Tema 4

1. Arătați cu teorema Weierstrass că şirurile $a_n = \frac{n+5}{n+3}$ şi $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ sunt convergente.

2. Analizați monotonia şi mărginirea şirului $a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 2$

In caz de convergență, calculați limita şirului.

3. Calculați limitele şirurilor urmatoare utilizand limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$, cu $x_n \to \pm\infty$:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{2\sqrt{n}+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{n+5}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n+1}$

$R: a)e^2 \ b)e \ c)e^{-2}$

4. Stabiliți domeniul maxim pe care pot fi definite funcțiile următoare:

a) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$ b) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\ln(4-x^2)}$ d) $f(x) = \sqrt{\lg(x^2-3x-9)}$

5. Determinați funcția liniară $f(x)$ ştiind că $f(1)=2$ şi $f(-1)=0$.

R: $f(x) = x+1$

6.Arătați cu definiția (ε-δ) că:

a) $\lim\limits_{x\to1}(3x+4)=7$ b) $\lim\limits_{x\to5}(2x+1)=11$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$

7. Calculați limitele:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ d) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$