3.4.2 Determinarea radacinilor de ordinul *n* ale unitatii

Ecuatia $z^2 = 1$ are solutiile $z = \pm 1$. Dar, in multimea numerelor complexe putem rezolva ecuatia generala $z^n = 1$. Conform teoremei fundamentale a algebrei, ecuatia are *n* solutii. Pentru a continua rescriem ecuatia in forma:

$$z^n = e^{2ik\pi},$$

unde *k* este intreg. Extragem radicalul de ordinul *n* in fiecare parte a ecuatiei:

$$z = e^{2ik\pi/n} \quad .$$

Astfel, solutiile ecuatiei $z^n = 1$ sunt

$$z_{1,2,\ldots,n} = 1,\ e^{2i\pi/n}, \ldots,\ e^{2i(n-1)\pi/n} \quad ,$$

si corespund valorilor 0, 1, 2, …, $n-1$ pentru *k*. Valori mai mari pentru *k* nu conduc la solutii noi, deoarece solutiile deja listate se repeta ciclic pentru $k = n,\ n+1,\ n+2, \ldots$

Exemplu: Determinati solutiile ecuatiei $z^3 = 1$.

Aplicand teoria precedenta,

$$z = e^{2ik\pi/3}$$

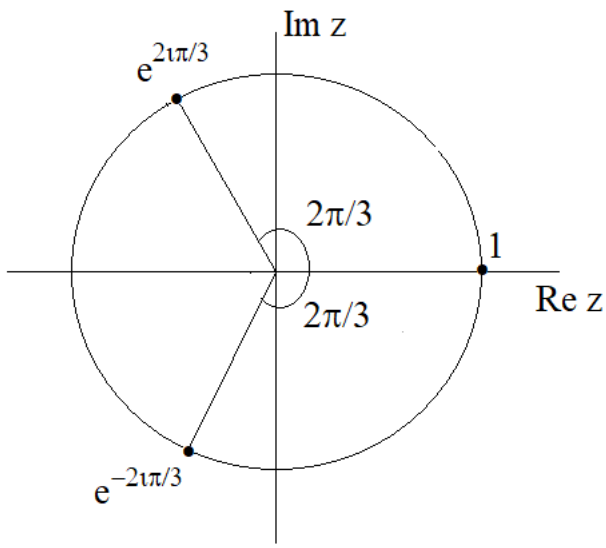
Astfel, cele trei solutii sunt: $z_1 = e^{0i} = 1$

$$z_2 = e^{2i\pi/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$z_3 = e^{4i\pi/3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

Observam ca, asa cum este de asteptat, urmatoarea solutie pentru $k = 3$, $z_4 = e^{6i\pi/3} = 1 = z_1$, deci exista doar trei solutii distincte.

Din proprietatea $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ rezulta ca $\left|z^3\right| = |z|^3$. Toate radacinile unitatii au modulul unu, i.e. ele se afla pe un cerc cu raza unu in diagrama Argand. Cele trei radacini sunt reprezentate in figura. Radacinile cubice ale unitatii se scriu deseori 1, ω si ω^2 . Proprietatile $\omega^3 = 1$ si $1 + \omega + \omega^2 = 0$ sunt usor de demonstrat.



3.4.3 Rezolvarea ecuatiilor polinomiale

Ecuatiile complexe in forma polinomiala trebuie mai intai, rezolvate in *z* sau puteri ale lui *z* folosind aceleasi metode ca si cele folosite la rezolvarea ecuatiilor polinomiale reale. Apoi se determina si radacinile complexe.

Exemplu: Rezolvati ecuatia $z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0$

La inceput factorizam ecuatia: $\left(z^3 - 2\right)\left(z^2 + 4\right)\left(z - 1\right) = 0$

Atunci $z^3 = 2$ sau $z^2 = -4$ sau $z = 1$.

Solutiile ecuatiei $z^2 = -4$ sunt $z = \pm 2i$.

Pentru a gasi solutiile ecuatiei cubice, mai intai scriem ecuatia in forma:

$$z^3 = 2 = 2e^{2ik\pi} \quad \text{cu } k \text{ intreg.}$$

$$z = 2^{1/3} e^{2ik\pi/3}$$

Pentru a evita duplicarea solutiilor, folosim faptul ca $-\pi < \arg z \le \pi$ si gasim:

$$z_1 = 2^{1/3}$$

$$z_2 = 2^{1/3} e^{2\pi i/3} = 2^{1/3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2^{1/3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_3 = 2^{1/3} e^{-2\pi i/3} = 2^{1/3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2^{1/3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Numerele complexe z_1, z_2 si z_3 , impreuna cu $z_4 = 2i$, $z_5 = -2i$ si $z_6 = 1$ sunt solutiile ecuatiei polinomiale date. Asa cum ne-am asteptat cu teorema fundamentala a algebrei , am gasit ca numarul total al radacinilor complexe , sase, este egal cu gradul polinomului in z.

Un rezultat util este acela ca radacinile complexe ale unui polinom cu coeficienti reali apar in perechi conjugate (i.e. daca z_1 este o radacina, atunci z_1^* este o alta radacina distincta). Putem demonstra acest rezultat. Fie z o radacina a ecuatiei polinomiale

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

Conjugam complex ecuatia,

$$a_n \left(z^*\right)^n + a_{n-1}\left(z^*\right)^{n-1} + \ldots + a_1 z^* + a_0 = 0$$

Deci z^* este solutie.

3.5 *Logaritmi si puteri complexe*

Conceptul de exponentiala complexa a fost introdus in paragarful 3.3, unde s-a presupus ca definirea exponentialei ca o serie este valabila pentru numere complexe cat si pentru numere reale. Similar, putem defini logaritmul unui numar complex si putem folosi numerele complexe drept exponenti.

Vom nota logaritmul unui numar complex z cu $w = Ln\, z$, unde notatia Ln o explicam pe scurt. Astfel, w trebuie sa verifice

$$z = e^w$$

Folosind proprietatea $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$, observam ca

$$z_1 z_2 = e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1 + w_2} \quad ,$$

Si aplicand logaritmul in ambele parti gasim

$$Ln(z_1 z_2) = w_1 + w_2 = Ln\, z_1 + Ln\, z_2 \qquad (1)$$

Cea ce arata ca regula familiara pentru logaritmul produsului a doua numere reale este valabila si pentru numere complexe.

Putem folosi relatia (1) pentru a investiga mai departe proprietatile lui *Ln z*. Stim deja ca argumentul unui numar complex este multi-valoare, i.e. $\arg z = \theta + 2n\pi$, unde *n* este orice intreg. Astfel, in forma polara, numarul complex *z* ar trebui scris in forma

$$z = re^{i(\theta + 2n\pi)}$$

Aplicam logaritmul in ambele parti si folosim proprietatea (1), gasim

$$Ln\, z = \ln r + i(\theta + 2n\pi) \qquad (2)$$

unde $\ln r$ este logaritmul natural din cantitatea reala pozitiva *r* si astfel este scris normal. Din relatia (2) se vede ca *Ln z* este multi-valoare. Pentru a evita acest comportament multivaloare, conventional se defineste o alta functie *ln z*, numita *valoarea principala* a lui *Ln z*, care se obtine din *Ln z*, restrictionand argumentul lui *z* la intervalul $-\pi < \theta \le \pi$.

Exemplu: Evaluati $Ln(-i)$

Scriem $-i$ sub forma exponentiala si gasim

$$Ln(-i) = Ln\left(e^{i(-\pi/2 + 2n\pi)}\right) = i(-\pi/2 + 2n\pi)$$

unde *n* este orice intreg. Atunci, $Ln(-i) = -i\pi/2,\ 3i\pi/2, \ldots$ Observam ca valoarea principala a logaritmului este $ln(-i) = -i\pi/2$

Daca *z* si *t* sunt numere complexe atunci puterea *z* a lui *t* se defineste cu

$$t^z = e^{zLn\, t}$$

Deoarece $Ln\, t$ este multi-valoare, la fel este si aceasta definitie.

Exemplu: Simplificati expresia $z = i^{-2i}$

$$z = e^{-2i\,Ln\,i}$$

Putem scrie $i = e^{i(\pi/2+2n\pi)}$ unde *n* este orice intreg, si atunci

$$Ln\ i = Ln\left[e^{i(\pi/2+2n\pi)}\right] = i\left(\pi / 2 + 2n\pi\right)$$

Acum putem simplifica pe *z*,

$$i^{-2i} = e^{-2i\times i(\pi/2+2n\pi)} = e^{\pi+4n\pi}$$

Surprinzator rezultatul este o cantitate reala.

3.6 *Aplicatii la derivare si integrare*

Putem folosi forma exponentiala a numerelor complexe si formula lui Moivre pentru a simplifica derivarea functiilor trigonometrice.

Exemplu: Calculati derivata in raport cu *x* a functiei $e^{3x}\cos 4x$

Desigur putem deriva direct cu regula produsului. Totusi, o metoda alternativa in acest caz este folosirea exponentialei complexe. Sa consideram numarul complex

$$z = e^{3x}\left(\cos 4x + i\sin 4x\right) = e^{3x}e^{4ix} = e^{(3+4i)x}$$

Acest numar complex are partea reala $e^{3x}\cos 4x$. Acum derivam *z* in raport cu *x* obtinem

$$\frac{dz}{dx} = \left(3+4i\right)e^{(3+4i)x} = \left(3+4i\right)e^{3x}\left(\cos 4x + i\sin 4x\right) \tag{3}$$

Egaland partile reale obtinem

$$\frac{d}{dx}\left(e^{3x}\cos 4x\right) = e^{3x}\left(3\cos 4x - 4\sin 4x\right)$$

Egaland partile imaginare obtinem:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{3x}\sin 4x\right)=e^{3x}\left(4\cos 4x+3\sin 4x\right)$$

Intr-o maniera similara putem folosi forma exponentiala pentru a evalua integrale din functii trigonometrice si exponentiale.

Exemplu: Evaluati integrala $I=\int e^{ax}\cos bx\,dx$

Consideram integrandul ca partea reala a numarului complex:

$$e^{ax}\left(\cos bx+i\sin bx\right)=e^{ax}e^{ibx}=e^{(a+ib)x}$$

Integram si gasim:

$$\int e^{(a+ib)x}dx=\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}+c$$

$$=\frac{(a-ib)e^{(a+ib)x}}{(a-ib)(a+ib)}+c=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(ae^{ibx}-ibe^{ibx}\right)+c \qquad (4)$$

unde constanta de integrare este in general complexa. Notand aceasta constanta cu $c=c_1+ic_2$ si egaland partile reale in (4) obtinem

$$I=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)+c_1$$

Acest rezultat este in accord cu cel obtinut in paragraful 2.2.8 curs 7. Egaland partile imaginare in (4) obtinem

$$J=\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)+c_2$$

3.7 *Functii hiperbolice*

Functiile hiperbolice sunt analoagele complexe ale functiilor trigonometrice. Analogia poate ca nu este imediata si definitiile functiilor hiperbolice pot parea, la prima vedere, arbitrare. Totusi o privire atenta asupra proprietatilor acestora releva aceasta analogie. De exemplu, relatia apropiata dintre functiile hiperbolice si cele trigonometrice, inseamna ca proprietati familiare ale functiilor trigonometrice pot fi aplicate si functiilor hiperbolice.

3.7.1 Definitii

Cele doua functii hiperbolice fundamentale sunt $\cosh x$ si $\sinh x$ si, asa cum sugereaza numele, sunt echivalentele hiperbolice pentru $\cos x$ si $\sin x$. Acestea se definesc cu relatiile urmatoare:

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \tag{5}$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \tag{6}$$

Notam ca functia $\cosh x$ este para si $\sinh x$ este impara. Prin analogie cu functiile trigonometrice, alte functii hiperbolice sunt:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{7}$$

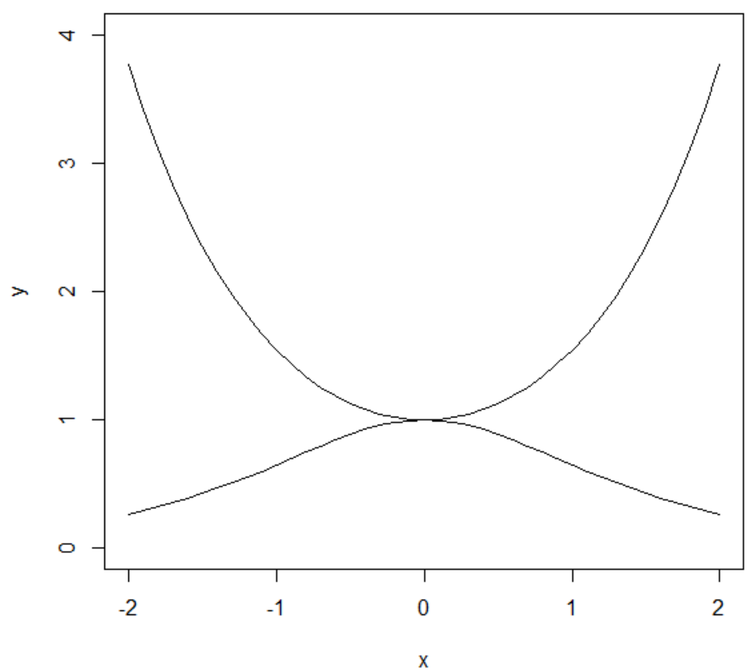
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \tag{8}$$

$$\cos ech\ x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \tag{9}$$

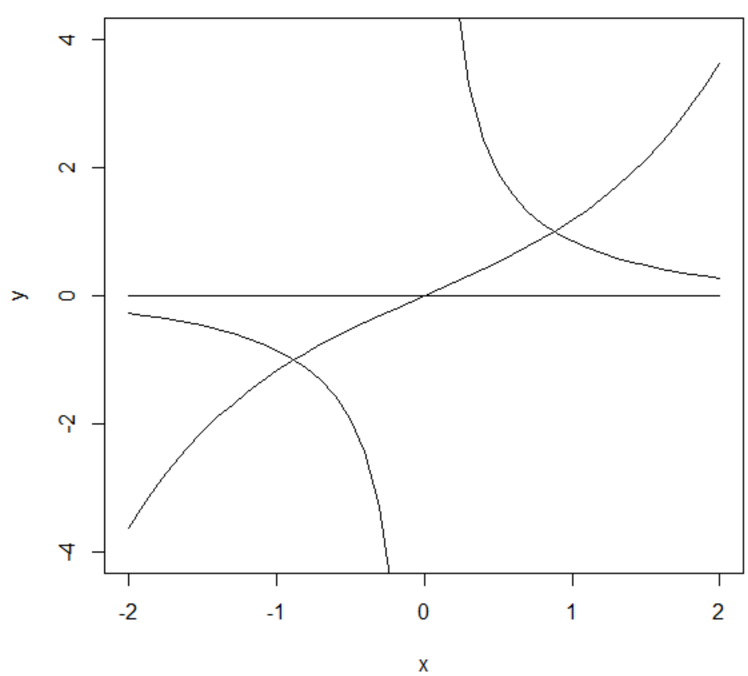
$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{10}$$

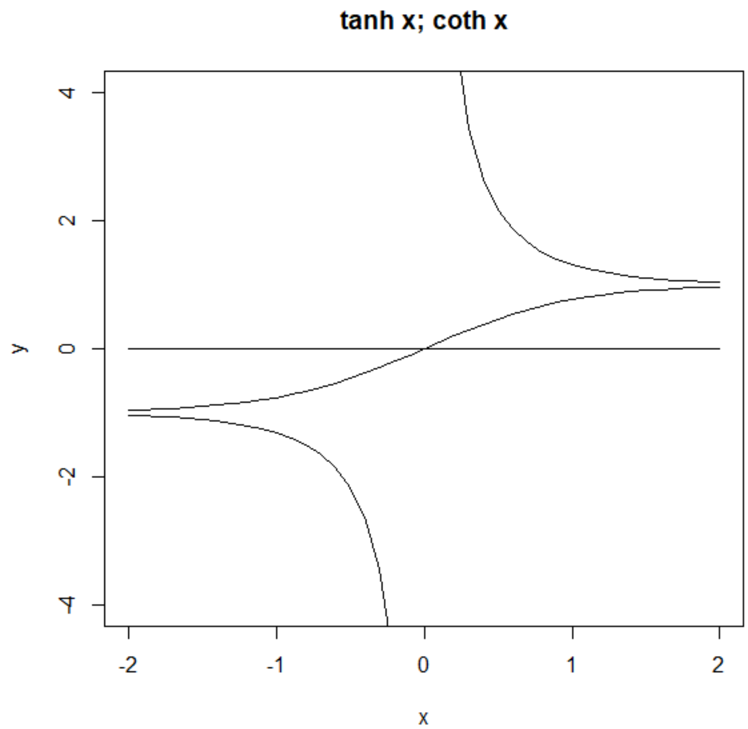
Toate functiile hiperbolice de mai sus, au fost definite in functie de variabila reala *x*. Aceste functii pot fi reprezentate grafic. Definitiile sunt valabile si pentru variabile complexe.

cosh x; sech x



sinh x; cosech x





3.7.2 Analogii hiperbolic-trigonometrice

In acest paragraf discutam relatia apropiata dintre cele doua grupuri de functii. Avand in vedere relatiile demonstrate in cursul 8 pentru $z = e^{i\theta}$,

$$z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

$$z - \frac{1}{z} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

Gasim:

$$\cos(ix) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$\sin(ix) = \frac{1}{2}i\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

Cu definitiile din paragraful precedent,

$$\cosh x = \cos(ix) \qquad (11)$$

$$i \sinh x = \sin(ix) \qquad (12)$$

$$\cos x = \cosh(ix) \qquad (13)$$

$$i \sin x = \sinh(ix) \qquad (14)$$

Aceste ecuatii utile fac relatiile dintre functiile hiperbolice si trigonometrice transparente.

3.7.3 Identitati pentru functii hiperbolice

Cum analogiile dintre functiile trigonometrice si functiile hiperbolice au fost stabilite, vom vedea ca toate identitatile trigonometrice sunt valabile si pentru functiile hiperbolice, cu urmatoarele modificari. Oriunde apare $\sin^2 x$ trebuie inlocuit cu $-\sinh^2 x$, si vice versa. Aceasta inlocuire este necesara chiar daca $\sin^2 x$ este ascuns, e.g. $\tan^2 x = \sin^2 x / \cos^2 x$ si astfel trebuie inlocuit cu $-\sinh^2 x / \cosh^2 x = -\tanh^2 x$

Exemplu: Gasiti identitatea hiperbolica analoaga relatiei $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Cu regulile de mai sus $\cos^2 x$ se inlocuieste cu $\cosh^2 x$ si $\sin^2 x$ cu $-\sinh^2 x$, si astfel relatia devine:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Aceasta relatie poate fi verificata si prin substituirea definitiilor lui $\cosh x$ si $\sinh x$.

Alte relatii care pot fi demonstrate in mod similar sunt:

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$$

$$\cos ech^2 x = \coth^2 x - 1$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

3.7.4 Rezolvarea ecuatiilor hiperbolice

Atunci cand trebuie sa rezolvam ecuatii hiperbolice, putem proceda ca si in cazul ecuatiilor trigonometrice. Totusi, aproape intotdeauna este mai simplu sa exprimam ecuatia cu ajutorul exponentialelor.

Exemplu: Rezolvati ecuatia hiperbolica $\cosh x - 5\sinh x - 5 = 0$

Substituim definitiile functiilor hiperbolice obtinem:

$$\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)-\frac{5}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)-5=0$$

Rearanjand si inmultind cu $-e^{x}$ obtinem:

$$e^{x}+e^{-x}-5e^{x}+5e^{-x}-10=0$$

$$6e^{-x}-4e^{x}-10=0$$

$$3e^{-x}-2e^{x}-5=0$$

$$2e^{2x}+5e^{x}-3=0$$

Acum putem factoriza si rezolva:

$$\left(2e^{x}-1\right)\left(e^{x}+3\right)=0$$

Astfel $e^{x}=1/2$ sau $e^{x}=-3$. Atunci, $x=-\ln 2$ sau $x=\ln\left(-3\right)$.

3.7.5 Functii hiperbolice inverse

La fel ca si functiile trigonometrice, functiile hiperbolice au inverse. Daca $y=\cosh x$ atunci $x=\cosh^{-1} y$ serveste ca definitie a functiei inverse. Folosind definitiile fundamentale ale functiilor hiperbolice, putem gasi expresii pentru aceste inverse.

Exemplu: Determinati expresia functiei inverse $y=\sinh^{-1} x$

Mai intai, putem scrie *x* in functie de *y*, i.e.

$$y = \sinh^{-1} x \quad \Rightarrow \quad x = \sinh y$$

Acum, deoarece $\cosh y = \frac{1}{2}\left(e^{y} + e^{-y}\right)$ si $\sinh y = \frac{1}{2}\left(e^{y} - e^{-y}\right)$,

$$\begin{aligned} e^{y} &= \cosh y + \sinh y \\ &= \sqrt{1 + \sinh^{2} y} + \sinh y \\ &= \sqrt{1 + x^{2}} + x \end{aligned}$$

Si atunci

$$y = \ln\left(\sqrt{1 + x^{2}} + x\right)$$

Similar, se poate arata ca

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x \pm \sqrt{1 + x^{2}}\right)$$

Exemplu: Determinati expresia functiei inverse $y = \tanh^{-1} x$

$$y = \tanh^{-1} x \;\Rightarrow\; x = \tanh y$$

Din definitia tangentei

$$x = \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}} \;\Rightarrow\; (x+1)e^{-y} = (1-x)e^{y}$$

$$\Rightarrow\; e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \;\Rightarrow\; e^{y} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \;\Rightarrow\; y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

3.7.6 Derivarea functiilor hiperbolice

Ca si in cazul identitatilor analoage celor trigonometrice, si formulele de derivare sunt analoage celor de la functii trigonometrice. Derivatele celor doua functii hiperbolice de baza sunt:

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

Acestea pot fi deduse considerand definitiile functiilor hiperbolice.

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x$$

Desigur si integralele functiilor hiperbolice sunt date de aceste relatii.

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$