Complements of Theoretical Physics
Lecture 13

Victor E. Ambruș

West University of Timișoara

Table of contents

Chapter VI. Electrodinamică relativistă

VI.3. Radiația emisă de distribuții localizate de sarcini

VI.3.1. Potențialul retardat

- Studiul radiației emise de sarcini în mișcare se face folosind *potențialele retardate*.
- Pornind de la ec. Maxwell, $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$, se poate introduce potențialul $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$, a.î. $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ și

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{1}$$

- Impunând condiția Lorenz $\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t \phi + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, rezultă:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 A^\mu - \nabla^2 A^\mu = \mu_0 j^\mu, \tag{2}$$

  unde $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j})$ reprezintă curentul de sarcină.
- Soluția acestei ecuații se poate scrie sub forma:

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \int dt' \frac{j^\mu(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\delta\left(t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right), \tag{3}$$

  de unde se deduce că A^μ într-un punct $\mathbf{x}$ la un moment t este determinat de distribuția de sarcini și curenți la un moment de timp $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ anterior.

VI.3.2. Soluția în frecvențe.

- Să considerăm transformata Fourier a densității de curent, precum și a potențialului:

$$\begin{pmatrix} j^\mu(\mathbf{x},t) \\ A^\mu(\mathbf{x},t) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} j^\mu_\omega(\mathbf{x}) \\ A^\mu_\omega(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

- Ecuația de continuitate $\partial_\mu j^\mu = 0$ și condiția Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ implică:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_\omega = i\omega\rho_\omega, \qquad \nabla \cdot \mathbf{A}_\omega = \frac{ik}{c}\phi_\omega, \qquad k = \frac{\omega}{c}. \tag{5}$$

- Integrala după t' din ec. (3) se poate efectua:

$$A^\mu_\omega(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \frac{j^\mu_\omega(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{6}$$

- Folosind ec. (1), rezultă:

$$\mathbf{B}_\omega = \nabla \times \mathbf{A}_\omega, \qquad \mathbf{E}_\omega = -\nabla\phi_\omega + i\omega\mathbf{A}_\omega. \tag{7}$$

VI.3.3. Câmpul la distanțe mari

- Să considerăm o distribuție de sarcină localizată într-un domeniu de dimensiune d redusă comparativ cu lungimea de undă $\lambda = 2\pi/k$ a radiației emise ($kd \ll 1$).
- În cazul când observatorul se află departe de sursă ($r/d \gg 1$), se pot efectua următoarele aproximații ($\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$):

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r - \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}' + O(r^{-1}), \qquad e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = e^{ikr}(1 - ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}' + \dots),$$
$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'}{r} + O(r^{-2})\right]. \tag{8}$$

- Rezultă pentru A^μ_ω:

$$A^\mu_\omega(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r}\int d^3x'\, j^\mu_\omega(\mathbf{x}')\left[1 - ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) + \dots\right]. \tag{9}$$

VI.3.4. Potențialul electric.

- Potențialul electric $\phi_\omega = A^0_\omega c$ poate fi exprimată în funcție de sarcina totală Q_ω și momentul de dipol electric $\mathbf{d}_\omega$

$$Q_\omega = \int d^3x'\, \rho_\omega(\mathbf{x}'), \qquad \mathbf{d}_\omega = \int d^3x'\, \rho_\omega(\mathbf{x}')\mathbf{x}'. \tag{10}$$

- Dezvoltarea lui ϕ_ω rezultă imediat:

$$\phi_\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{ikr} \left[Q_\omega + \left(-\frac{i\omega}{c} + \frac{1}{r} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_\omega + \dots \right]. \tag{11}$$

- Substituind relația de mai sus în ec. (4) și înlocuind $-i\omega \to \partial_t$, rezultă:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{d}}(t')}{4\pi\varepsilon_0 rc} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}(t')}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \dots, \tag{12}$$

unde $t' = t - r/c$ iar $\dot{\mathbf{d}}(t') = \partial_t \mathbf{d}(t') = \partial_{t'} \mathbf{d}(t')$.

- Din moment ce sarcina totală se conservă, Q nu depinde de timp, astfel că momentul de monopol al lui ϕ e constant.
- Primul termen corespunde câmpului Coulombian generat de o sarcină Q plasată în origine, în timp ce cel de-al doilea termen induce **câmpul de radiație**.

VI.3.5. Potențialul vector.

- Pentru a exprima pe $\mathbf{A}_\omega$, se utilizează următorul truc:

$$\int d^3x \, (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a})\mathbf{x} = -\int d^3x \, \mathbf{a}.$$

- Aplicând trucul de mai sus pentru $\mathbf{a} = \mathbf{j}_\omega$, respectiv pentru $\mathbf{a} = \mathbf{j}_\omega(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$, rezultă:

$$\int d^3x' \, \mathbf{j}_\omega(\mathbf{x}') = -i\omega \int d^3x' \rho_\omega(\mathbf{x}') \, \mathbf{x}',$$

$$\int d^3x' [\mathbf{j}_\omega(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\omega)\mathbf{x}'] = -i\omega \int d^3x' \, \rho_\omega(\mathbf{x}')(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \, \mathbf{x}'.$$

- Rezultatul poate fi exprimat în funcție de momentul dipolar magnetic $\mathbf{m}_\omega$, respectiv momentul de cuadrupol electric $Q_{ij;\omega}$ și integrala I^2_ω,

$$\mathbf{m}_\omega = \frac{1}{2} \int d^3x' \, [\mathbf{x}' \times \mathbf{j}_\omega(\mathbf{x}')],$$

$$Q_{ij;\omega} = \int d^3x' \, \rho_\omega(\mathbf{x}')(3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}),$$

$$I^2_\omega = \int d^3x' \, \rho_\omega(\mathbf{x}')\mathbf{x}'^2. \qquad (13)$$

- Forma integrală a lui $\mathbf{A}_\omega(\mathbf{x})$ este

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3x' \, \mathbf{j}_\omega(\mathbf{x}') \left[1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' \left(\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r} \right) + \dots \right]. \quad (14)$$

- Ținând cont că $\mathbf{n} \times \mathbf{m}_\omega = \frac{1}{2} \int d^3x' \left[\mathbf{x}'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\omega) - \mathbf{j}_\omega(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{n}) \right]$, rezultă

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \left\{ -i\omega \mathbf{d}_\omega + \left(\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r} \right) \mathbf{n} \times \mathbf{m}_\omega \right.$$
$$\left. + \frac{i\omega}{6} \left(\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r} \right) \left[\mathbf{Q}_\omega(\mathbf{n}) + I_\omega^2 \mathbf{n} \right] + \dots \right\}, \quad (15)$$

unde $[\mathbf{Q}_\omega(\mathbf{n})]_i = Q_{\omega;ij} n_j$.

- Substituind relația de mai sus în ec. (4) rezultă:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\dot{\mathbf{d}} + \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c} \ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{n}) + \frac{1}{6c} \ddot{I}^2 \mathbf{n} + O(r^{-1}) \right]. \quad (16)$$

VI.3.6. Câmpul de radiație.

- Spre deosebire de câmpul Coulombian, pentru care $\mathbf{E} \sim r^{-2}$, câmpul de radiație $\sim r^{-1}$.
- Utilizând relațiile:

$$\nabla r = \mathbf{n}, \quad \nabla t' = -\frac{\mathbf{n}}{c}, \quad \partial_i n_j = \frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{r}, \quad \nabla \times \dot{\mathbf{d}}(t') = -\frac{\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}}{c},$$
$$\nabla \times (\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}})}{c} + \frac{\dot{\mathbf{m}} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{m}})}{r}, \quad \nabla \times \mathbf{n} = 0,$$
$$\nabla \times \ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{n}) = -\frac{\mathbf{n}}{c} \times \dddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{n}) - \frac{\mathbf{n}}{r} \times \ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{n}), \tag{17}$$

se poate obține:

$$\mathbf{H} = -\frac{\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}}{4\pi rc} + \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}})}{4\pi rc^2} - \frac{\mathbf{n} \times \dddot{\mathbf{Q}}}{24\pi rc^2} + O(r^{-2}). \tag{18}$$

- În expresia de mai sus, termenul de dipol electric este dominant.
- Se vede că direcția de propagare a undei este $\mathbf{n}$.

VI.3.7. Radiația de dipol.

- Ținând cont că $\mathbf{E} = \mu_0 c \mathbf{H} \times \mathbf{n}$ și $\mathbf{H} = \varepsilon_0 c \mathbf{n} \times \mathbf{E}$ pentru unda electromagnetică, vectorul Poynting are expresia:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mu_0 c \mathbf{H}^2 \mathbf{n} = \varepsilon_0 c \mathbf{E}^2 \mathbf{n} = uc\mathbf{n}. \tag{19}$$

- Intensitatea radiată sub unghiul solid $d\Omega$ este

$$dI(\Omega) = r^2 |\mathbf{S}| d\Omega. \tag{20}$$

- Puterea totală radiată se obține după cum urmează:

$$P = \oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Sigma} = \int d\Omega\, r^2 S = \int d\Omega \frac{dI}{d\Omega}. \tag{21}$$

- Pentru cazul când $\ddot{\mathbf{d}} \neq 0$, termenul dominant în ec. (18) este cel de dipol, a.î.

$$\mathbf{S} = \frac{|\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}|^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 r^2 c^3} \mathbf{n}. \tag{22}$$

- Utilizând $\int d\Omega n_i n_j = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}$, puterea totală radiată este

$$P_{\mathrm{dipol}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2. \tag{23}$$

VI.3.7. Radiația de cuadrupol.

- Dacă sistemul constă din particule cu aceeași sarcină specifică q/m,

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{q}{m}\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0, \qquad \dot{\mathbf{m}} = \frac{q}{2m}\frac{d}{dt}\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = 0, \qquad (24)$$

  unde în prima ec. pp. că asupra sistemului nu acționează forțe exterioare, iar a doua ec. reprezintă conservarea momentului cinetic.
- În acest caz, termenul dominant în **H** devine cel de cuadrupol:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{24\pi r c^2}\mathbf{n} \times \dddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{n}). \qquad (25)$$

- Puterea totală radiată poate fi obținută folosind relațiile

$$\int d\Omega n_i n_j = \frac{4\pi}{3}\delta_{ij}, \int d\Omega n_i n_j n_k n_l = \frac{4\pi}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$\Rightarrow \qquad P_{\rm cuadrupol} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\dddot{\mathbf{Q}}^2}{180 c^5}, \qquad \dddot{\mathbf{Q}}^2 = \dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij}. \qquad (26)$$

- Datorită factorului c^5 din numitor, $P_{\rm cuadrupol} \ll P_{\rm dipol}$.
- În cazul moleculei de H_2, ale cărei simetrii inhibă emisia de dipol, radiația de cuadrupol este dominantă. Fiind foarte slabă, aceasta nu a putut fi detectată decât după rafinarea detectorilor în IR, cu ajutorul cărora s-au evidențiat cantități considerabile de H_2 în spațiul interstelar.

Probleme

1. **Împrăștierea Thomson**. Fie o undă care se propagă pe direcția $\mathbf{n}_{\rm in} = \mathbf{k}/k$.
   a) Să se obțină forța electromagnetică $\mathbf{F}_L = q\mathbf{E}_{\rm in} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\rm in}$ cu care unda acționează asupra unei sarcini q.
   b) Să se arate că pt. $|\mathbf{v}| \ll c$ momentul dipolar satisface $\ddot{\mathbf{d}} = \frac{q^2}{m}\mathbf{E}_{\rm in}$.
   c) Să se calculeze vectorul Poynting corespunzător radiației de dipol emisă de sarcina q la o distanță r mare de aceasta.
   d) Arătați că secțiunea dif. ef. de împrăștiere a radiației satisface

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r^2 \frac{|\mathbf{S}_{\rm rad}|}{|\mathbf{S}_{\rm in}|} = r_{\rm cl}^2 \sin^2\gamma, \qquad (27)$$

   unde $\mathbf{S}_{\rm in} = \mathbf{E}_{\rm in} \times \mathbf{H}_{\rm in}$ este v. Poynting incident, $r_{\rm cl} = q^2/4\pi\varepsilon_0 mc^2$ iar γ e unghiul dintre $\mathbf{n}_{\rm rad}$ și $\mathbf{E}_{\rm in}$.
   e) Să se calculeze radiația emisă pe direcția de polarizare a undei ($\mathbf{n}_{\rm rad} \times \mathbf{E}_{\rm in} = 0$).
   f) Să se calculeze radiația emisă pe direcțiile perpendiculare pe polarizarea incidentă ($\mathbf{n}_{\rm rad} \cdot \mathbf{E}_{\rm in} = 0$).
   g) Considerând $\mathbf{n}_{\rm in} = \mathbf{k}$ radiația incidentă nepolarizată ($\mathbf{E}_{\rm in} = E_{\rm in}(\mathbf{i}\cos\varphi_{\rm in} + \mathbf{j}\sin\varphi_{\rm in})$), să se arate că secțiunea diferențială eficace mediată după $\varphi_{\rm in}$ este

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_{\rm cl}^2 \frac{1+\cos^2\theta}{2} d\Omega. \qquad (28)$$

Probleme

2. **Secțiunea Thomson.**
   a) Să se arate că secțiunea totală este dată de formula Thomson:
   $$\sigma_{\mathrm{Th}} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_{\mathrm{cl}}^2, \quad r_{\mathrm{cl}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}. \tag{29}$$
   b) Să se evalueze σ_e și r_e pentru cazul unui electron.
   [R: $r_{\mathrm{cl}} = 2,82\ \mathrm{fm}$; $\sigma_e \simeq 66,5\ \mathrm{fm}^2$]
   c) Sa se evalueze σ_p și r_p pentru cazul unui proton.
   [R: $r_{\mathrm{cl}} = 0,0015\ \mathrm{fm}$; $\sigma_p \simeq 19,73 \times 10^{-6}\ \mathrm{fm}^2$]
3. **Împrăștierea Rayleigh.** O undă electromagnetică se propagă pe direcția $\mathbf{n}_{\mathrm{in}} = \mathbf{k}$, excitând un electron legat care efectuează oscilații cu frecvența naturală ω_0.
   a) Să se găsească $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$ rezolvând ecuația $\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_{\mathrm{in}}$.
   b) Să se arate că secțiunea diferențială eficace satisface
   $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(d\sigma/d\Omega)_{\mathrm{Th}}}{(1-\omega_0^2/\omega^2)^2}, \tag{30}$$
   unde $(d\sigma/d\Omega)_{\mathrm{Th}}$ e dată în ec. (27).
   c) Să se arate că pentru frecvențe mari, σ se reduce la σ_{Th}.
   d) Să se arate că pentru $\omega \ll \omega_0$, $\sigma \to \sigma_{\mathrm{Ra}} = \sigma_{\mathrm{Th}} \omega^4/\omega_0^4$.
   e) Folosind $\lambda_{\text{roșu}} \simeq 750\ \mathrm{nm}$ și $\lambda_{\text{albastru}} \simeq 450\ \mathrm{nm}$, să se estimeze $\sigma_{\mathrm{Ra}}(\text{albastru})/\sigma_{\mathrm{Ra}}(\text{roșu})$.

Probleme

4. O sarcină electrică q se mișcă pe o traiectorie circulară de rază R cu viteza unghiulară ω_0.
   a) Să se exprime $\rho(\mathbf{x}, t)$.
   b) Să se calculeze $\mathbf{d}(t) = \int d^3x\, \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{x}$.
   c) Să se calculeze P_{dipol}.
   d) Să se calculeze $Q_{ij}(t) = \int d^3x\, \rho(\mathbf{x}, t)(3x_i x_j - \mathbf{x}^2\delta_{ij})$.
   e) Să se calculeze $P_{\text{cuadrupol}}$.
   f) Să se calculeze viteza de rotație $\omega_0 R$ pentru care $P_{\text{cuadrupol}} = P_{\text{dipol}}$.
5. Un pătrat de latură a are sarcinile $\pm q$ dispuse alternativ în colțurile sale. Pătratul se rotește în jurul axei de simetrie (ce trece prin centrul său, perpendicular pe planul pătratului) cu viteza constantă ω_0.
   a) Să se arate că $\mathbf{d}(t) = 0$.
   b) Să se calculeze $Q_{ij}(t)$.
   c) Să se calculeze câmpul de radiație $\mathbf{H}$.
   d) Să se exprime $dI/d\Omega$ ca funcție de direcția de observație $\mathbf{n}$.
   e) Să se calculeze $P_{\text{cuadrupol}}$.