Complements of Theoretical Physics
Lecture 12

Victor E. Ambruș

West University of Timișoara

Table of contents

IV.2. Propagarea radiației electromagnetice

IV.2.1. Ecuațiile Maxwell

- Ecuațiile Maxwell sunt:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{1}$$

- Ec. Maxwell trebuie suplimentate cu următoarele ecuații auxiliare:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \qquad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \qquad \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

- În cazul absenței purtătorilor de sarcină liberi ($\rho = 0$), rezultă ecuația de undă:

$$\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0. \tag{2}$$

- Conductivitatea σ depinde de relația dintre $\lambda_{\rm rad}$ și drumul liber mijlociu al purtătorilor de sarcină.
- În timp ce la ν mari, $\sigma \simeq 0$, în domeniul radio, propagarea e.m. prin ionosfera terestră e puternic atenuată.
- Radiația cu λ suficient de mare e absorbită de mediul interstelar.

IV.2.2. Vectorul Poynting

- Ecuațiile Maxwell pot fi rearanjate pentru a obține:

$$\partial_t u = -\sigma \mathbf{E}^2 - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S},$$

- unde densitatea de energie u a câmpului e.m. și **vectorul Poynting S** au expresia:

$$u = \frac{1}{2}(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2), \qquad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \tag{3}$$

- Aplicând teorema Gauss-Ostrogradski rezultă:

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = -\int_V \sigma \mathbf{E}^2 dV - \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}. \tag{4}$$

- Primul termen din dreapta reprezintă energia cinetică transmisă către sarcinile din mediu.
- Al doilea termen corespunde fluxului de energie e.m. radiată prin suprafața volumului V.
- Rezultă că **S** reprezintă densitatea de flux de energie e.m.
- Densității de energie îi corespunde *presiunea izotropă*

$$P = \frac{1}{6}(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2). \tag{5}$$

IV.2.3. Propagarea undelor electromagnetice prin vid

- Fie o *undă plană* ce se propagă de-a lungul direcției $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}[\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}], \quad \mathbf{H} = \mathrm{Re}[\mathbf{H}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}], \tag{6}$$

  unde $\mathbf{E}_0$ și $\mathbf{H}_0$ sunt vectori constanți.
- Din ecuațiile Maxwell în absența sarcinilor și a curenților rezultă:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} &= 0 & &\Rightarrow & \mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0 &= 0, & &\text{(7a)}\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} &= 0 & &\Rightarrow & \mathbf{k}\cdot\mathbf{H}_0 &= 0, & &\text{(7b)}\\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} &= -\partial_t\mathbf{B} & &\Rightarrow & \mathbf{k}\times\mathbf{E}_0 &= \mu\omega\mathbf{H}_0, & &\text{(7c)}\\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} &= \partial_t\mathbf{D} & &\Rightarrow & \mathbf{k}\times\mathbf{H}_0 &= -\varepsilon\omega\mathbf{E}_0. & &\text{(7d)}
\end{aligned}$$

- Înlocuind (7c) în (7d) și folosind (7b), rezultă relația de dispersie:

$$\omega^2 - \frac{\mathbf{k}^2}{\varepsilon\mu} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v = \lambda\nu = \omega|\mathbf{k}| = \frac{c}{n}, \tag{8}$$

  unde $\nu = \omega/2\pi$, $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ și $n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$.
- Vectorul Poynting $\mathbf{S} = \overline{\mathbf{S}} + \delta\mathbf{S}$ are componentele

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*), \quad \delta\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 e^{-2i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}), \tag{9}$$

  unde $\langle\delta\mathbf{S}\rangle = 0$, astfel încât $\langle\mathbf{S}\rangle = \overline{\mathbf{S}}$.

IV.2.4. Polarizarea undelor plane.

- Deoarece $\mathbf{E}$ și $\mathbf{H}$ sunt $\perp$ $\mathbf{n} \equiv \mathbf{k}/k$, undele e.m. se numesc *unde transversale*.
- Alegând $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$, polarizarea liniară este caracterizată de vectori $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ reali:

$$\mathbf{E}_0 = E_0(\mathbf{e}_x \cos\varphi + \mathbf{e}_y \sin\varphi),$$
$$\mathbf{H}_0 = H_0(-\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y \cos\varphi),$$

  unde φ descrie înclinația față de axa x iar $H_0 = \varepsilon v E_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0$.
- Polarizărilor circulare stângi (helicitate pozitivă, $+$) și drepte (helicitate negativă, $-$) le corespund amplitudinile complexe:

$$\mathbf{E}_{0;\pm} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y), \qquad \mathbf{H}_{0;\pm} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}(\mp i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y). \tag{10}$$

- Variația în timp și spațiu a câmpurilor $\mathbf{E}_\pm$ și $\mathbf{H}_\pm$ este:

$$\mathbf{E}_\pm = \frac{E_0}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_x \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \pm \mathbf{e}_y \sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})],$$
$$\mathbf{H}_\pm = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{E_0}{\sqrt{2}}[\mp\mathbf{e}_x \sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]. \tag{11}$$

IV.2.5. Propagarea undelor e.m. prin plasme rarefiate.

- La trecerea unei unde plane de pulsație ω printr-o plasmă rarefiată, purtătorii de sarcină sunt accelerați de către câmpul electric:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \mathbf{r} = -\frac{q}{m\omega^2}\mathbf{E}. \tag{12}$$

- Datorită masei lor, ionii rămân practic imobili, în timp ce dislocuirea e^- produce un câmp de polarizare $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = nq\mathbf{r} = -\frac{ne^2}{m\omega^2}\mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\mathbf{E}, \tag{13}$$

unde n e densitatea electronilor.

- Rezultă că $\varepsilon = \varepsilon_0 - ne^2/m\omega^2$, ceea ce duce la relația de dispersie:

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{k}^2}{\varepsilon\mu} = \frac{k^2}{\mu(\varepsilon_0 - ne^2/m\omega^2)}. \tag{14}$$

- Considerând $\mu \simeq \mu_0$, rezultă:

$$\omega^2 = k^2c^2 + \omega_p^2, \qquad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}} \sim 56\, n^{1/2}(\mathrm{rad/s}), \tag{15}$$

unde n este măsurat în m^{-3}, $\omega_p \equiv \sqrt{k_BT/mL^2}$ poartă numele de *frecvența plasmei* iar L este *lungimea Debye*.

- Pentru $\omega < \omega_p$, k devine imaginar iar unda se atenuează exponențial.
- În ionosfera terestră, $n \simeq 10^5\,\mathrm{cm}^{-3}$ și $\nu_p \sim 2,82\ \mathrm{MHz} \Rightarrow$ penetrarea atmosferei de către undele radio cosmice este blocată.
- **Viteza de fază** este

$$v = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2}}, \tag{16}$$

fiind supraluminală când $k^2 > 0$ și $\omega > \omega_p$.
- **Viteza de grup** nu depășește c:

$$U \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \omega_p^2/k^2 c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \omega_p^2/(\omega^2 - \omega_p^2)}}. \tag{17}$$

IV.2.6. Rotația Faraday.

- O undă e.m. polarizată circular ($\mathbf{E}_\pm$) se propagă de-a lungul unui câmp magnetic de inducție $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_3$ ($\mathbf{k} = k\mathbf{e}_3$, $B_0 > 0$).
- Asupra unui electron care se deplasează perpendicular pe $\mathbf{B}_0$ va acționa forța electromagnetică $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B})$.
- Presupunem că $\mathbf{B} \ll \mathbf{B}_0$ și $v \ll c \Rightarrow \mathbf{F} \simeq q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)$.
- Sub acțiunea undei e.m., e^- efectuează o mișcare oscilatorie forțată.
- Exprimând $\mathbf{r}_\pm = \mathrm{Re}(\mathbf{r}_{0;\pm} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})})$, rezultă

$$-m\omega^2 \mathbf{r}_{0;\pm} = q\mathbf{E}_{0;\pm} - qi\omega \mathbf{r}_{0;\pm} \times \mathbf{B}_0. \tag{18}$$

- Ținând cont că $\mathbf{E}_{0;\pm} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)$ și $q = -e$, rezultă ecuațiile:

$$\begin{cases} r_{0x}^\pm = \dfrac{eE_0^\pm}{m\omega^2\sqrt{2}} - \dfrac{i\omega_c}{\omega} r_{0y}^\pm, \\ r_{0y}^\pm = \pm \dfrac{ieE_0^\pm}{m\omega^2\sqrt{2}} + \dfrac{i\omega_c}{\omega} r_{0x}^\pm \end{cases} \Rightarrow \mathbf{r}_\pm = \frac{e}{m\omega(\omega \mp \omega_c)} \mathbf{E}_{0;\pm}, \tag{19}$$

unde $\omega_c = eB/m$ este pulsația de ciclotron iar $q = -e < 0$.
- Deoarece $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = 0$, toți e^- la o anumită adâncime z în plasmă oscilează în fază.

- Din definiția polarizării (13), rezultă:

$$\varepsilon_\pm = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c)}\right], \tag{20}$$

unde $\omega_p = \sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m}$ reprezintă frecvența plasmei (15).

- Considerând o undă e.m. de frecvență ω, componentele de helicitate $+/-$ vor avea $k_\pm = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_\pm/\varepsilon_0} = k \mp \Delta k$ diferite.
- Pentru $\omega \gg \omega_p, \omega_c$, rezultă:

$$k \simeq \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}}, \qquad \Delta k \simeq \frac{\omega_c \omega_p^2}{2c\omega^2}. \tag{21}$$

- Deoarece $\Delta k > 0$, undele de helicitate $+$ se propagă mai repede decât cele de helicitate $-$:

$$v_\pm = \frac{\omega}{k_\pm} \simeq \frac{\omega}{k}\left(1 \pm \frac{\Delta k}{k}\right). \tag{22}$$

Probleme

1. Pornind de la ecuațiile Maxwell (1), să se arate că intensitatea câmpului magnetic $\mathbf{H}$ satisface:

$$\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{H} = 0.$$

Ce presupuneri referitoare la ε, μ și σ sunt necesare pentru a ajunge la expresia de mai sus?

2. Cuadripotențialul $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$ satisface

$$\mathbf{E} = \partial_t \mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}\phi, \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}. \tag{23}$$

Considerând o undă electromagnetică plană, $A^\mu(t, \mathbf{x}) = \mathrm{Re}(A_0^\mu e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})})$, să se rezolve următoarele cerințe:

   a) Utilizând ec. (23), să se obțină relațiile dintre amplitudinile A_0^μ și $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$.
   b) Impunând etalonarea Coulomb, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$, să se găsească A_0^μ.
   c) Să se repete calculul în etalonarea Lorenz, $\partial_\mu A^\mu = c^{-2}\partial_t \phi - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$.
   d) Să se particularizeze pentru unda polarizată liniar și pentru cazul polarizării circulare.

Probleme

3. Un pulsar aflat la distanța D de Pământ emite radiație electromagnetică. Presupunând că mediul interstelar e omogen, având $(\varepsilon, \mu) = (\varepsilon_0, \mu_0)$ și densitatea de electroni n, să se rezolve următoarele cerințe:
   a) Folosind ec. (17), să se estimeze timpul de călătorie $\Delta t(\omega)$ ca funcție de pulsația ω.
   b) Să se calculeze $d\Delta t/d\omega$ și să se particularizeze pentru cazul $\omega \gg \omega_p$.

$$\left[\text{R:} \quad \frac{d\Delta t}{d\omega} \simeq -\frac{D}{c}\frac{\omega_p^2}{\omega^3} = -\frac{e^2}{\varepsilon_0 mc}\frac{Dn}{\omega^3}\right] \tag{24}$$

   c) Să se arate că diferența temporală între sosirea pulsului de frecvență $\nu = \omega/2\pi$ și un puls ipotetic de frecvență infinită este

$$t(\nu) - t(\infty) \simeq 4 \times 10^3 \left(\frac{n}{\mathrm{cm}^{-3}}\right)\left(\frac{D}{\mathrm{pc}}\right)\left(\frac{\mathrm{MHz}}{\nu}\right)^2. \tag{25}$$

   d) Pentru pulsarul din nebuloasa Crabului, diferența $t(2\ \mathrm{GHz}) - t(4\mathrm{GHz}) = 0,04$ s. Să se calculeze produsul $D\langle n\rangle$.

[R: $D\langle n\rangle \simeq 53,33\ \mathrm{pc/cm^3}$]

   e) Să se estimeze distanța până la pulsar știind că $\langle n\rangle \simeq 0,03\ \mathrm{cm}^{-3}$.

[R: $D \simeq 1777\ \mathrm{pc}$]

Probleme

4. O undă polarizată liniar de-a lungul axei x intră într-o nor de plasmă având densitatea de electroni n, propagându-se pe direcția unui câmp magnetic $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z$.
   a) Să se găsească amplitudinile $\mathbf{E}_{0;+}$ și $\mathbf{E}_{0;-}$ ale componentelor polarizate circular.
   b) Să se expliciteze fazele $\phi_+(t,z)$ și $\phi_-(t,z)$ pe care le au cele două componente $\mathbf{E}_\pm$ la o adâncime z în interiorul plasmei.
   c) Considerând că norul are dimensiunea Δz, să se calculeze defazajul $\Delta\phi = \phi_+ - \phi_-$ între cele două componente. [R: $\Delta\phi = 2\Delta z\Delta k$]
   d) Să se exprime $\mathbf{E}_{\rm final}$ la ieșirea din nor și să se indice tipul și direcția polarizării. [R: polarizare liniară pe direcția $\theta = \Delta\phi/2 = \Delta z\Delta k$]
5. Fie distanța dintre un observator și o sursă de unde e.m. egală cu $D = NL$ ($N \in \mathbb{Z}$). Presupunem că $B = |\mathbf{B}|$ este constant între sursă și observator. Direcția acestuia este paralelă cu direcția observator-sursă. Orientarea vectorului $\mathbf{B}$ este constantă pe fiecare porțiune de lungime L, însă aceasta variază aleator de la o porțiune la alta. Tratând problema ca și un mers aleator (random walk), să se arate că variația direcției de polarizare a unei unde e.m. plane care se propagă de la sursă înspre observator este:

$$\theta \sim \sqrt{N}L\left(\frac{2\pi n e^3 B}{m^2 c^2 \omega^2}\right).$$