Complements of Theoretical Physics
Lecture 11

Victor E. Ambruș

West University of Timișoara

Table of contents

VI. Relativistic electrodynamics.

VI.1. Mișcarea sarcinilor în câmp electromagnetic extern.

- Asupra unei sarcini electrice nerelativiste q în mișcare într-un câmp magnetic $\mathbf{B}$ acționează **Forța Lorentz**:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{1}$$

- Deoarece $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$, forța Lorentz nu efectuează lucru mecanic.
- Componenta paralelă cu $\mathbf{B}$ a forței $F_{||} = 0$, în timp ce $F_\perp = qv_\perp B$.
- Alegând $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ și presupunând $|\mathbf{v}| \ll c$, ecuațiile de mișcare sunt:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{v}_x \\ \ddot{v}_y \end{pmatrix} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 0.$$

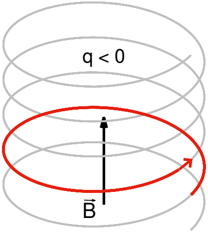
- Componentele vitezei pot fi descrise printr-o lege de oscilație armonică cu **viteza unghiulară de ciclotron** ω_c:

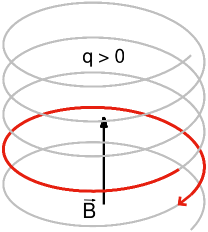
$$v_x = -v_\perp \sin\omega_c t, \qquad v_y = \mp v_\perp \cos\omega_c t, \qquad \omega_c = \frac{|q|B}{m}. \tag{2}$$

- Semnul $\mp$ se referă la semnul sarcinii q, semnul superior corespunzând cazului când $q > 0$ iar cel inferior cazului când $q < 0$.

- Traiectoria particulei va fi de tip elicoidal, de **rază Larmor** R_L în planul perpendicular pe **B**:

$$x = x_0 + R_L \cos \omega_c t, \qquad y = y_0 \mp R_L \sin \omega_c t,$$
$$z = z_0 + v_z t, \qquad R_L = \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{m v_\perp}{|q| B}. \qquad (3)$$





- Sarcinile cu $q < 0$ (semnul de jos) parcurg traiectoria în sens trigonometric.
- Sarcinile cu $q > 0$ (semnul de sus) înaintează în sensul acelor de ceasornic.
- Fiindcă R_L e mică în comparație cu distanțele din spațiul interstelar, q urmează traiectorii elicoidale de-a lungul liniilor de câmp magnetic.
- În limita magnetohidrodinamică, când conductivitatea electrică a plasmei este infinită (rezistivitatea plasmei este nulă), **teorema lui Alfvén** spune că legătura dintre liniile de câmp magnetic și mișcarea sarcinilor este reciprocă.
- În mediile suficient de dense, coliziunile dintre particule duc la distrugerea legăturii, precum și a liniilor de câmp magnetic.

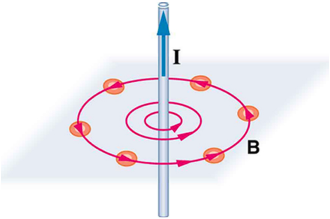
VI.1.2. Legea lui Ampére.

- Legea lui Ampére se scrie:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l},$$

sau în formă locală:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}.$$



- Fluxul de curent printr-o suprafață Σ produce un câmp magnetic circular pe suportul $\partial\Sigma$ al acestei suprafețe.
- În unele sisteme, de ex. în *norii magnetici cosmici*, legea lui Ampére e satisfăcută pretutindeni.
- Există configurații în care câmpurile magnetice și curenții de sarcină sunt astfel aranjați încât să nu apară vreo forță care să distrugă echilibrul. Configurația rezultantă poartă numele de *câmp magnetic fără forțe*.
- Ecuațiile hidrodinamice pentru astfel de plasme implică $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$.
- În prezența unui câmp electric care variază în timp, legea lui Ampére se modifică prin adăugarea curentului de deplasare:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_D, \qquad \mathbf{j}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{4}$$

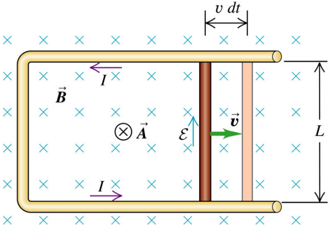
VI.1.3. Legea lui Faraday.

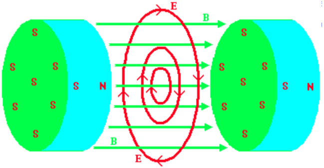
- Legea lui Faraday se scrie:

$$\int_\Sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = -\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

sau în formă locală:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}.$$





- Variația în timp a fluxului magnetic printr-o suprafață Σ induce un câmp electric de-a lungul suportului $\partial\Sigma$ al acestei suprafețe.
- Acest efect se folosește în *betatron* pentru accelerarea purtătorilor de sarcină.
- Într-un nor cosmic, o creștere rapidă a lui **B** poate rezulta dintr-o compresie a acestuia pe o direcție perpendiculară pe **B**, fie în urma coliziunii cu alt nor, fie cu particulele expulzate de supernove.
- Procesul mai sus amintit poate crea raze cosmice, însă doar de energii joase.

VI.1.4. Oglinzi magnetice.

- Fie un câmp magnetic static al cărui $\mathbf{B}$ variază de-a lungul axei z.
- Ecuația $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ scrisă în coordonate cilindrice (R, φ, z) implică:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial(RB_R)}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

- Presupunând că $B_\varphi = 0$ și $\partial_z B_z$ nu depinde de R, rezultă:

$$B_R = -\frac{R}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

- Scriind $\mathbf{v} = v_R \mathbf{e}_R + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_z \mathbf{k}$, rezultă:

$$F_z = -q v_\varphi B_R = \frac{q v_\varphi R}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{5}$$

- În cazul când particula este legată de linia de câmp, putem aproxima $R \simeq R_L = m v_\perp / |q| B$, în timp ce v_φ se poate găsi din ec. (2):

$$v_\varphi = -\frac{y}{R} v_x + \frac{x}{R} v_y = \mp v_\perp \Rightarrow q v_\varphi = -|q| v_\perp,$$

unde semnul superior $(-)$ corespunde cazului $qB > 0$, în timp ce semnul $+$ corespunde cazului $qB < 0$.

- Ec. (5) poate fi rescrisă în funcție de **momentul magnetic** μ:

$$F_z = m\dot{v}_z = -\mu \partial_z B_z, \qquad \mu = \frac{mv_\perp^2}{2B}. \tag{6}$$

- Când $R_L \partial_z B_z \ll B$, avem $B_R \ll B$ și $v_z \simeq v_{||}$.
- Înmulțind Eq. (6) cu $v_{||} \simeq dz/dt$ se obține:

$$mv_{||}\frac{dv_{||}}{dt} = -\mu \frac{dB}{dt}. \tag{7}$$

- **B** nu efectuează lucru mecanic $\Rightarrow \mathbf{v}^2 = v_{||}^2 + v_\perp^2 = \mathrm{const.}$ și:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_{||}^2}{2}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_\perp^2}{3}\right) = -\frac{d}{dt}(\mu B) \simeq -\mu \frac{dB}{dt} \Rightarrow \frac{d\mu}{dt} \simeq 0.$$

- μ variază neglijabil când $R_L \partial_z B \ll B \Rightarrow \mu$ e *invariant adiabatic*.
- Condiția ca o particulă care la $B = B_0$ are înclinația $\theta = \theta_0$ a vitezei **v** față de $\mathbf{B}_0$ să fie reflectată este să ajungă într-o zonă unde $B \equiv B_{\rm refl}$ satisface:

$$\mu = \frac{m\mathbf{v}^2 \sin^2\theta_0}{2B_0} = \frac{m\mathbf{v}^2}{2B_{\rm refl}} \Rightarrow B_{\rm refl} = \frac{B_0}{\sin^2\theta_0}. \tag{8}$$

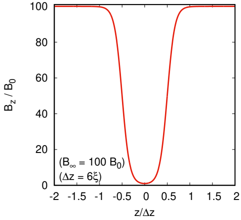
- Configurația rezultantă poartă numele de **oglindă magnetică**, sau **dop magnetic**.

VI.1.5. Oglinzi magnetice - studiu numeric.

- Să încercăm implementarea unei capcane magnetice impunând pentru $B_z(z)$ profilul:

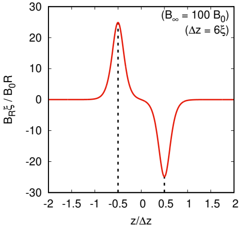
$$B_z(z) = B_\infty - \frac{B_\infty - B_0}{2\tanh\frac{\Delta z}{2\xi}} \left(\tanh\frac{z+\frac{\Delta z}{2}}{\xi} - \tanh\frac{z-\frac{\Delta z}{2}}{\xi}\right),$$

unde B_0 și B_∞ reprezintă valorile lui B_z când $z = 0$, respectiv $z \to \pm\infty$, iar Δz și ξ reprezintă dimensiunea capcanei, respectiv a zonei de tranziție între B_0 și B_∞.



- Componenta radial B_R a câmpului magnetic este:

$$B_R = \frac{R(B_\infty - B_0)}{4\xi\tanh\frac{\Delta z}{2\xi}} \left[\left(\cosh\frac{z+\frac{\Delta z}{2}}{\xi}\right)^{-2} - \left(\cosh\frac{z-\frac{\Delta z}{2}}{\xi}\right)^{-2}\right].$$



- B_R atinge valorile extreme când $z = z_\pm = \pm\Delta z/2$:

$$B_R(z = z_\pm) \simeq \mp\frac{R}{2\xi}\frac{B_\infty - B_0}{2\tanh(\Delta z/2\xi)}.$$

- Ținând cont că $B_z(z_\pm) \simeq \frac{1}{2}(B_\infty + B_0)$ și presupunând că $B_\infty \gg B_0$, condiția $B_R \ll B$ impune:

$$\xi \gg R \simeq R_L.$$

- Scriind $m d\mathbf{v}/dt = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ în raport cu coordonatele polare (R, φ, z), respectiv $\mathbf{B} = B_z\mathbf{k} + B_R\mathbf{e}_R$, rezultă:

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} = R\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + R\frac{d\varphi}{d\tau}B_z,$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{d\tau}\left(R^2\frac{d\varphi}{d\tau}\right) = -\frac{dR}{d\tau}B_z - \frac{R}{2}\frac{dz}{D\tau}\frac{\partial B_z}{\partial z},$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{R^2}{2}\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{\partial B_z}{\partial z},$$

  unde $\tau = \omega_{c;0}t = |q|t/mB_0$ este unitatea temporală adimensională.

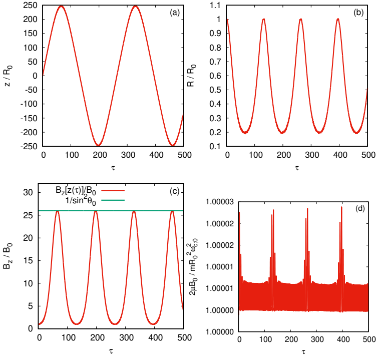
- Comportamentul tipic poate fi studiat impunând la $\tau = 0$ următoarele condiții:

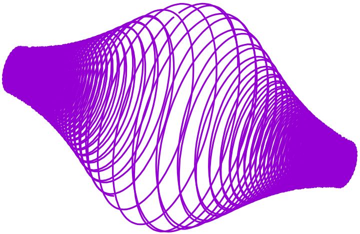
$$z = 0, \qquad R = R_0, \qquad \varphi = 0,$$

$$\frac{dz}{d\tau} = 5R_0, \qquad \frac{dR}{d\tau} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = 1,$$

  unde s-a presupus că $q < 0$, astfel încât particula parcurge traiectoria elicoidală în sens trigonometric.

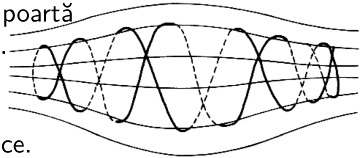
- Considerăm cazul când $\Delta z = 600R_0$, $\xi = 100R_0$.
- Fig. (a) și (b) arată traiectoria particulei pe parcursul a aproximativ 2 perioade (particula este reflectată la $z \simeq 250R_0$).





- Fig. (c) confirmă că reflexia are loc când $B_z \sin^2\theta_0/B_0 \simeq 1$, unde $\sin\theta_0 = v_{\perp;0}/v \simeq 0,196$.
- Fig. (d) confirmă că momentul magnetic μ (adimensionalizat) rămâne practic constant.
- Pentru vizualizarea traiectoriei, coordonatele x și y au fost înmulțite cu un factor de 150.

VI.1.6. Accelerația Fermi.



- O pereche de oglinzi magnetice poartă numele de **capcană magnetică**.
- Enrico Fermi a propus capcana magnetică drept un mecanism pentru accelerarea razelor cosmice.
- Să presupunem că o particulă încărcată pătrunde într-un nor al cărui câmp magnetic acționează precum o oglindă magnetică, reflectând particula.
- Deoarece $\mathbf{F}_L$ nu efectuează lucru mecanic, energia particulei la ieșirea din nor va fi egală cu cea la intrarea în nor, *în sistemul propriu al norului*.
- Dacă norul se deplasează înspre particulă, viteza acesteia la ieșire va fi mai mare, și invers pentru cazul când norul se deplasează în același sens cu particula.
- Accelerația Fermi este eficace în sistemele care prezintă unde de șoc, de exemplu în cazul exploziei supernovelor, unde particulele suficient de energetice pot depăși frontul undei de șoc, însă datorită configurației câmpului magnetic, sunt reflectate înapoi către unda de șoc, de unde sunt din nou oglindite înspre exterior.

[1] Sursa: M. Harwitt, *Astrophysical concepts* (Springer, 2006).

Probleme

1. Presupunând că $\dfrac{m}{2}\dfrac{dv_{||}^2}{dt} = -\mu\dfrac{dB}{dt}$, să se arate că $\mu = mv_{\perp}^2/2B = \mathrm{const.}$, știind că $\mathbf{v}^2 = v_{\perp}^2 + v_{||}^2 = \mathrm{const.}$
2. O particulă relativistă de sarcină q și masă m se află sub acțiunea unui câmp magnetic constant $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$.
   a) Să se scrie ecuațiile de mișcare și să se arate că $\gamma = 1/\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2} = \mathrm{const.}$
   b) Să se găsească viteza unghiulară de sincrotron, ω_s.
   c) Să se găsească raza de sincrotron, R_s.

Probleme

3. Asupra unei particule relativiste de masă m acționează forța $\mathbf{F}$, astfel încât $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$. Să se găsească cuadriforța $K^\mu = (K^0, \mathbf{K})$, care satisface $\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu$:
   a) Să se găsească $\mathbf{K}$.
   b) Știind că $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$, să se găsească K^0.
   c) Presupunând că $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, să se arate că $K^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu$, unde $u^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ este cuadriviteza particulei și

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E^x & -\frac{1}{c}E^y & -\frac{1}{c}E^z \\ \frac{1}{c}E^x & 0 & -B^z & B^y \\ \frac{1}{c}E^y & B^z & 0 & -B^x \\ \frac{1}{c}E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

4. Să se arate că raza Larmor corespunzătoare unui proton care se deplasează cu viteza de 10 $\mathrm{km/s}$ pe o direcție perpendiculară pe un câmp magnetic de inducție $B = 10^{-11}\,\mathrm{T}$ este mică în comparație cu distanțele interstelare și chiar interplanetare.

   [R: $R_L \simeq 10^7\,\mathrm{m} \simeq 7 \times 10^{-5}\,\mathrm{U.A.}$]

Probleme

5. Într-o regiune a spațiului, B crește de la $10^{-6}\mathrm{G}$ la $10^{-5}\mathrm{G}$ de-a lungul unei perioade de $10^7\mathrm{ani}$ (*adiabatic*). Să se găsească energia finală E_f a unei sarcini nerelativiste q cu energia inițială E_i presupunând că aceasta se mișcă fără coliziuni în planul perpendicular pe $\mathbf{B}$. [Răspuns: $E_f = 10E_i$]
6. Un proton având energia inițială $E_0 = 10^{10}\,\mathrm{eV}$ călătorește pe direcția de mișcare a doi nori interstelari care se deplasează cu vitezele $\pm V$ ($V = 7\ \mathrm{km/s}$). La fiecare întâlnire cu protonul, norii acționează ca oglinzi magnetice, reflectându-l înapoi. Separarea inițială a norilor este $d_0 = 10^{15}\,\mathrm{m}$.
   a) Să se arate că în urma unei ciocniri, factorul Lorentz al protonului crește cu: $$\delta\gamma = \frac{2V/c}{1-(V/c)^2}\left(\sqrt{\gamma^2-1}+\frac{V}{c}\gamma\right).$$
   b) Scriind $\delta\gamma \to d\gamma/dn$, să se estimeze numărul n de ciocniri necesare pentru dublarea energiei protonului. [R: $\sim 1,5\times 10^4$]
   c) Să se estimeze numărul de ciocniri necesare pentru dublarea energiei particulei în cazul în care particula este un electron.
   d) Să se arate că timpul necesar pentru efectuarea a n ciocniri este aproximativ $$t_n \simeq \frac{d_0}{2V}[1-\exp(-2nV/c)].$$
   e) Să se estimeze timpul necesar pentru dublarea energiei protonului.
   [R: ~ 1140 ani]

Probleme

7. Ecuațiile de mișcare ale particulei încărcate în câmp electromagnetic pot fi scrise în formă covariantă după cum urmează:

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu, \qquad u^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}). \tag{10}$$

În cele ce urmează, vom considera evoluția particulei de sarcină q și masă m într-un câmp electromagnetic constant.

a) Rezolvând ecuațiile de mișcare în formă matricială, să se arate că

$$u^\mu(\tau) = \left(e^{\frac{q\tau}{m}F}\right)^\mu{}_\nu u^\nu(0),$$

unde τ este timpul propriu, satisfăcând $d\tau = dt/\gamma$.

b) Considerăm reprezentarea spinorială a cuadrivitezei,

$$\tilde{u} = u^0 I + \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

iar $I = \mathrm{diag}(1,1)$ este identitatea. Știind că $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})I + i\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, să se arate că

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{u} = \frac{q}{m}\left(\frac{\frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B}}{2}\cdot\boldsymbol{\sigma}\tilde{u} + \tilde{u}\frac{\frac{1}{c}\mathbf{E} - i\mathbf{B}}{2}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right). \tag{12}$$

c) Integrând ecuația de mai sus, să se arate că

$$\tilde{u}(\tau) = \exp\left(\frac{q\tau}{m}\frac{\frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B}}{2}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\tilde{u}(0)\exp\left(\frac{q\tau}{m}\frac{\frac{1}{c}\mathbf{E} - i\mathbf{B}}{2}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right). \tag{13}$$

Probleme

7. (continuare)
   d) Să se arate că $e^{\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \cosh(a) + \hat{\mathbf{a}}\cdot\sigma\sinh(a)$, unde $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a$ iar $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.
   e) Să se demonstreze că, în reperul unde $\tilde{u}(0) = I$, legea vitezei este

$$\tilde{u}(\tau) = \left[\cosh^2(a\tau) + \sinh^2(a\tau)\frac{\frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{\mathbf{n}^2}\right] I + \left[\frac{2}{c}\sinh(a\tau)\cosh(a\tau)\frac{\mathbf{E}}{(\mathbf{n}^2)^{1/2}} + \frac{2}{c}\sinh^2(a\tau)\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mathbf{n}^2}\right]\cdot\boldsymbol{\sigma}, \quad (14)$$

   unde $\mathbf{n} = \frac{1}{c}\mathbf{E} + i\mathbf{B}$ este un vector complex, iar $a = (q/2m)(\mathbf{n}^2)^{1/2}$.
   f) Considerând că $\tilde{x}(0) = 0$, să se arate că legea de mișcare a particulei este

$$\tilde{x}(\tau) = \left[\tau + \left(\frac{\sinh(2a\tau)}{4a} - \frac{\tau}{2}\right)\left(1 + \frac{\frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{\mathbf{n}^2}\right)\right] I + \left[\frac{\cosh(2a\tau) - 1}{2ac}\frac{\mathbf{E}}{(\mathbf{n}^2)^{1/2}} + \frac{\sinh(2a\tau) - 2a\tau}{2ac}\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mathbf{n}^2}\right]\cdot\boldsymbol{\sigma}. \quad (15)$$

   g) Să se particularizeze soluția pentru cazul când $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = 0$ și deci $\mathbf{n}^2 = 0$.