

Raport științific

privind implementarea proiectului PN-III-P1-1.1-PD-2016-1423, intitulat

Corecții cuantice în sisteme mezoscopice

în perioada mai 2018-decembrie 2018 (etapa 1)

Descrierea etapei 1

Etapa 1	Rezultate livrate pe etapa: - Un articol ISI; - O prezentare la o conferință internațională.	Data raportare: 07/12/2018	Buget etapă (lei): 83.295,00
Obiectiv O1	Denumire Obiectiv: Corecții cuantice pe spațiul Minkowski în prezența frontierelor		
Activitate A1.1	Denumire Activitate: A1.1. Analiza hidrodinamică a tensorului energie-impuls (TEI) corespunzător câmpului Klein-Gordon cuantificat în prezența frontierelor		
Activitate A1.2	Denumire Activitate: A1.2. Analiza hidrodinamică a TEI corespunzător câmpului Dirac cuantificat în prezența frontierelor		

Verificarea stadiului livrabilelor

Angajat	Realizat	Grad de îndeplinire
Un articol ISI	O publicație ISI tip <i>Article</i> ; <i>Proceedings Paper</i> [1]	Rezultat livrat.
O prezentare la o conferință internațională	O prezentare la o conferință internațională [2]	Rezultat livrat.

Raport de activitate (Etapa 1)

Obiectivul O1. Corecții cuantice pe spațiul Minkowski în prezența frontierelor

În cadrul acestui obiectiv, se evidențiază legătura dintre condițiile pe frontieră și proprietățile tensorului energie impuls (TEI) măsurate pe frontieră.

Activitatea A1.1. Analiza hidrodinamică a tensorului energie-impuls (TEI) corespunzător câmpului Klein-Gordon cuantificat în prezența frontierelor. Scopul principal al acestei activități este corelarea implementării condițiilor pe frontieră cu valoarea medie a TEI pe frontieră în stări termice. În particular, pentru sistemele în rotație, se dorește controlul vitezei de rotație aferentă TEI-ului. Rezultatele preliminare obținute în cadrul acestei activități au fost diseminate oral prin lucrarea [2], urmând a fi trimise spre publicare sub forma unei lucrări *in extenso* [3]. Detaliile tehnice sunt prezentate în sec. 1.

Activitatea A1.2. Analiza hidrodinamică a TEI corespunzător câmpului Dirac cuantificat în prezența frontierelor. Metodologia dezvoltată la A1.1 este conceptual identică cu cea necesară pentru studiul câmpului Dirac. Diferența majoră însă este că ecuația Dirac, fiind o ecuație de ordinul 1, nu permite fixarea condițiilor pe frontieră (e.g., de tip Dirichlet sau von Neumann) la nivelul întregului spinor. Detaliile tehnice sunt prezentate pe scurt în sec. 2, rezultatele fiind momentan preliminare [3].

Obiectivul O2. Corecții cuantice pe spații curbe

În cadrul etapei 1 au fost obținute câteva rezultate aferente activității A2.1. *Analiză comparativă a TEI obținut folosind teoria cuantică de câmp și teoria cinetică a gazelor pe spațiul anti-de Sitter.* Aceste rezultate au fost publicate în [1]. O scurtă descriere a rezultatelor obținute este prezentată în Sec. 3.

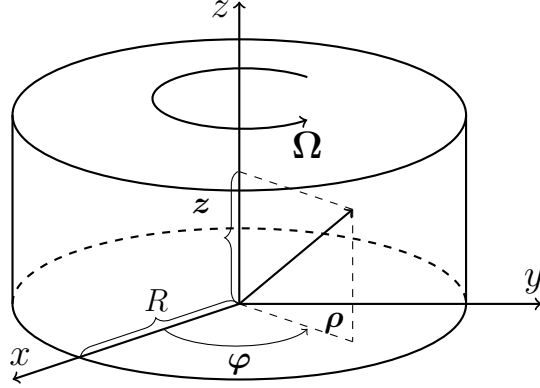


Figura 1: Geometria sistemelor în rotație în jurul axei z , cu viteza unghiulară $\Omega = \Omega \mathbf{k}$. Coordonatele cilindrice ρ , φ și z ale unui punct oarecare de coordonate (x, y, z) sunt reprezentate schematic. Frontiera se găsește la distanța R de axa de rotație.

1 Condiții pe frontieră pentru câmpul Klein-Gordon în rotație

Să considerăm cazul câmpului Klein-Gordon în interiorul unui cilindru de rază R (sistemul este reprezentat schematic în Fig. 1). Ne interesează să găsim o legătură între condițiile pe frontieră impuse pentru câmp și valoarea vitezei pe suprafața cilindrului, măsurată într-o stare în rotație rigidă cu viteza unghiulară Ω , corespunzătoare temperaturii β . Pentru simplitate, păstrăm discuția la nivelul cuantelor fără masă. Folosind teoria cinetică a gazelor, se observă că soluția corespunzătoare rotației rigide este una de echilibru termodinamic global, astfel încât tensorul energie-impuls este cel corespunzător fluidului perfect:

$$T_{\text{RKT}}^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} = (E_{\text{RKT}} + P_{\text{RKT}})\eta^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} + P_{\text{RKT}}u_{\text{RKT}}^{\hat{\alpha}}u_{\text{RKT}}^{\hat{\gamma}}, \quad (1)$$

unde $P_{\text{RKT}} = \frac{1}{3}E_{\text{RKT}}$ în cazul particulelor fără masă, iar $u_{\text{RKT}}^{\hat{\alpha}}$ este cuadriviteza fluidului, având componentele:

$$u_{\text{RKT}}^{\hat{0}} = \gamma_{\text{RKT}}, \quad u_{\text{RKT}}^{\hat{\rho}} = 0, \quad u_{\text{RKT}}^{\hat{\varphi}} = \gamma_{\text{RKT}}v_{\text{RKT}}, \quad u_{\text{RKT}}^{\hat{z}} = 0. \quad (2)$$

Viteza v_{RKT} corespunzătoare rotației rigide cu viteză unghiulară Ω și factorul Lorentz γ_{RKT} aferent sunt date prin:

$$v_{\text{RKT}} = \rho\Omega, \quad \gamma_{\text{RKT}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{RKT}}^2}}. \quad (3)$$

Densitatea de energie E_{RKT} are expresia:

$$E_{\text{RKT}} = \frac{\pi^2 \gamma_{\text{RKT}}^4}{30\beta^4}. \quad (4)$$

Soluțiile ecuației Klein-Gordon sunt:

$$f_j = N_j \frac{e^{-i\omega_j t + ik_j z + im_j \varphi}}{\sqrt{8\pi^2 \omega_j}} J_{m_j}(q_j \rho), \quad (5)$$

unde $q_j = \sqrt{\omega_j^2 - k_j^2}$ este valoarea impulsului pe direcția radială, k_j este impulsul de-a lungul axei z , ω_j este energia, m_j este proiecția momentului cinetic pe axa z iar N_j este o constantă de normare. Indicele j se referă la colecția numerelor cuantice care caracterizează soluția f_j . Pentru a asigura ortogonalitatea soluțiilor (5), trebuie satisfăcută relația:

$$[q_j R J'_{m_j}(q_j R)] + \Psi J_{m_j}(q_j R) = 0. \quad (6)$$

Relația de mai sus definește condițiile pe frontieră de tip Robin. Se recuperează condițiile Dirichlet când $\Psi \rightarrow \infty$, respectiv condițiile von Neumann pentru $\Psi \rightarrow 0$. Pentru $m_j = m$ fixat, ec. (6) admite o infinitate de soluții $q_j \rightarrow q_{m,\ell}$ ($\ell = 1, 2, 3, \dots$) care formează o mulțime discretă.

Mediile componentelor TEI într-o stare în rotație rigidă la temperatură

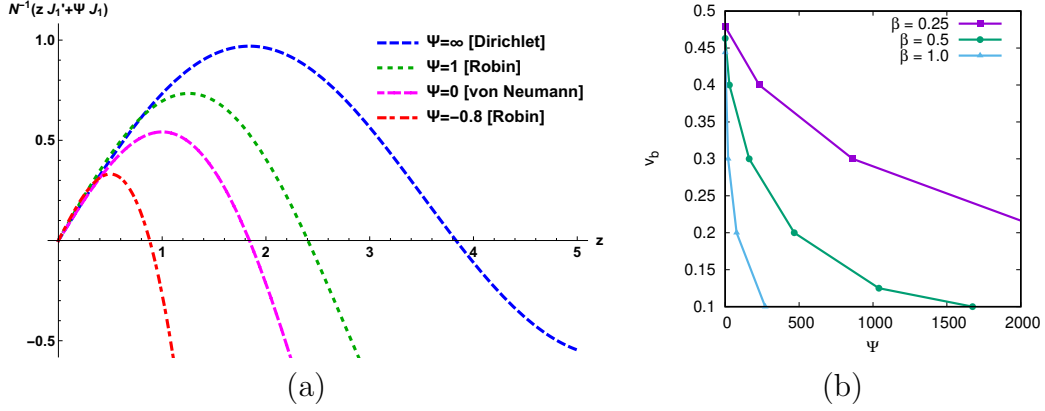


Figura 2: (a) Funcția din stânga semnului egal din ec. (6), reprezentată pentru $m = 1$ în raport cu $z = qR$. (b) Valoarea v_b a vitezei v (9), măsurată pe frontieră, ca funcție de Ψ pentru diferite valori ale parametrului β , în cazul când $R = 1$ și $\Omega = 0.5$.

finită se pot calcula cu formula:

$$\langle : T_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} : \rangle_{\beta;\Omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|N_{kml}|^2 dk}{12\pi^2 \omega_{kml} (e^{\beta \tilde{\omega}_{kml}} - 1)} F_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}, \quad (7)$$

unde $\tilde{\omega}_{kml} = \omega_{kml} - \Omega m$ reprezintă energia măsurată de către observatorii aflați în rotație rigidă iar termenii $F_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}$ au expresiile:

$$\begin{aligned} F_{\hat{0}\hat{0}} &= (6\omega_{kml}^2 + \rho^{-2}m^2 - q_{m\ell}^2) J_m^2(q_{m\ell}\rho) + q_{m\ell}^2 J_m'^2(q_{m\ell}\rho), \\ F_{\hat{\varphi}\hat{0}} &= -6\omega\rho^{-1}m J_m^2(q\rho), \\ F_{\hat{\rho}\hat{\rho}} &= (-3\rho^{-2}m^2 + 3q^2) J_m^2(q\rho) + 2q\rho^{-1} J_m(q\rho) J_m'(q\rho) + 3q^2 J_m'^2(q\rho), \\ F_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} &= (5\rho^{-2}m^2 + q^2) J_m^2(q\rho) - 2q\rho^{-1} J_m(q\rho) J_m'(q\rho) - q^2 J_m'^2(q\rho), \\ F_{\hat{z}\hat{z}} &= (6k^2 - \rho^{-2}m^2 + q^2) J_m^2(q\rho) - q^2 J_m'^2(q\rho). \end{aligned} \quad (8)$$

Datorită factorului Bose-Einstein $(e^{\beta \tilde{\omega}_{kml}} - 1)^{-1}$, energia $\tilde{\omega}_{kml}$ trebuie să fie totdeauna pozitivă. Acest lucru trebuie asigurat prin condițiile pe frontieră, în sensul că Ψ trebuie ales astfel încât $\omega_{kml} > \Omega m$ pentru orice valori ale lui

k , m și ℓ , inclusiv când $k = 0$ și $\ell = 1$ (prima rădăcină). Drept urmare, avem de satisfăcut suplimentar condiția $q_{m,1} > m\Omega$. Se știe că pentru condițiile Dirichlet ($\Psi \rightarrow \infty$) și von Neumann ($\Psi = 0$) este totdeauna satisfăcută relația $q_{m,\ell}R > m \geq m\Omega R$, unde ultima inegalitate este validă atunci când $\Omega R \leq 1$ (suprafața $\rho\Omega = 1$ corespunde orizontului de rotație, unde toate valorile medii diverg deoarece viteza observatorilor în rotație rigidă atinge viteza luminii). Figura 2(a) arată zerourile funcției din stânga semnelui egal din ec. (6) pentru cazul $m = 1$. Se vede că zerourile corespunzătoare valorilor pozitive ale lui Ψ interpolează între zerourile aferente condițiilor von Neumann și Dirichlet, în timp ce pentru $\Psi < 0$, zerourile se deplasează spre stânga.

Pentru evaluarea vitezei v aferente stării în rotație rigidă, se poate utiliza reperul Landau, definit prin:

$$T^{\hat{\alpha}}_{\hat{\gamma}} u^{\hat{\gamma}} = -E u^{\hat{\alpha}}, \quad v = \frac{u^{\hat{\phi}}}{u^{\hat{0}}}, \quad (9)$$

unde E este densitatea de energie Landau, u^μ este viteza Landau iar v reprezintă analogul cuantic al mărimii v_{RKT} (3). Se poate arăta că între componentele TEI și v există relația:

$$T^{\hat{0}\hat{\phi}} = \frac{v}{1+v^2} (T^{\hat{0}\hat{0}} + T^{\hat{\phi}\hat{\phi}}). \quad (10)$$

Evaluând ec. (10) pe frontieră și impunând $v(R) = v_b$, rezultă relația:

$$\Psi = \frac{3 \sum_{m,\ell} \left(1 + \frac{\Psi^2 - m^2}{q^2 R^2}\right)^{-1} \int \frac{dk}{\omega(e^{\beta\tilde{\omega}} - 1)} \left[\omega R m - \frac{v_b (\omega^2 R^2 + m^2)}{1 + v_b^2} \right]}{\frac{v_b}{1 + v_b^2} \sum_{m,\ell} \left(1 + \frac{\Psi^2 - m^2}{q^2 R^2}\right)^{-1} \int \frac{dk}{\omega(e^{\beta\tilde{\omega}} - 1)}}, \quad (11)$$

unde indicii m , ℓ și k au fost suprimați pentru a nu încălca expresia. Ecuația de mai sus permite determinarea iterativă a lui Ψ , pornind de la o valoare

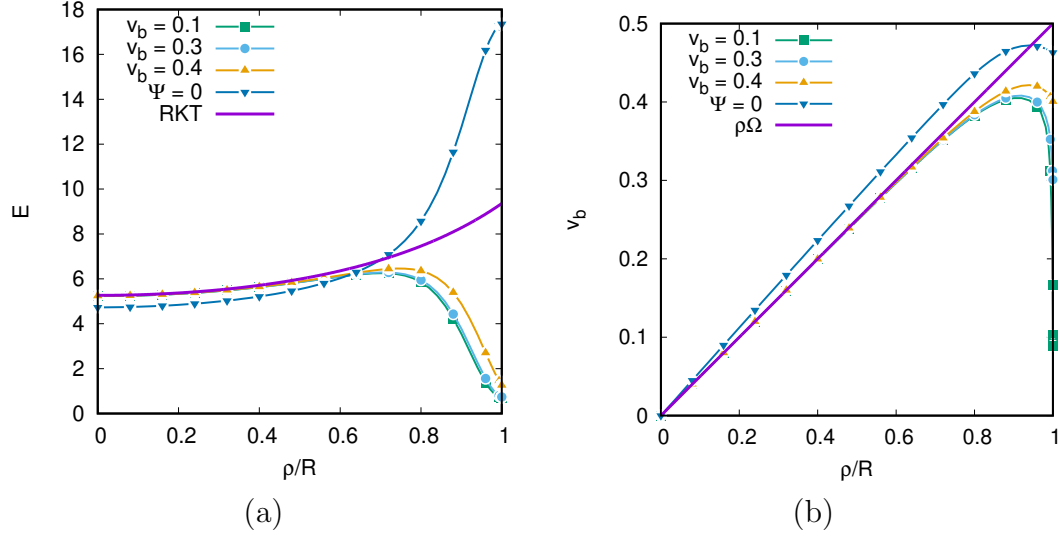


Figura 3: Profilele (a) energiei Landau E și (b) vitezei azimutale v ca funcție de ρ/R pentru diferite valori ale lui Ψ . Rezultatele obținute cu teoria cinetică relativistă E_{RKT} (4) și $v_{\text{RKT}} = \rho\Omega$ (3) sunt reprezentate folosind linii continue de culoare mov. Valorile parametrilor sunt $\Omega = 0.5$, $R = 1$ și $\beta = 0.5$.

test $\Psi^{(0)}$, care se introduce în membrul drept al egalității pentru a obține în membrul stâng o nouă valoare $\Psi^{(1)}$. La iterația n , se introduce $\Psi^{(n-1)}$ în membrul drept și se obține în membrul stâng $\Psi^{(n)}$. Algoritmul atinge convergența când

$$|\Psi^{(n)} - \Psi^{(n-1)}| < \varepsilon, \quad (12)$$

unde $\varepsilon = 0.001$. Rezultatul aplicării algoritmului de mai sus se poate vedea în Fig. 2(b), unde este reprezentată dependența vitezei pe perete v_b de Ψ pentru trei valori ale lui β . Se poate observa că $v_b < \Omega R = 0.5$ pentru toate valorile lui $\Psi \geq 0$.

Alegerea lui Ψ nu influențează doar valoarea vitezei pe frontieră (v_b), ci și profilele componentelor TEI. În Fig. 3(a) și 3(b) se pot vedea comportamentele energiei Landau E și vitezei azimutale v (9) pentru $\Psi = 0$ (condiții von Neumann) și pentru valori ale lui Ψ alese astfel încât $v_b = 0.1, 0.3$ și 0.4 (am

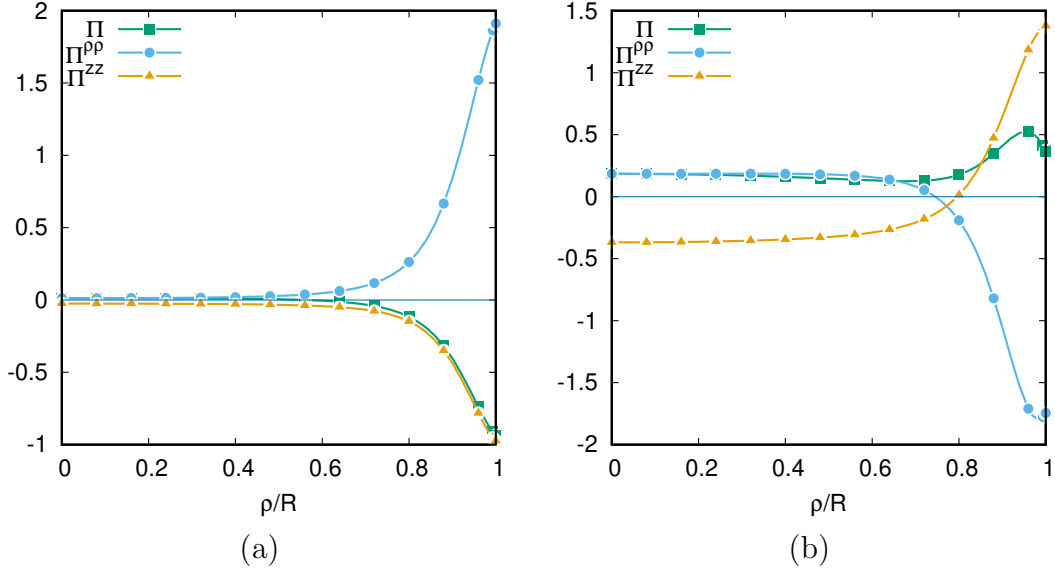


Figura 4: Profilele componentelor Π , $\Pi^{\hat{\rho}\hat{\rho}}$ și $\Pi^{\hat{z}\hat{z}}$ ale părții vâscoase $\Pi^{\hat{\alpha}\hat{\lambda}}$ (14) a TEI pentru (a) $v_b = 0.4$ ($\Psi = 28.602$); respectiv (b) $\Psi = 0$ ($v_b = 0.463$). În teoria cinetică relativistă, $\Pi_{\text{RKT}} = 0$. Valorile parametrilor sunt $\Omega = 0.5$, $R = 1$ și $\beta = 0.5$.

considerat $R = 1$, $\Omega = 0.5$ și $\beta = 0.5$). Cazul corespunzător lui $\Psi = 0$ iese în evidență printr-o creștere semnificativă a energiei în vecinătatea frontierei, în timp ce viteza Landau depășește predicția teoriei cinetice a gazelor ($v = \rho\Omega$).

În fine, considerăm deviația TEI de la forma pentru fluidul perfect, atinsă de sistemele aflate în echilibru termodinamic global:

$$T^{\hat{\alpha}\hat{\lambda}} - T_{\text{ideal}}^{\hat{\alpha}\hat{\lambda}} = \Pi^{\hat{\alpha}\hat{\lambda}}, \quad (13)$$

unde $\Pi^{\hat{\alpha}\hat{\lambda}}$ poate fi descompus după cum urmează:

$$\Pi^{\hat{\alpha}\hat{\lambda}} = \begin{pmatrix} v^2\gamma^2\Pi & 0 & v\gamma^2\Pi & 0 \\ 0 & \Pi^{\hat{\rho}\hat{\rho}} & 0 & 0 \\ v\gamma^2\Pi & 0 & \gamma^2\Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi^{\hat{z}\hat{z}} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

unde $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ este factorul Lorentz. Componentele Π , $\Pi^{\hat{\rho}\hat{\rho}}$ și $\Pi^{\hat{z}\hat{z}}$ satisfac relația:

$$\Pi + \Pi^{\hat{\rho}\hat{\rho}} + \Pi^{\hat{z}\hat{z}} = 0, \quad (15)$$

deoarece tensorul $\Pi^{\hat{\alpha}\hat{\lambda}}$ are urma nulă. Profilele componentelor Π , $\Pi^{\hat{\rho}\hat{\rho}}$ și $\Pi^{\hat{z}\hat{z}}$ sunt reprezentate în Fig. 4 pentru (a) $v_b = 0.4$; și (b) $\Psi = 0$. Se observă că în cazul condițiilor von Neumann ($\Psi = 0$), componenta $\Psi^{\hat{z}\hat{z}}$ își schimbă semnul, fiind negativă pe axa de rotație ($\rho = 0$), respectiv pozitivă pe frontieră ($\rho = R$).

2 Condiții pe frontieră pentru câmpul Dirac în rotație

Condițiile pe frontieră pentru câmpul Dirac trebuie formulate astfel încât operatorul Hamiltonian $H = i\partial_t$ să rămână hermitic. Cu alte cuvinte, produsul scalar $\langle\psi, \chi\rangle$ al oricăror două soluții ψ și χ ale ecuației Dirac trebuie să fie independent de timp. În cazul când câmpul ocupă volumul V având frontiera ∂V , invarianța temporală a produsului scalar este asigurată când este satisfăcută relația:

$$\partial_t \langle\psi, \chi\rangle = - \int_{\partial V} d\Sigma_i \sqrt{-g} \bar{\psi} \gamma^i \chi, \quad (16)$$

unde $\sqrt{-g}$ este determinantul metricii la puterea 1/2 iar matricile Dirac covariante γ^i sunt dependente de punct, satisfăcând următoarea relație de

anticomutare:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2g^{\mu\nu}. \quad (17)$$

Scriind măsura de integrare $d\Sigma_i = d\Sigma n_i$, unde n_i sunt componentele normalei interioare la suprafață $n = n_i dx^i$, ec. (16) devine:

$$\int_{\partial V} d\Sigma \sqrt{-g} \bar{\psi} \not{n} \chi, \quad (18)$$

unde $\not{n} = n_i \gamma^i$.

Ecuția (18) admite o gamă foarte largă de condiții pe frontieră, din care putem distinge două clase.

Prima clasă caută satisfacerea ecuației rezultante după efectuarea integrării după z și φ . Condițiile pe frontieră rezultante se formulează la nivelul componentelor Fourier ale soluțiilor ecuației Dirac, drept urmare formularea este prin însăși natura ei nelocală. Dintre implementările de acest tip amintim condițiile de tip spectral introduse în [M. Hortacșu, K. D. Rothe, B. Schroer, Nucl. Phys. **B171** (1980) 530].

În cadrul celei de-a doua clase, satisfacerea ec. (18) se asigură la nivelul integrandului, într-o manieră locală, prin anularea produsului $\bar{\psi} \not{n} \chi$ în orice punct al frontierei ∂V . Acest obiectiv poate fi atins folosind condițiile pe frontieră propuse de grupul de la MIT [A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, V. F. Weisskopf, Phys. Rev. D **9** (1974) 3471], generalizate ulterior pentru invarianța la transformările chirale în [C. A. Lütken, F. R. Ravndal, J. Phys. G **10** (1984) 123]:

$$i\not{n}\psi = e^{-i\gamma_5\Theta}\psi, \quad (19)$$

unde pentru o transformare $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\gamma_5\beta}\psi$, unghiul Θ se transformă după legea $\Theta \rightarrow \Theta' = \Theta + 2\beta$.

Pentru cazul câmpului Dirac în interiorul unui cilindru de rază R , ec. (19)

devine:

$$i\gamma^{\hat{p}}\psi = -e^{-i\gamma_5\Theta}\psi. \quad (20)$$

Soluțiile ecuației Dirac care satisfac ec. (20) se pot scrie:

$$U_{kml} = b_{kml}^+ U_{kml}^+ + b_{kml}^- U_{kml}^-, \quad (21)$$

unde spinorii U_{kml}^λ ($\lambda = \pm 1/2$) sunt dați prin:

$$U_{kml}^\lambda = \frac{e^{-iEt+ikz}}{4\pi} \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_+ \\ 2\lambda\mathfrak{E}_- \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_\lambda e^{im\varphi} J_m(q\rho) \\ 2i\lambda\mathfrak{p}_{-\lambda} e^{i(m+1)\varphi} J_{m+1}(q\rho) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

unde indicii k , m și ℓ au fost omiși în partea dreaptă a semnelui egal. Mai sus s-au folosit notațiile

$$\mathfrak{E}_\pm = \sqrt{1 \pm \frac{\mu}{E}}, \quad \mathfrak{p}_\pm = \sqrt{1 \pm \frac{k}{p}}, \quad (23)$$

unde μ este masa cuantei iar $q = \sqrt{E^2 - k^2 - \mu^2}$ este componenta radială a impulsului particulei.

Ecuația (20) se poate scrie:

$$\mathbb{A}\mathbb{U} = 0, \quad (24)$$

unde matricea $\mathbb{A} = i\gamma^{\hat{p}} + e^{-i\gamma_5\Theta}$ are componentele:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & -i \sin \Theta & ie^{-i\varphi} \\ 0 & \cos \Theta & ie^{-i\varphi} & -i \sin \Theta \\ -i \sin \Theta & -ie^{-i\varphi} & \cos \Theta & 0 \\ -ie^{-i\varphi} & -i \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix}, \quad (25)$$

în timp ce vectorul coloană \mathbb{U} este:

$$\mathbb{U} = \frac{e^{-iEt+ikz}}{4\pi} \begin{pmatrix} (b_+ \boldsymbol{\mathcal{E}}_+ \mathbf{p}_+ + b_- \boldsymbol{\mathcal{E}}_+ \mathbf{p}_-) e^{im\varphi} J_m(qR) \\ i(b_+ \boldsymbol{\mathcal{E}}_+ \mathbf{p}_- - b_- \boldsymbol{\mathcal{E}}_+ \mathbf{p}_+) e^{i(m+1)\varphi} J_{m+1}(qR) \\ (b_+ \boldsymbol{\mathcal{E}}_- \mathbf{p}_+ - b_- \boldsymbol{\mathcal{E}}_- \mathbf{p}_-) e^{im\varphi} J_m(qR) \\ i(b_+ \boldsymbol{\mathcal{E}}_- \mathbf{p}_- + b_- \boldsymbol{\mathcal{E}}_- \mathbf{p}_+) e^{i(m+1)\varphi} J_{m+1}(qR) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Ecuția (24) are soluții b_{\pm} netriviale când

$$j_{m\ell}^2 + \frac{2\mu j_{m\ell}}{q_{m\ell}} \cos \Theta - 1 = 0, \quad (27)$$

unde $j_{m\ell} = J_m(q_{m\ell}R)/J_{m+1}(q_{m\ell}R)$. Pentru valori fixate ale lui m și μ , ecuația de mai sus are o infinitate de soluții $q_{m\ell}$, indexate cu ajutorul lui ℓ ($\ell = 1, 2, \dots$). Cazurile $\Theta = 0$ ($\cos \Theta = 1$) și $\Theta = \pi$ ($\cos \Theta = -1$) au fost studiate în [V. E. Ambruș, E. Winstanley, Phys. Rev. D **93** (2016) 104014]. Studiul cazului general este încă în fază preliminară, rezultatele urmând a fi trimise spre publicare în cel mai scurt timp [3].

3 Analiza corecțiilor cuantice ale stărilor termice pe spațiul anti-de Sitter

Spațiul anti-de Sitter reprezintă o soluție de vid a ecuațiilor Einstein corespunzătoare unei constante cosmologice negative. La fel ca și spațiul Minkowski, spațiul adS este maximal simetric, admitând 10 vectori Killing liniar independenți. Metrica pe acest spațiu poate fi pusă sub forma:

$$ds_{\text{adS}}^2 = a^2 \sec^2 \rho \left[-d\tau^2 + d\rho^2 + \sin^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (28)$$

Distanța cea mai scurtă dintre două puncte cu coordonatele x și x' este dată de intervalul geodetic $s_{\text{adS}}(x, x')$, care satisface:

$$\cos\left(\frac{s_{\text{adS}}}{a}\right) = \frac{\cos \Delta\tau}{\cos \rho \cos \rho'} - \cos \gamma \tan \rho \tan \rho', \quad (29)$$

unde $\Delta\tau = \tau - \tau'$ iar γ reprezintă unghiul dintre vectorii \mathbf{x} și \mathbf{x}' :

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{\rho \rho'}. \quad (30)$$

Stările termice clasice pot fi caracterizate folosind teoria cinetică relativă. În cazul particulelor bosonice, se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} E_{\text{adS}}^{S,\text{RKT}}(\beta) - 3P_{\text{adS}}^{S,\text{RKT}}(\beta) &= \frac{m^3 \cos \rho}{2\pi^2 \beta} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} K_1\left(\frac{mj\beta}{\cos \rho}\right), \\ P_{\text{adS}}^{S,\text{RKT}}(\beta) &= \frac{m^2 \cos^2 \rho}{2\pi^2 \beta^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} K_2\left(\frac{mj\beta}{\cos \rho}\right), \end{aligned} \quad (31)$$

în timp ce pentru particulele fermionice se obțin expresiile:

$$\begin{aligned} E_{\text{adS}}^{F,\text{RKT}}(\beta) - 3P_{\text{adS}}^{F,\text{RKT}}(\beta) &= \frac{2m^3 \cos \rho}{\pi^2 \beta} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} K_1\left(\frac{mj\beta}{\cos \rho}\right), \\ P_{\text{adS}}^{F,\text{RKT}}(\beta) &= \frac{2m^2 \cos^2 \rho}{\pi^2 \beta^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j^2} K_2\left(\frac{mj\beta}{\cos \rho}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

În cazul particulelor fără masă, relațiile (31) și (32) se reduc la:

$$E_{\text{adS}}^{S,\text{RKT}}(\beta) \Big|_{m=0} = \frac{\pi^2 \cos^4 \rho}{30\beta^4}, \quad E_{\text{adS}}^{F,\text{RKT}}(\beta) \Big|_{m=0} = \frac{7\pi^2 \cos^4 \rho}{60\beta^4}. \quad (33)$$

Pentru studiul stărilor termice folosind teoria cuantică de câmp, se construiesc prima dată funcțiile Green ale lui Feynman pentru starea de vid,

rezolvând formele neomogene ale ecuațiilor Klein-Gordon și Dirac:

$$\begin{aligned} (\square - m^2 - \xi R)G_{\text{vid}}^{\text{adS}}(x, x') &= \frac{\delta^4(x - x')}{\sqrt{-g}}, \\ (i\mathcal{D} - m)S_{\text{vid}}^{\text{adS}}(x, x') &= \frac{\delta^4(x - x')}{\sqrt{-g}}, \end{aligned} \quad (34)$$

unde $R = -12/a^2$ este scalarul Ricci iar ξ este o constantă de cuplaj ($\xi = 0$ corespunde cuplajului minimal iar $\xi = 1/6$ corespunde cuplajului conform).

În cazul câmpului Klein-Gordon, se obține relația:

$$\begin{aligned} -iG_{\text{vid}}^{\text{adS}}(x, x') &= \mathcal{C}_S \left[-\sin\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right) \right]^{-3-2\eta} \\ &\times {}_2F_1\left[\frac{3}{2} + \eta, \frac{1}{2} + \eta; 1 + 2\eta; \text{cosec}^2\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right)\right] \end{aligned}$$

unde constanta \mathcal{C}_S este

$$\mathcal{C}_S = -\frac{1}{8\pi a^2} \frac{\Gamma(-2\eta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \eta\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \eta\right)} \left(\frac{1}{4} - \eta^2\right) \tan(\pi\eta) \quad (35)$$

iar parametrul η depinde de masa cuantelor:

$$\eta = \sqrt{m^2 a^2 + \xi R a^2 + \frac{9}{4}}. \quad (36)$$

Mai multe detalii despre aceste rezultate se găsesc în lucrarea [C. Kent, E. Winstanley, Phys. Rev. D **91** (2015) 044044].

În cazul câmpului Dirac, se obține:

$$iS_{\text{vid}}^{\text{adS}}(x, x') = [\mathcal{A}_F(s_{\text{adS}}) + \mathcal{B}_F(s_{\text{adS}})\not{n}] \Lambda(x, x'), \quad (37)$$

unde $\not{n} = \gamma^{\hat{\alpha}} n_{\hat{\alpha}}$, iar $n_{\hat{\alpha}} = \partial_{\hat{\alpha}} s_{\text{adS}}$ reprezintă tangenta în punctul x la geodezica care leagă punctul x de x' . În mod similar, $n_{\hat{\alpha}'} = \partial_{\hat{\alpha}'} s_{\text{adS}}$ este tangenta în

punctul x' la aceeași geodezică. Bispinorul transportului paralel $\Lambda(x, x')$ a fost găsit în formă închisă în [V. E. Ambruș, E. Winstanley, *Class. Quantum Gravit.* **34** (2017) 145010]:

$$\Lambda(x, x') = \frac{\sec \frac{s_{\text{adS}}}{2a}}{\sqrt{\cos(\rho/a) \cos(\rho'/a)}} \left[\begin{aligned} & \cos \frac{\Delta t}{2a} \left(\cos \frac{\rho}{2a} \cos \frac{\rho'}{2a} + \sin \frac{\rho}{2a} \sin \frac{\rho'}{2a} \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\rho} \frac{\mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\rho'} \right) \\ & + \sin \frac{\Delta t}{2a} \left(\sin \frac{\rho}{2a} \cos \frac{\rho'}{2a} \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\rho} \gamma^{\hat{0}} + \sin \frac{\rho'}{2a} \cos \frac{\rho}{2a} \frac{\mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\rho'} \gamma^{\hat{0}} \right) \end{aligned} \right]. \quad (38)$$

Funcțiile \mathcal{A}_F și \mathcal{B}_F depind doar de s_{adS} , după cum urmează:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_F(s_{\text{adS}}) &= \frac{\Gamma(2+ma)}{16\pi^{\frac{3}{2}} a^3 4^{ma} \Gamma(\frac{1}{2}+ma)} \cos\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right) \left[-\sin^2\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right)\right]^{-2-ma} \\ &\quad \times {}_2F_1\left[1+ma, 2+ma; 1+2ma; \operatorname{cosec}^2\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right)\right], \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_F(s_{\text{adS}}) &= \frac{i\Gamma(2+ma)}{16\pi^{\frac{3}{2}} a^3 4^{ma} \Gamma(\frac{1}{2}+ma)} \sin\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right) \left[-\sin^2\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right)\right]^{-2-ma} \\ &\quad \times {}_2F_1\left[ma, 2+ma; 1+2ma; \operatorname{cosec}^2\left(\frac{s_{\text{adS}}}{2a}\right)\right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Construcția stărilor termice se face pornind de la funcția Green a lui Feynman pentru o stare la temperatura β^{-1} :

$$G_{\beta}^{\text{adS}}(x, x') = \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_{\text{vac}}^{\text{adS}}(\tau + ij\bar{\beta}, \mathbf{x}; \tau', \mathbf{x}'), \quad (41)$$

$$S_{\beta}^{\text{adS}}(x, x') = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j S_{\text{vac}}^{\text{adS}}(\tau + ij\bar{\beta}, \mathbf{x}; \tau', \mathbf{x}'), \quad (42)$$

unde $\bar{\beta} = \beta/a$. Expresiile pentru componentele tensorului energie-impuls sunt complicate, de aceea mai jos e reprodusă doar expresia pentru densitatea de energie. În cazul câmpului Klein-Gordon fără masă cuplat minimal ($\xi =$

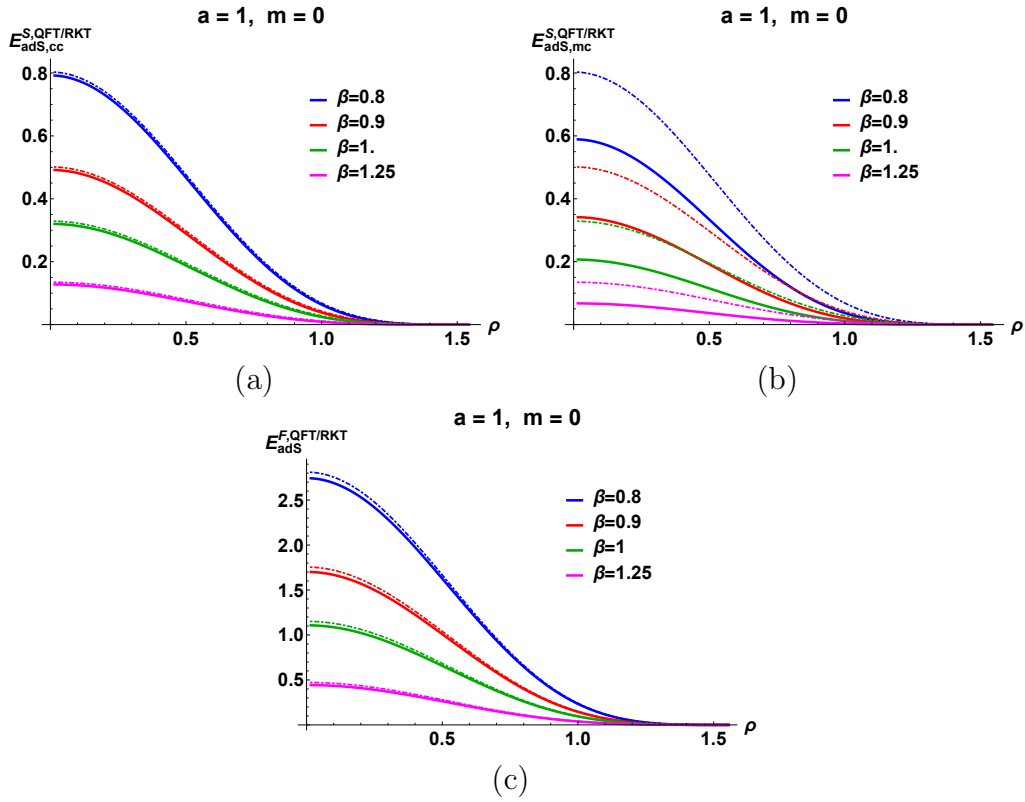


Figura 5: Densitatea de energie $E_{\text{adS}}^{S/F,QFT/RKT}$ pentru câmpul scalar cuplat conform (a) și minimal (b), respectiv pentru câmpul Dirac (c). Raza de curbură a spațiului adS este fixată la $a = 1$. Figurile prezintă patru seturi de date, corespunzând diferitelor valori ale inversului temperaturii β . Liniile continue reprezintă rezultatele (43, 44, 47), obținute folosind teoria cuantică de câmp. Liniile punctate reprezintă rezultatele (33) obținute folosind teoria cinetică relativistă.

0), se obține:

$$E_{\text{adS,cc}}^{S,\text{QFT}}(\beta) = \frac{\cos^4 \rho}{192\pi^2 a^4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_{\text{cc}}}{[\cos(2\rho) + \cosh(j\bar{\beta})]^3 \sinh^4\left(\frac{j\bar{\beta}}{2}\right)}, \quad (43)$$

$$E_{\text{adS,mc}}^{S,\text{QFT}}(\beta) = \frac{\cos^6 \rho}{8\pi^2 a^4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_{\text{mc}}}{[\cos(2\rho) + \cosh(j\bar{\beta})]^3 \sinh^4\left(\frac{j\bar{\beta}}{2}\right)}, \quad (44)$$

unde

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{cc}} = & 3 \cos(6\rho) [2 + \cosh(j\bar{\beta})] + 18 \cos(4\rho) \cosh(j\bar{\beta}) [2 + \cosh(j\bar{\beta})] \\ & + \cos(2\rho) [44 + 51 \cosh(j\bar{\beta}) + 30 \cosh(2j\bar{\beta}) + 10 \cosh(3j\bar{\beta})] \\ & + 31 + 33 \cosh(j\bar{\beta}) + 15 \cosh(2j\bar{\beta}) + 11 \cosh(3j\bar{\beta}), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{mc}} = & \frac{1}{2} \cos(4\rho) [1 + 2 \cosh(j\bar{\beta})] + 3 \cos(2\rho) [1 + \cosh(2j\bar{\beta})] \\ & - 2 + 5 \cosh(j\bar{\beta}) + \frac{3}{2} \cosh(2j\bar{\beta}). \end{aligned} \quad (46)$$

Pentru câmpul Dirac fără masă, se obține:

$$E_{\text{adS}}^{F,\text{QFT}}(\beta) = \frac{3 \cos^4 \rho}{4\pi^2 a^4} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{\cosh\left(\frac{j\bar{\beta}}{2}\right)}{\sinh^4\left(\frac{j\bar{\beta}}{2}\right)}. \quad (47)$$

Rezultatele obținute folosind teoria cuantică de câmp sunt reprezentate împreună cu cele obținute folosind teoria cinetică relativistă în Fig. 5. Se observă că importanța relativă a corecțiilor cuantice în cazul câmpului scalar este semnificativ mai mică când câmpul este cuplat conform ($\xi = 1/6$) decât când cuplajul este minimal ($\xi = 0$). Rezultatul pentru câmpul Dirac (pentru care cuplajul minimal este totodată și cuplaj conform) este mai degrabă asemănător cu cel obținut în cazul câmpului scalar cuplat conform decât în cazul cuplajului minimal. Rezultatele prezentate mai sus sunt discutate mai pe larg în [1].

Bibliografie

- [1] V. E. Ambruş, C. Kent, E. Winstanley, *Analysis of scalar and fermion quantum field theory on anti-de Sitter spacetime*, Int J. Mod. Phys. D **27** (2018) 1843014, DOI: 10.1142/S0218271818430149.
- [2] V. E. Ambruş, *Rigidly-rotating quantum thermal states in bounded systems*, Fifteenth Marcel Grossmann Meeting - MG15 (vezi slide-urile).
- [3] V. E. Ambruş, *Boundary conditions for rigidly-rotating thermal states*, articol în lucru.