Tema 3

1. Calculati: a) $C_5^3$ b) $C_3^5$ c) $C_{-5}^3$ d) $C_{-3}^5$
2. Demonstrati prin inductie:

$$\text{a) } \sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad \text{b) } \sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

3. Demonstrati prin inductie ca:

$$1+r+r^2+\ldots+r^k+\ldots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

4. Demonstrati ca $3^{2n}+7$ ,unde n este numar natural, este divizibil cu 8.
5. Demonstrati prin inductie ca

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^r} tg\left(\frac{\theta}{2^r}\right) = \frac{1}{2^n} ctg\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - ctg\theta$$

6. Stabiliti valorile lui k pentru care coeficientul $C_p^k$ este divizibil cu $p$ cand $p$ este numar prim. Folositi rezultatul si metoda inductiei pentru a demonstra ca $n^p - n$ divizibil cu p pentru orice n intreg si orice p numar prim. Deduceti ca $n^5 - n$ este divizibil cu 30.
7. Demonstrati, cu metoda contradictiei, ca ecuatia

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

in care toti coeficientii sunt numere intregi, nu poate avea radacini rationale neintregi. Deduceti ca orice radacina intreaga trebuie sa fie divizor a lui $a_0$ si apoi aflati toate radacinile rationale ale ecuatiei

$$x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 10x + 6 = 0$$

R: 1.a)10 b)nu e definit c)-35 d)-21 5.folositi rel (1.32-1.34) pentru a exprima functiile trig. de argument $\theta/2^k$ in functie de cele de argument $\theta/2^{k+1}$ 6. Divizibil pentru $p=1,2,\ldots,k-1$ . Dezvoltati $(n+1)^p = n^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k + 1$ Aplicati rezultatul pt $p=5$ si dezvoltati in $n^5 - 1 = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$ 7. Presupunem $x = p/q$ , $q \neq 1$ . Aratati ca fractia $-p^n/q$ este egala cu un intreg $a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1}$ aceasta este o contradictie. Numai $x=-3$ .