentru statistica Maxwell-Jüttner este [30, 31]:

$$\begin{aligned}
\tilde{s} &= \left(\frac{\tilde{E} + \tilde{P}}{\tilde{n}\tilde{k}_B\tilde{T}} - \alpha\right) \tilde{k}_B\tilde{n} \\
&= \frac{\tilde{k}_B}{\pi^2} [4(2g_q \cosh \alpha + g_g) - 2g_q\alpha \sinh \alpha] \left(\frac{\tilde{k}_B\tilde{T}}{\tilde{\hbar}\tilde{c}}\right)^3.
\end{aligned} \tag{75}$$

Notând cu \tilde{P}_{ref} și \tilde{T}_{ref} o presiune și o temperatură de referință, se pot

introduce notația

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &\equiv 2g_q \cosh \alpha + g_g \\ &= \frac{\pi^2 \tilde{P}_{\text{ref}}}{\tilde{k}_B \tilde{T}_{\text{ref}}} \left(\frac{\tilde{\hbar} \tilde{c}}{\tilde{k}_B \tilde{T}_{\text{ref}}} \right)^3,\end{aligned}\quad (76)$$

unde α_0 e valoarea lui α pentru care $\tilde{P} = \tilde{P}_{\text{ref}}$ și $\tilde{T} = \tilde{T}_{\text{ref}}$. Notând cu \tilde{n}_{ref} densitatea de referință din Eq. (52), formele adimensionale ale lui \tilde{n} , \tilde{P} și \tilde{s} pot fi exprimate după cum urmează:

$$\begin{aligned}n &= \frac{2g_q}{\mathcal{A}_0} T^3 \sinh \alpha, \\ P &= \frac{T^4}{\mathcal{A}_0} (2g_q \cosh \alpha + g_g), \\ s &= \frac{T^3}{\mathcal{A}_0} [4(2g_q \cosh \alpha + g_g) - 2g_q \alpha \sinh \alpha].\end{aligned}\quad (77)$$

Adimensionalizând funcțiile de distribuție în raport cu $\tilde{f}_{\text{ref}} = \tilde{n}_{\text{ref}} \tilde{c}^3 / (\tilde{k}_B \tilde{T}_{\text{ref}})^3$, se obține:

$$\begin{pmatrix} f_q^{(0)} \\ f_{\tilde{q}}^{(0)} \\ f_g^{(0)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\tilde{n}_{\text{ref}}} \left(\frac{\tilde{k}_B \tilde{T}_{\text{ref}}}{2\pi \tilde{\hbar} \tilde{c}} \right)^3 \begin{pmatrix} g_q e^\alpha \\ g_q e^{-\alpha} \\ g_g \end{pmatrix} e^{p \cdot u / T}.\quad (78)$$

Având în vedere că

$$\partial_\nu \alpha = -\frac{E + P}{nT} \left(\frac{\partial_\nu T}{T} - \frac{\partial_\nu P}{E + P} \right),\quad (79)$$

conductivitatea termică λ_{heat} în modelul Maxwell-Jüttner este:

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{heat}} &= \lambda_{\text{charge}} \left(\frac{E + P}{nT} \right)^2 \\ &= \frac{\tau_{\text{A-W}}(E + P)}{3T \tanh \alpha} \left(\frac{E + P}{nT} - 3 \tanh \alpha \right).\end{aligned}\quad (80)$$

Importanța relativă a conductivităților de sarcină și de căldură în raport cu vâscozitatea dinamică poate fi estimată prin raporturile de mai jos:

$$\begin{aligned}\frac{T}{\eta}\lambda_{\text{charge}} &= \frac{5}{12} \frac{\cosh \alpha}{\cosh \alpha + g_g/2g_q} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\sinh \alpha \tanh \alpha}{\cosh \alpha + g_g/2g_q} \right), \\ \frac{T}{\eta}\lambda_{\text{heat}} &= \frac{20}{3} \frac{\cosh \alpha}{\sinh^2 \alpha} \left(\cosh \alpha + \frac{g_g}{2g_q} - \frac{3 \sinh^2 \alpha}{4 \cosh \alpha} \right).\end{aligned}\quad (81)$$

Pentru valori mici ale lui α , densitatea de sarcină \tilde{n} și presiunea \tilde{P} : satisfac:

$$\tilde{n} \simeq \frac{2g_q\alpha}{\pi^2} \left(\frac{\tilde{k}_B\tilde{T}}{\tilde{\hbar}c} \right)^3, \quad \tilde{P} \simeq (2g_q + g_g) \frac{\tilde{\hbar}c}{\pi^2} \left(\frac{\tilde{k}_B\tilde{T}}{\tilde{\hbar}c} \right)^4. \quad (82)$$

Se observă că $n \rightarrow 0$ în absența potențialului chimic al cuarcilor (când $\alpha \rightarrow 0$). Presiunea totală în modelul bazat pe statistica Maxwell-Jüttner în limita $\alpha \rightarrow 0$ este egală cu presiunea gazului ideal cu $2g_q + g_g$ grade de libertate. Mai mult, ec. (81) se reduce la

$$\begin{aligned}\frac{T}{\eta}\lambda_{\text{charge}} &= \frac{5}{12} \frac{1 + O(\alpha^2)}{1 + g_g/2g_q}, \\ \frac{T}{\eta}\lambda_{\text{heat}} &= \frac{20}{3\alpha^2} \left[1 + \frac{g_g}{2g_q} + O(\alpha^2) \right].\end{aligned}\quad (83)$$

În timp ce $\lambda_{\text{charge}}T/\eta$ atinge o valoare constantă când $\alpha \rightarrow 0$, raportul $\lambda_{\text{heat}}T/\eta$ diverge precum inversul pătratului lui α . Acest comportament a fost pus în evidență în [31] în cazul modelului bazat pe statisticile Fermi-Dirac și Bose-Einstein. Mai mult, este în mod surprinzător în concordanță calitativă cu comportamentul evidențiat în [33] ca și analog al legii Wiedemann-Franz, obținut în cadrul corespundenței AdS/CFT.

În limita $\alpha \rightarrow \infty$, contribuția anticuarcilor este suprimată exponențial, iar contribuția gluonilor devine neglijabilă, după cum indică comportamentul

asimptotic al lui \tilde{n} și \tilde{P} :

$$\tilde{n} = \frac{g_q}{\pi^2} \left(\frac{\tilde{k}_B \tilde{T}}{\tilde{\hbar} \tilde{c}} \right)^3 e^\alpha, \quad \tilde{P} = \tilde{n} \tilde{k}_B \tilde{T}. \quad (84)$$

Drept urmare, densitatea de sarcină crește liniar cu fugacitatea, e^α , iar ecuația de stare a gazului ideal este recuperată. Mai mult, ec. (81) se reduce la:

$$\frac{T}{\eta} \lambda_{\text{charge}} \rightarrow \frac{5}{48}, \quad \frac{T}{\eta} \lambda_{\text{heat}} \rightarrow \frac{5}{3}. \quad (85)$$

Cum de altfel a fost remarcat și în [31], conductivitatea de sarcină devine independentă de numărul de arome, în timp ce conductivitatea termică continuă să depindă de acest parametru. Obținem că atât $T\lambda_{\text{charge}}/\eta$ cât și $T\lambda_{\text{heat}}/\eta$ tind spre valori constante nenule când $\alpha \rightarrow \infty$, ceea ce contrastează cu rezultatele obținute în [31] folosind statistica cuantică, unde ambele rapoarte se anulează în această limită.

Rapoartele $\frac{T}{\eta} \lambda_{\text{charge}}$ și $\frac{T}{\eta} \lambda_{\text{heat}}$ obținute în ec. (81) sunt reprezentate în Fig. 5 folosind linii continue pentru $N_f = 2$ (2 arome) și $N_f = 3$ (3 arome). Pentru evidențierea comportamentului lui $\frac{T}{\eta} \lambda_{\text{heat}}$ atât la valori mici, cât și la valori mari ale lui α , raportul este înmulțit cu $\tanh^2 \alpha$, astfel compensând divergența din limita $\alpha \rightarrow 0$. Valorile limită pentru valori mici și mari ale lui α , obținute în ec. (83) și (85), sunt reprezentate folosind linii punctate.

Impunând o valoare constantă a raportului η/s , se poate obține următoarea expresie pentru timpul de relaxare $\tau_{\text{A-W}}$:

$$\tau_{\text{A-W}} = \frac{\tau_{\text{A-W};0}}{T} \left(1 - \frac{\alpha}{4} \frac{2g_q \sinh \alpha}{2g_q \cosh \alpha + g_g} \right),$$

$$\tau_{\text{A-W};0} = \frac{5\tilde{\hbar}\tilde{c}(\eta/s)}{\tilde{k}_B \tilde{T}_{\text{ref}} \tilde{L}_{\text{ref}}}. \quad (86)$$

Din formula de mai sus se vede că restricția $|\alpha| \lesssim 4.09141$ trebuie impusă pentru ca $\tau_{\text{A-W}}$ să rămână pozitiv. În restul acestei secțiuni, considerăm doar

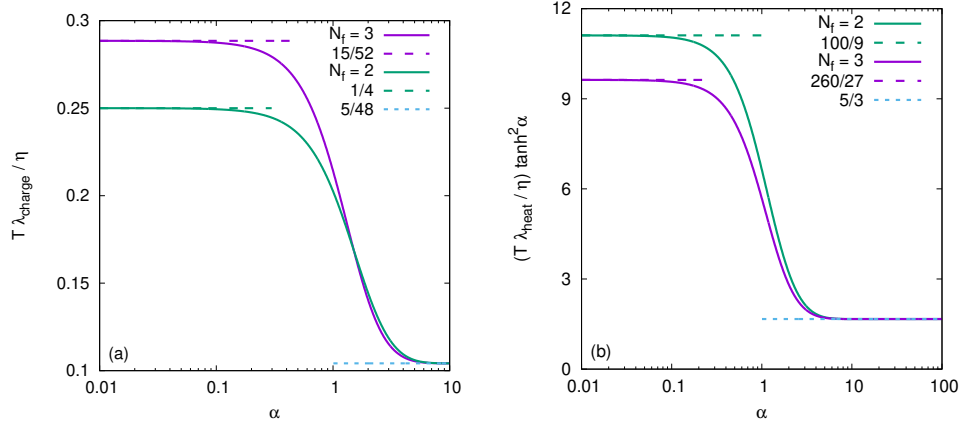


Figura 5: Fracțiile (a) $T\lambda_{\text{charge}}/\eta$ și (b) $(T\lambda_{\text{heat}}/\eta)\tanh^2\alpha$ reprezentate în raport cu $\alpha = \mu/T$. Liniile continue reprezintă rezultatele analitice (81) pentru $N_f = 2$ și $N_f = 3$. Liniile punctate corespund limitelor date în ec. (83) și (85) pentru valori mici, respectiv mari ale lui α . Frația corespunzătoare lui λ_{heat} e înmulțită cu $\tanh^2\alpha$ pentru eliminarea comportamentului divergent în limita $\alpha \rightarrow 0$.

cazul când $\tilde{k}_B\tilde{T} = 600$ MeV și $(\overline{\eta/s}) = 1/4\pi$, iar α variază între 0 și 4. Lungimea de referință este variată între $1 \text{ fm} \leq \tilde{L}_{\text{ref}} \leq 10 \text{ fm}$.

Modelul bazat pe statistica Maxwell-Jüttner are remarcabila proprietate că, pentru valori mici ale lui $\alpha = \mu/T$, raportul $\frac{T}{\eta}\lambda_{\text{heat}}$ diverge precum α^{-2} , astfel recuperând legea dată în ec. (5.6) a referinței [33] (obținută în cadrul corespondenței AdS/CFT), precum și în ec. (33) din referința [31]. Deoarece modelul considerat aici este bazat pe statistica Maxwell-Jüttner, comportamentul gazului ideal este atins când $\alpha \rightarrow \infty$. Aceasta implică că raportul $T\lambda_{\text{heat}}/\eta$ tinde către valoarea constantă $5/3$. Aceasta este una dintre diferențele majore ale modelului descris mai sus și cel propus în [31]. O altă limitare majoră a modelului bazat pe statistica Maxwell-Jüttner este că densitatea de entropie (77) devine negativă la valori mari ale lui α , ceea ce implică faptul că raportul η/s nu poate fi menținut constant când α depășește valoarea $\alpha_0 \simeq 4.09$, iar s se apropie de valoarea 0. În particular, rezultatele obținute cu modelul acesta nu pot fi considerate realiste când $\alpha \gtrsim 1$.

În cele ce urmează, vom discuta niște rezultate numerice obținute folosind modelul Lattice Boltzmann dezvoltat în lucrarea [34]. Pentru extragerea coeficienților de transport folosind simulări numerice, am considerat problema atenuării undelor longitudinale discutată în [35]. Mai exact, considerăm o undă armonică având vectorul de unde $k = 2\pi/L$ care se propagă de-a lungul direcției z într-un domeniu infinit având periodicitatea L . Se presupune că sistemul e omogen în raport cu direcțiile transversale x și y . Considerăm descompunerea

$$n = n_0 + \delta n, \quad P = P_0 + \delta P, \quad (87)$$

unde perturbațiile δn și δP sunt considerate mici, având același ordin de mărime ca și viteza $\beta = u/c \ll 1$.

Timpii de atenuare τ_η și τ_λ , definiți ca durata după care amplitudinea undei longitudinale scade cu factorul e (baza logaritmului natural), sunt reprezentați în Fig. 6. Se observă o divergență a acestor timpi în limita când $\alpha \rightarrow 4$, adică atunci când timpul de relaxare $\tau_{A-W} \rightarrow 0$. De asemenea, se observă că pentru valori fixate ale lui α , timpul de atenuare scade considerabil pe măsură ce lungimea de undă L scade, ceea ce indică o disipare crescută în acest regim.

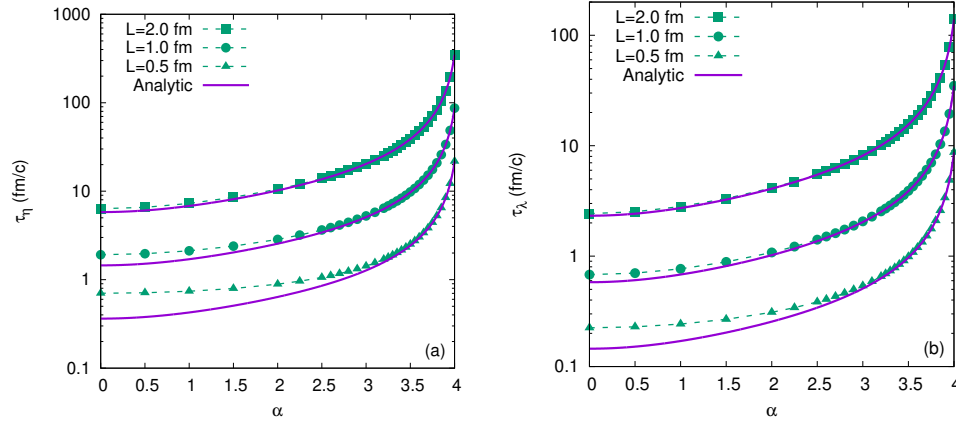


Figura 6: Timprii de atenuare a undelor longitudinale inițializate conform (a) $\delta n_0 = \delta P_0 = 0$ și $\beta_0 = 10^{-3}$; și (b) $\delta n_0/n_0 = 10^{-3}$, $\delta P_0 = 0$ și $\beta_0 = 0$, reprezentate în raport cu α .

Bibliografie

- [1] V. E. Ambruș, M. N. Chernodub, *Helical vortical effects, helical waves, and anomalies of Dirac fermions*, arXiv:1912.11034 [hep-th].
- [2] V. E. Ambruș, *Helical massive fermions under rotation*, J. High Energ. Phys. **2020** (2020) 16.
- [3] V. E. Ambruș, *Fermion condensation under rotation on anti-de Sitter space*, Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl. **13** (2020) 199.
- [4] V. E. Ambruș, *Rigidly-rotating quantum thermal states in bounded systems*, arXiv:1904.01123 [hep-th].
- [5] V. E. Ambruș, E. Winstanley, *Exact solutions in quantum field theory under rotation*, arXiv:1908.10244 [hep-th].
- [6] V. E. Ambruș, C. Kent, E. Winstanley, *Quantum thermal states on anti-de Sitter space*. [Apăsați aici pentru descărcarea posterului].

- [7] V. E. Ambruş, *Quantum corrections in rigidly-rotating thermal states on anti-de Sitter space*, [Apăsați aici pentru descărcarea prezentării].
- [8] D. E. Kharzeev, J. Liao, S. A. Voloshin, G. Wang, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **88** (2016) 1.
- [9] M. J. Duff, *Class. Quantum Grav.* **11** (1994) 1387.
- [10] J. Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113.
- [11] P. K. Kovtun, D. T. Son, A. O. Starinets, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 111601.
- [12] V. E. Ambruş, C. Kent, E. Winstanley, *Int J. Mod. Phys. D* **27** (2018) 1843014.
- [13] S. Chen, G. D. Doolen, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **30** (1998) 329.
- [14] I. I. Cotăescu, *Rom. J. Phys.* **52** (2007) 895–940.
- [15] A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **21** (1980) 2260–2269.
- [16] P. B. Groves, P. R. Anderson, E. D. Carlson, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 124017.
- [17] M. Laine, A. Vuorinen, *Basics of thermal field theory* (Springer, 2016).
- [18] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, 1982).
- [19] V. E. Ambruş, E. Winstanley, *AIP Conf. Proc.* **1634** (2014) 40–49.
- [20] W. Mück, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000) 3021–3026.
- [21] V. E. Ambruş, E. Winstanley, *Class. Quant. Grav.* **34** (2017) 145010.
- [22] STAR Collaboration, *Nature* **548** (2017) 62.

- [23] X.-G. Huang, T. Koide, Nucl. Phys. A **889** (2012) 73.
- [24] M. Tanabashi *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D **98** (2018) 030001.
- [25] J. I. Kapusta, P. V. Landshoff, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **15** (1989) 267.
- [26] B. R. Iyer, Phys. Rev. D **26** (1982) 1900.
- [27] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum field theory* (Dover, 1980).
- [28] V. E. Ambruş, *Lattice Boltzmann model for quantum statistics of ultra-relativistic particles*, articol în lucru.
- [29] I. Bouras, E. Molnár, H. Niemi, Z. Xu, A. El, O. Fochler, C. Greiner, D. H. Rischke, Phys. Rev. C **82** (201) 024910.
- [30] C. Cercignani, G. M. Kremer, *The relativistic Boltzmann equation: theory and applications* (Birkhäuser Verlag, 2002).
- [31] A. Jaiswal, B. Friman, K. Redlich, Phys. Lett. B **751** (2015) 548.
- [32] V. E. Ambruş, AIP Conf. Proc. **1796** (2017) 020006.
- [33] D. T. Son, A. O. Starinets, J. High Energy Phys. **JHEP03** (2006) 052.
- [34] V. E. Ambruş, R. Blaga, Phys. Rev. C **98** (2018) 035201.
- [35] V. E. Ambruş, Phys. Rev. C **97** (2018) 024914.