

# Complements of Theoretical Physics

## Lecture 14

Victor E. Ambruş

West University of Timișoara

# Table of contents

## Chapter VI. Electrodinamică relativistă

- ▶ VI.1. Mișcarea sarcinilor în câmp electromagnetic extern.
- ▶ VI.2. Propagarea radiației electromagnetice.
- ▶ VI.3. Radiația emisă de distribuții localizate de sarcini.
- ▶ **VI.4. Radiația emisă de sarcinile accelerate.**

## VI.4. Radiația emisă de sarcinile accelerate.

### VI.4.1. Potențialele Liénard-Wiechert.

- ▶ Să considerăm o sarcină  $q$  având traiectoria  $\mathbf{r}(t)$ .
- ▶ La momentul  $t$ , curentul de sarcină are expresia:

$$j^\alpha(\mathbf{x}, t) = qc\beta^\alpha(t)\delta^3[\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)], \quad \beta^\alpha \equiv (1, \mathbf{v}/c). \quad (1)$$

- ▶ Potețialul  $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$  devine:

$$\begin{aligned} A^\mu &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dt' \int d^3x' \frac{j^\alpha(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right) \\ &= \frac{\mu_0 qc}{4\pi} \int dt' \frac{\beta^\alpha[\mathbf{r}(t'), t']}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|\right). \end{aligned} \quad (2)$$

- ▶ Pentru efectuarea integralei după  $t'$ , este utilă relația:

$$\int d\xi \delta[u(\xi)]f(\xi) = \sum_k \frac{f(\xi_k)}{u'(\xi_k)},$$

unde  $\xi_k$  reprezintă soluțiile ecuației  $u(\xi_k) = 0$ .

- ▶ În cazul de față,  $u = t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|$  iar  $\xi = t'$ .

- Potențialul  $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$  al unei sarcini relativiste în mișcare are componentele:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \right]_{\text{ret}}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0 qc}{4\pi} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \right]_{\text{ret}},\end{aligned}\quad (3)$$

unde  $R = |\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau)|$ ,  $\mathbf{n}$  reprezintă versorul de-a lungul direcției  $\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau)$ , iar paranteza se evaluează la  $x^{\alpha'} = [t', \mathbf{r}(t')]$ , unde timpul retardat  $t'$  satisface:

$$t - t' = \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|. \quad (4)$$

- Câmpurile electric  $\mathbf{E}$  și magnetic  $\mathbf{B}$  pot fi determinate folosind:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (5)$$

## VI.4.2. Câmpurile de viteză și de accelerație

- Utilizând relațiile:

$$\begin{aligned} dt' &= \frac{dt - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{dx}}{c}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}}, & d\boldsymbol{\beta} &= \dot{\boldsymbol{\beta}} \frac{dt - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{dx}}{c}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}}, \\ dR &= \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{dx} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})cdt}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}}, \\ d\mathbf{n} &= \frac{\mathbf{dx}}{R} - \frac{\boldsymbol{\beta}(c dt - \mathbf{n} \cdot \mathbf{dx})}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{dx} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} c dt)}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}, \end{aligned} \quad (6)$$

se poate obține câmpul electric  $\mathbf{E}$  al sarcinii în mișcare:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} \right]_{\text{ret}} \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{\text{ret}}, \end{aligned} \quad (7)$$

în timp ce  $\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n}_{\text{ret}} \times \mathbf{E}$ .

- **Câmpul de viteză** nu depinde de accelerație și are comportament de câmp static (merge către 0 precum  $R^{-2}$ ).
- **Câmpul de accelerație** este direct proporțional cu  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  și are comportament de câmp de radiație (merge către 0 precum  $R^{-1}$ ).

## VI.4.3. Puterea radiată

- Studiul radiației emise se face pornind de la proiecția vectorului Poynting pe direcția radială  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_{\text{ret}} = \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \left\{ \frac{1}{R^2} \left| \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right|^2 \right\}_{\text{ret}} + O(R^{-3}). \quad (8)$$

- În cazul nerelativist, avem:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_{\text{ret}} = \frac{q^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \Theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c R^2} + O(R^{-3}), \quad (9)$$

unde  $\Theta$  reprezintă unghiul dintre  $\mathbf{n}$  și  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ .

- În cazul relativist, puterea radiată la timpul retardat  $t'$  (4) este:

$$\begin{aligned} \frac{dP(t')}{d\Omega} &= R^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt'} = R^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} + O(R^{-1}), \end{aligned} \quad (10)$$

unde  $dP(t')/d\Omega$  reprezintă energia radiată pe unghi solid, per unitate de timp retardat (timp al particulei pe propria traiectorie).

## VI.4.4. Radiația Larmor.

- ▶ Dacă viteza sarcinii e nerelativistă, la distanțe mari de sarcină  $\mathbf{E}$  se reduce la:

$$\mathbf{E}_a \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R} \right]_{\text{ret}}. \quad (11)$$

- ▶ Vectorul Poynting  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E}_a^2 \mathbf{n}$  se poate folosi pentru scrierea puterii radiate:

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 = \frac{q^2 |\dot{\mathbf{v}}|^2 \sin^2 \Theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3}, \quad (12)$$

unde  $\Theta$  reprezintă unghiul dintre viteza particulei  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  și  $\mathbf{n}$ .

- ▶ Puterea totală radiată se poate calcula integrând după  $d\Omega$ :

$$P_{\text{Larmor}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2. \quad (13)$$

- ▶ Formula (13) se poate generaliza la cazul relativist:

$$P_{\text{Larmor,rel}} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \left( \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} \right) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c} \gamma^6 [\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2]. \quad (14)$$

## VI.4.5. Radiația particulei accelerată liniar.

- ▶ Pentru sarcina accelerată pe direcția de deplasare,  $\beta \times \dot{\beta} = 0$  și ec. (10) devine:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \Theta}{(1 - \beta \cos \Theta)^5}. \quad (15)$$

- ▶ Expresia de mai sus se reduce la  $P_{\text{Larmor}}$  (13) când  $\beta \rightarrow 0$ .
- ▶ Unghiul sub care puterea radiată este maximă este:

$$\theta_{\max} = \arccos \left[ \frac{1}{3\beta} (\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1) \right] \rightarrow \frac{1}{2\gamma}. \quad (16)$$

- ▶ În cazul ultrarelativist, emisia de radiație se face preponderent pe direcția înainte.
- ▶ Chiar și pentru  $\beta = 0.5$  ( $E \sim 80 \text{ keV}$ ),  $\theta_{\max} \simeq 38,2^\circ$ .



- Puterea totală se poate găsi integrând ec. (15) sau din ec. (14):

$$P_{\text{Larmor,lin}} = \frac{q^2 \dot{\beta}^2 \gamma^6}{6\pi\epsilon_0 c} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2, \quad (17)$$

unde s-a ținut cont că  $dp/dt = mc\gamma^3 \dot{\beta}$ .

- E convenabilă exprimarea puterii radiate în funcție de puterea necesară accelerării particulei:

$$\frac{P}{dE/dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^4 \beta} \frac{dE}{dx}. \quad (18)$$

- Pentru electron,  $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$  iar  $q^2/4\pi\epsilon_0 mc^2 = 2,82 \times 10^{-15} \text{ m}$ .
- $P$  devine semnificativ când  $dE/dx \sim 2 \times 10^{14} \text{ MeV/m}$ .
- Deoarece  $P$  nu depinde de  $\gamma$ , accelerarea liniară este foarte eficientă.

## VI.4.6. Radiația de sincrotron.

- ▶ O particula relativistă se deplasează într-un câmp magnetic  $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ , cu  $B > 0$  constant.
- ▶ Legea a doua a lui Newton pentru particula relativistă este:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (19)$$

unde  $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$  iar  $\mathbf{E} = 0$  în cazul de față.

- ▶ Înmulțind ec. (19) scalar cu  $\mathbf{v}$  rezultă:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d(m\gamma\mathbf{v})}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{\beta} = \dot{\gamma} = 0.$$

- ▶ Soluția este

$$v_x = -v_{\perp} \sin \omega_s t, \quad v_y = \mp v_{\perp} \cos \omega_s t, \quad \omega_s = \frac{|q|B}{m\gamma}. \quad (20)$$

unde  $\omega_s$  este viteza unghiulară de sincrotron, iar semnul lui  $v_y$  este  $- (+)$  când  $q > 0$  ( $q < 0$ ).

- ▶ Radiația de sincrotron se referă la radiația emisă de o sarcină în mișcare relativistă pe orbită circulară.
- ▶ Deoarece în mișcarea circulară  $d\gamma/d\tau = 0$ , ec. (10) devine:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{|\dot{\beta}|^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[ 1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right], \quad (21)$$

unde sistemul de coordonate a fost ales cu axa  $z$  de-a lungul lui  $\beta$ , respectiv cu axa  $x$  de-a lungul lui  $\dot{\beta}$ , în timp ce  $\theta$  și  $\phi$  reprezintă coordonatele sferice ale direcției de observare  $\mathbf{n}$ .

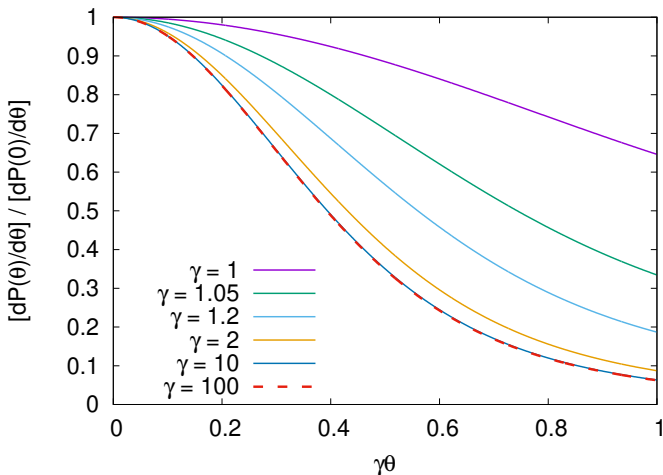
- ▶ Factorii  $(1 - \beta \cos \theta)$  de la numitor produc aceeași îngustare a conului în care se emite radiația ca și în cazul accelerației liniare.
- ▶ Puterea radiată se obține integrând ec. (21), sau direct din formula Larmor (14):

$$P_{\text{Larmor,sinc}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c} |\dot{\beta}|^2 \gamma^4 = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \gamma^2 \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2. \quad (22)$$

- ▶ Energia totală pierdută pe parcursul unei perioade este:

$$\delta E = \frac{2\pi}{\omega_s} P = \frac{q^2}{3\epsilon_0 R} \beta^3 \gamma^4. \quad (23)$$

- ▶ În cazul electronilor ultrarelativiști,  $\delta E \simeq 8,85 \times 10^{-2} \frac{[E(\text{GeV})]^4}{R(\text{m})}$ .



Distribuția unghiulară a puterii emise prin radiație de sincrotron, integrată după unghiul  $\phi$ , este:

$$\frac{dP(\theta)}{d(\cos \theta)} = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{dP(0)}{d(\cos \theta)} \left( \frac{1 - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \right)^3 \left[ 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2\gamma^2(1 - \beta \cos \theta)^2} \right].$$

## VI.6.7. Spectrul Radiației de sincrotron.

- Pentru studiul spectrului radiației emise de o particulă accelerată, pornim de la energia totală care ajunge la detector:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP(t)}{d\Omega} dt, \quad (24)$$

unde  $dP(t)/d\Omega$  este puterea radiată în elementul de unghi solid  $\Omega$  centrat pe direcția  $\mathbf{n}$  dinspre particulă  $\mathbf{r}(t')$  spre detector  $\mathbf{x}$ .

- Având în vedere că

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \varepsilon_0 c R_d^2 |\mathbf{E}(t)|^2, \quad (25)$$

unde  $R_d$  este distanța de la originea sistemului de coordonate la detector, se poate introduce transformata Fourier a intensității electrice:

$$\mathbf{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \mathbf{E}_{\omega}, \quad \mathbf{E}_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \mathbf{E}(t), \quad (26)$$

cu  $\mathbf{E}_{\omega}^* = \mathbf{E}_{-\omega}$  fiindcă  $\mathbf{E}(t)$  este real, astfel încât:

$$\frac{dW}{d\Omega} = 2\pi\varepsilon_0 c R_d^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\mathbf{E}_{\omega}|^2 = 4\pi\varepsilon_0 c R_d^2 \int_0^{\infty} d\omega |\mathbf{E}_{\omega}|^2 \quad (27)$$

## VI.4.8. Intensitatea radiației

- Fie  $I \equiv I_\omega(\theta, \varphi)$  dată prin

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^\infty \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} d\omega, \quad \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = 4\pi\epsilon_0 c R_d^2 |\mathbf{E}_\omega|^2. \quad (28)$$

- Pentru sarcina accelerată,  $\mathbf{E}(t)$  se poate aproxima cu câmpul de accelerație din ec. (7), astfel încât:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c} \int_{-\infty}^\infty dt e^{i\omega t} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R_d} \right]_{\text{ret}}. \quad (29)$$

- Schimbând variabila de integrare de la  $t$  la timpul retardat  $t'$  (4), rezultă:

$$R_d \mathbf{E}_\omega = \frac{q e^{i\omega R_d/c}}{8\pi^2\epsilon_0 c} \int_{-\infty}^\infty dt e^{i(\omega t - \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}(t))} \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2}, \quad (30)$$

unde  $\mathbf{k}_d = \omega \mathbf{n}_d / c$  și s-a folosit aproximația

$t = t' + \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')| \simeq t' + \frac{R_d}{c} - \frac{1}{c} \mathbf{n}_d \cdot \mathbf{r}(t') + \dots$ , unde  $\mathbf{n}_d = \mathbf{x}_d / R_d$  reprezintă direcția pe care se află detectorul.

- Ținând cont că:

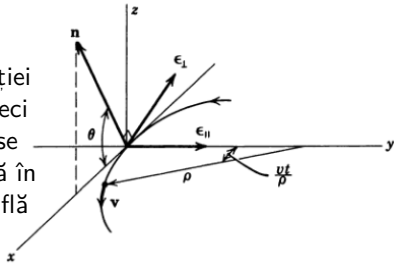
$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \right] = \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2}, \quad (31)$$

se poate efectua integrarea prin părți în ec. (30):

$$R_d \mathbf{E}_\omega = \frac{-i\omega q e^{i\omega R_d/c}}{8\pi^2 \varepsilon_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega[t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c]} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}). \quad (32)$$

- Pentru evaluarea spectrului radiației de sincrotron, trebuie făcute următoarele precizări.
- Deși sarcina descrie o mișcare circulară cu  $\omega_s$ , spectrul radiației emise e mult mai bogat, conținând multe dintre armonicile superioare.
- Pentru  $\gamma \gtrsim 10$ , radiația este emisă preponderent într-un con cu unghiul la vârf  $\Delta\Theta \simeq 2\gamma^{-1}$ , într-o fereastră temporală  $\Delta\Theta/\omega_s \simeq 2/\gamma\omega_s$ .
- Fereastră temporală de recepție a radiației este îngustată deoarece radiația emisă la intrarea sursei în con parcurge o distanță mai lungă decât cea emisă la ieșire, astfel că durată efectivă de timp în care este receptat pulsul este  $\Delta\tau \simeq \frac{2}{\gamma\omega_s}(\beta^{-1} - 1) \simeq 1/\gamma^3\omega_s$ .

- Pentru studiul spectrului radiației de sincrotron receptate, este deci suficientă analiza radiației emise de sarcină pe o scurtă perioadă în jurul punctului unde sursa se află în conul de emisie al acesteia.



- Introducem sistemul de coordonate din figură, astfel încât traiectoria particulei și vectorul de poziție al detectorului  $\mathbf{x}_d = \mathbf{n}_d R_d$  sunt:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\beta c}{\omega_s} [\mathbf{i} \sin \omega_s t + \mathbf{j}(1 - \cos \omega_s t)], \quad \mathbf{n}_d = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{k} \sin \theta. \quad (33)$$

- Considerând că detectorul este aproape coplanar cu traiectoria particulei ( $\theta \ll 1$ ) și că  $\omega_s t \ll 1$ , rezultă:

$$t - \frac{1}{c} \mathbf{n}_d \cdot \mathbf{r}(t) \simeq \frac{t}{2} \left( \gamma^{-2} + \theta^2 + \frac{1}{3} \omega_s^2 t^2 \right) + \dots, \quad (34)$$

unde s-a considerat cazul ultrarelativist  $\beta \simeq 1$ .



- Ținând cont că:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta) = \beta(-\mathbf{e}_{||} \sin \omega_s t + \mathbf{e}_{\perp} \sin \theta \cos \omega_s t), \quad (35)$$

unde  $\mathbf{e}_{||} = \mathbf{j}$  și  $\mathbf{e}_{\perp} = \mathbf{n} \times \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{E}_{\omega}$  poate fi descompus după cum urmează:

$$\mathbf{E}_{\omega} = \mathbf{e}_{||} E_{\omega,||} + \mathbf{e}_{\perp} E_{\omega,\perp}, \quad (36)$$

unde

$$\begin{aligned} \left( \frac{E_{\omega,||} R_d}{E_{\omega,\perp} R_d} \right) &= \frac{-i\omega q e^{i\omega R_d/c}}{8\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{\omega}{\omega_s} \sqrt{1 + \gamma^2 \theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{3i\xi}{2} x(1+x^2/3)} \\ &\quad \times \left( x \gamma^{-1} \sqrt{1 + \gamma^2 \theta^2} \right), \quad (37) \end{aligned}$$

- Mai sus s-au introdus notațiile:

$$x = \frac{\gamma \omega_s t}{\sqrt{1 + \gamma^2 \theta^2}}, \quad \xi = \frac{\omega}{3\omega_s} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{3/2}. \quad (38)$$

- Folosind formulele:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx \, x \sin \left[ \frac{3}{2} \xi \left( x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] &= \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\xi), \\ \int_0^\infty dx \, \cos \left[ \frac{3}{2} \xi \left( x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] &= \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(\xi),\end{aligned}\quad (39)$$

unde  $K_\nu(z)$  este funcția Bessel modificată de speța a doua (a treia), rezultă:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} &= 4\pi\epsilon_0 c \left( |\mathbf{E}_{\omega,||} R_d|^2 + |\mathbf{E}_{\omega,\perp} R_d|^2 \right) \\ &= \frac{q^2}{12\pi^3\epsilon_0 c} \frac{\omega^2}{\gamma^4\omega_s^2} (1 + \gamma^2\theta^2)^2 \left[ K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\gamma^2\theta^2}{1 + \gamma^2\theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right].\end{aligned}\quad (40)$$

- La valori mici ale lui  $\xi$ , funcțiile Bessel modificate au următorul comportament:

$$K_\nu(z) \simeq \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left( \frac{z}{2} \right)^{-\nu}, \quad (41)$$

în timp ce la valori mari ale lui  $\xi$  avem:

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} [1 + O(z^{-2})]. \quad (42)$$

- Datorită comportamentului asimptotic (42), la  $\xi$  mare  $d^2I/d\omega d\Omega$  scade exponențial când  $\omega \simeq \omega_m$ , unde viteza unghiulară critică  $\omega_m$  este dată de condiția  $2\xi = 1$  pentru  $\theta = 0$ :

$$\omega_m = \frac{3}{2}\omega_s\gamma^3. \quad (43)$$

- La  $\xi$  mare și  $\theta = 0$ , ec. (40) devine:

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} \simeq \frac{3r_e mc}{4\pi} \frac{\gamma^2\omega}{\omega_m} e^{-\omega/\omega_m} \simeq 1,8 \times 10^{-37} \frac{\gamma^2\omega}{\omega_m} e^{-\omega/\omega_m} [\text{J} \cdot \text{s}], \quad (44)$$

unde  $r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2 \simeq 2,82 \times 10^{-15} \text{ m}$  este raza clasică a electronului.

- Pentru  $\xi \ll 1$  avem:

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} \simeq mcr_e \left( \frac{\Gamma(2/3)}{\pi} \right)^2 \left( \frac{3\omega}{4\omega_s} \right)^{2/3} \simeq 1,3 \times 10^{-37} \left( \frac{\omega}{\omega_s} \right)^{2/3} [\text{J} \cdot \text{s}]. \quad (45)$$

- Având în vedere că  $\xi = \frac{\omega}{2\omega_m}(1 + \gamma^2\theta^2)^{3/2}$ , condiția  $\xi \simeq 1$  pentru  $\omega \ll \omega_m$  este atinsă pentru valori ale lui  $\theta$  semnificativ mai mari decât la  $\omega \simeq \omega_m$ : drept urmare, radiația cu  $\omega$  mai mică este emisă sub un unghi mai mare.

- ▶ În cazul când radiația de sincrotron este emisă de un număr mare de electroni, spectrul devine influențat de funcția de distribuție a electronilor.
- ▶ Observațiile arată că razele cosmice sunt distribuite după o putere a energiei lor:

$$n(r, \mathcal{E}) \simeq n(r) \mathcal{E}^{-\gamma_s}, \quad (46)$$

unde  $r$  reprezintă distanța pe direcția de observație de la Pământ până la sursă.

- ▶ Presupunem că fiecare electron emite toată puterea radiată prin radiația de sincrotron pe frecvență critică  $\omega_m = \frac{3eB}{2m^3c^4} \mathcal{E}^2$ , adică  $P(\nu, \mathcal{E}) = P_{\text{Larmor, sinc}} \delta(2\pi\nu - \omega_m)$ .
- ▶ Energia totală detectată pe frecvența  $\nu$  este:

$$I_\nu d\nu = \int_0^R dr \int_0^{\mathcal{E}_{\max}} d\mathcal{E} n(\mathcal{E}, r) P(\nu, \mathcal{E}) d\nu \sim \nu^{-\alpha}, \quad (47)$$

unde indicele spectral are valoarea

$$\alpha = (\gamma_s - 1)/2. \quad (48)$$

- ▶ În galaxia noastră, se observă un spectru al razelor cosmice electronice corespunzând  $\gamma_s \sim 2,6$ . Observațiile în domeniul radio indică un spectru galactic având indicele spectral  $\alpha \sim 0,8$ , confirmând relația (48).