Tema 13

1. Determinati razele de convergenta pentru seriile:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi i}{n} z^n$

2. Calculati limitele urmatoarelor functii:

   a) $\frac{x^3+x^2-5x-2}{2x^3-7x^2+4x+4}$ pentru $x \to 0$, $x \to \infty$ si $x \to 2$

   b) $\frac{\sin x - x\cosh x}{\sinh x - x}$ pentru $x \to 0$

   c) $\int_x^{\pi/2} \frac{y\cos y - \sin y}{y^2} dy$ pentru $x \to 0$

3. In teoria cuantica, un sistem de oscilatori, fiecare cu frecventa fundamentala ν care interactioneaza la temperatura T, are o energie medie $\bar{E}$ data de relatia:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}$$

   unde $x = h\nu / kT$, h este constanta lui Planck, k este constanta lui Boltzmann. Demonstrati ca ambele serii sunt convergente, evaluati sumele acestora, si aratati ca la tempetratura mare $\bar{E} \approx kT$, iar la temperatura mica $\bar{E} \approx h\nu \exp(-h\nu / kT)$.

4. Dezvoltati urmatoarele functii in serie Maclaurin:

   a) $\frac{1}{2+3x}$ b) $\frac{x}{x-1}$ c) $\sinh x$

R: 1.a)1 b)1 c)∞ d)1 2.a)-1/2,1/2, ∞ b)-4 c)$-1+2/\pi$ 3.Daca S(x)este seria de la numitor , evaluate ac serie si apoi derivati dS(x)/dx pentru seria de la numerator. 4.a)$\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}x+\frac{3^2}{2^3}x^2-...$ $x \in (-2/3, 2/3)$ b)$-x-x^2-x^3-...$ $x \in (-1,1)$ c) $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...$ $x \in \mathbb{R}$