Tema 7

1. Intergati prin parti:

   a) $\int_0^y x^2 \sin x dx$ b) $\int_1^y x \ln x dx$ c) $\int_0^y \arcsin x dx$ d) $\int_1^y \frac{\ln\left(a^2+x^2\right)}{x^2} dx$

2. Functia gamma $\Gamma(n)$ este definita pentru $\forall n > -1$ cu $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$

   Determinati o relatie de recurenta care conecteaza $\Gamma(n+1)$ si $\Gamma(n)$.

   Deduceti valoarea lui $\Gamma(n+1)$ cand n este intreg pozitiv.

   Apoi, valoarea $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ daca se cunoaste ca $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

3. Integrand prin parti de doua ori, aratati ca integral I_n definita ca in relatia urmatoare , pentru n intreg pozitiv are valoarea din RHS.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin n\theta \cos\theta d\theta = \frac{n - \sin(n\pi/2)}{n^2 - 1}$$

4. Daca J_r este integrala:

$$J_r = \int_0^\infty x^r e^{-x^2} dx$$

   Aratati ca a) $J_{2r+1} = r!/2$ b) $J_{2r} = 2^{-r}(2r-1)(2r-3)\cdots(5)(3)(1)J_0$

5. Avand in vedere ca pentru $0 \le \eta \le 1$ are loc $\eta^{1/2} \ge \eta^{3/4} \ge \eta$, aratati ca:

$$\frac{2}{3} \le \frac{1}{a^{5/2}} \int_0^a \left(a^2 - x^2\right)^{3/4} dx \le \frac{\pi}{4}$$

6. Avand in vedere ca $shx < e^x/2 < chx$ si ca $1 + z^2 < (1+z)^2$ pentru $z > 0$, aratati ca pentru $x > 0$, lungimea L a curbei $y = \frac{1}{2}e^x$ masurata de la origine, satisfice inegalitatile $shx < L < x + shx$.

R: $\left(2-y^2\right)\cos y + 2y \sin y - 2$, b) $\frac{y^2}{2}\ln y - \frac{1}{4}\left(y^2 - 1\right)$ c) $y \arcsin y + \sqrt{1-y^2} - 1$

d) $\ln\left(a^2+1\right) - \frac{1}{y}\ln\left(a^2+y^2\right) + \frac{2}{a}\left(arctg\frac{y}{a} - arctg\frac{1}{a}\right)$ 2. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $15\sqrt{\pi}/8$ 3. Se determina relatii de recurenta (integrand prin parti) $J_{2r+1} = rJ_{2r-1}$, $J_{2r} = \frac{2r-1}{2} J_{2r-2}$ 5. Considerati $\eta = 1 - (x/a)^2$ in relatia data si apoi substitutia $x = a\sin\theta$ in una din cele doua integrale limita 6. $L = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{1}{4}e^{2x}} dx$