Capitol 3 **Numere complexe**

Numerele complexe apar de multe ori in matematica necesara fizicii.

3.1 *Necesitatea numerelor complexe*

Numerele complexe apar in mod direct in rezolvarea ecuatiilor polinomiale. Examinam un exemplu de ecuatie polinomiala de gradul doi:

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \tag{1}$$

Ecuatia are doua solutii, z_1 si z_2 , astfel incat

$$(z - z_1)(z - z_2) = 0 \tag{2}$$

Folosind formula familiara pentru calcularea radacinilor ecuatiei de gradul doi, scriem $z_{1,2}$:

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\times1\times5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} \tag{3}$$

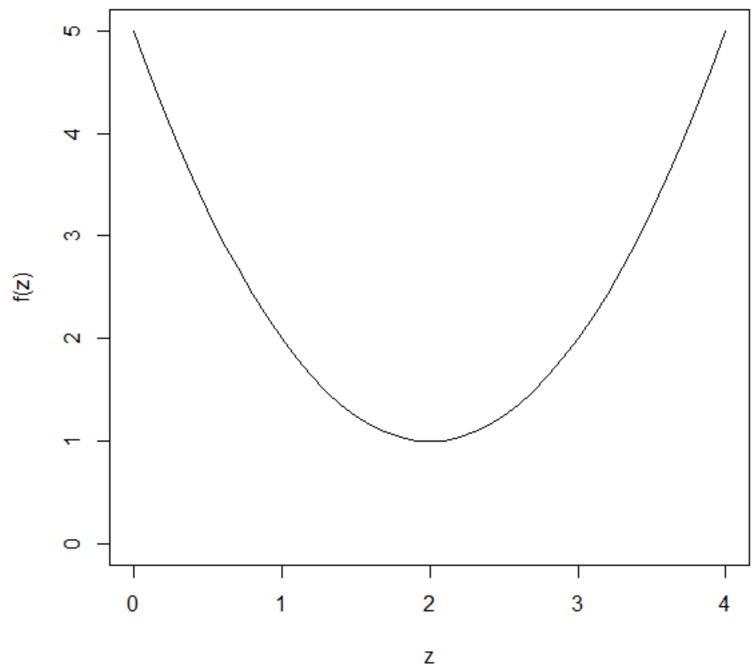
Ambele solutii contin radicalul unui numar negativ. Totusi, nu este adevarat sa spunem ca nu exista solutii pentru ecuatia data. Teorema fundamentala a algebrei afirma ca o ecuatie polinomiala de gradul doi totdeauna va avea doua solutii si acestea sunt date de relatia (3). Al doilea termen din solutiile (3) se numeste *termen imaginar* deoarece contine radicalul unui numar negativ; primul termen se numeste *termen real*. Solutia completa este o suma formata dintr-un termen real si un termen imaginar si se numeste *numar complex.* Graficul functiei $f(z) = z^2 - 4z + 5$ este redat in figura. Se vede ca graficul functiei nu intersecteaza axa z, ceea ce corespunde faptului ca ecuatia $f(z) = 0$ nu are solutii pur reale.

Alegerea simbolului *z* pentru variabila functiei polinomiale de gradul doi nu este arbitrara; reprezentarea conventionala a unui numar complex este *z*, unde *z* este suma unei parti reale *x* cu *i* inmultit cu o parte imaginara *y*, adica

$$z = x + iy$$

Unde *i* este folosit pentru a nota radicalul din -1. Partea reala *x* si partea imaginara *y* se noteaza in mod uzual cu $\mathrm{Re}\, z$ si $\mathrm{Im}\, z$, respectiv. Notam ca unii cercetatori fizicieni sau ingineri utilizeaza notatia *j* in locul notatiei *i*.

In exemplul nostru particular, $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1} = 2i$, si atunci cele doua solutii (3) sunt



Graficul functiei $f(z) = z^2 - 4z + 5$

$$z_{1,2} = 2 \pm \frac{2i}{2} = 2 \pm i$$

Astfel, pentru aceste doua solutii avem $x = 2$ si $y = \pm 1$.

Forma compacta a unui numar complex se scrie uneori:

$$z = (x, y)$$

In care, componentele lui *z* pot fi gandite ca fiind coordonatele unui punct in planul *xy*. O astfel de reprezentare grafica a numerelor complexe se numeste *diagram Argand*.

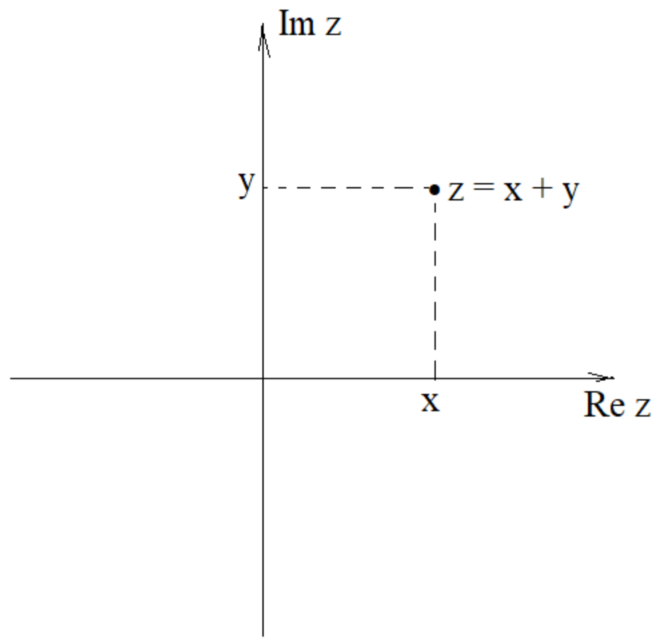


Diagrama Argand

Exemplul cu ecuatia de gradul doi poate fi generalizat la ecuatii polinomiale de grad mai mare decat doi, e.g. ecuatii de gradul trei, de gradul patru si asa mai departe. Pentru un polinom de gradul n, teorema fundamentala a algebrei afirma ca ecuatia va avea exact n solutii.

3.2 *Manipularea numerelor complexe*

3.2.1 Adunarea si scaderea

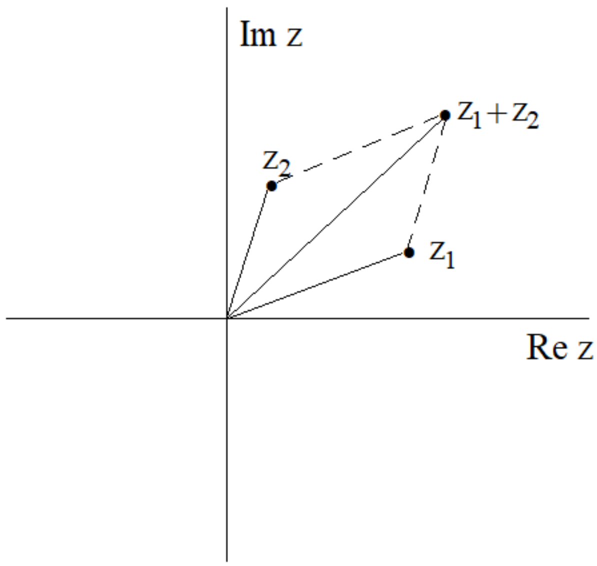
Adunarea a doua numere complexe, z_1 si z_2 in general are ca rezultat un numar complex. Componentele reale si cele imaginare se aduna separat si in maniara familiara de la adunarea numerelor reale:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Sau in notatia cu componente:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Reprezentarea Argand a adunarii a doua numere complexe este aratata in figura urmatoare:



Adunarea numerelor complexe

Folosind comutativitatea si asociativitatea adunarii partilor reale si imaginare separate, putem arata ca adunarea numerelor complexe este comutativa si asociativa, i.e.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

Deci, nu conteaza ordinea in care adunam numerele complexe.

Exemplu: Suma numerelor complexe $1+2i$, $3-4i$, $-2+i$

$$(1+2i)+(3-4i)+(-2+i)=2-i$$

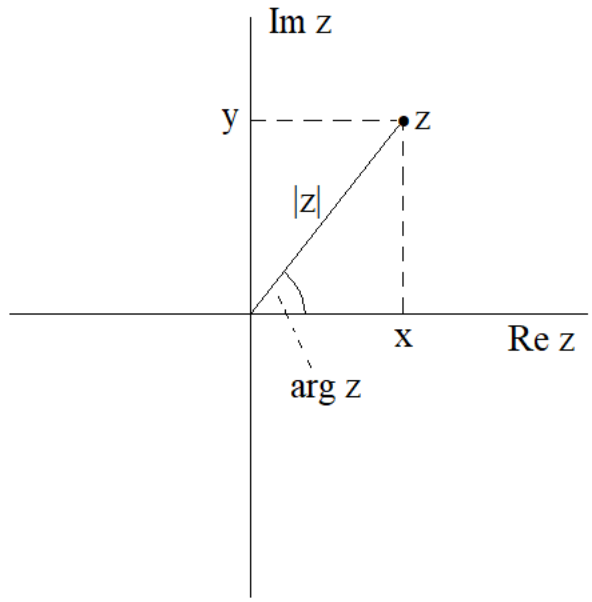
Scaderea numerelor complexe este similara adunarii numerelor complexe.

3.2.2 Modulul si argumentul

Modulul numarului complex z se noteaza cu $|z|$ si se defineste cu

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4}$$

Modulul numarului complex este distanta pana la origine a punctului corespunzator din diagram Argand, ca in figura.



Modulul si argumentul unui numar complex

Argumentul numarului complex z se noteaza cu $\arg z$ si se defineste cu:

$$\arg z = arctg\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5}$$

Se vede ca $\arg z$ este unghiul pe care-l face dreapta ce uneste originea cu z in diagram Argand cu sensul pozitiv al axei x. Trebuie tinut cont de semnele lui x si y la determinarea cadranului la care apartine $\arg z$. Astfel, de exemplu, daca x si y sunt ambii negativi atunci $\arg z$ se afla in domeniul $-\pi < \arg z < -\pi / 2$ si nu in primul cadran $0 < \arg z < \pi / 2$, cu toate ca in ambele cazuri valoarea raportului y/x este aceeasi.

Exemplu: Determinati modulul si argumentul numarului complex $z = 2 - 3i$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\arg z = arctg\left(\frac{y}{x}\right) = arctg\left(-\frac{3}{2}\right)$$

Cele doua unghiuri cu tangenta -3/2 sunt -0.9828 rad si 2.1588 rad. Deoarece $x = 2$ si $y = -3$, z se afla in cadranul 4; deci $z = -0.9828$ este raspunsul potrivit.

3.2.3 Inmultirea

Numerele complexe pot fi inmultite si rezultatul este in general un numar complex. Produsul a doua numere complexe z_1 si z_2 se determina inmultind termen cu termen numerele si folosind faptul ca $i^2 = -1$,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned} \tag{6}$$

Exemplu: Inmultiti numerele complexe $z_1 = 3 + 2i$ si $z_2 = -1 - 4i$.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3 + 2i)(-1 - 4i) \\ &= -3 - 2i - 12i - 8i^2 = 5 - 14i \end{aligned}$$

Inmultirea numerelor complexe este comutativa si asociativa:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \tag{8}$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \tag{9}$$

Produsul a doua numere complexe are si proprietatile:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \tag{10}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{11}$$

Verificati ca proprietatea (10) are loc in cazul $z_1 = 3+2i$ si $z_2 = -1-4i$

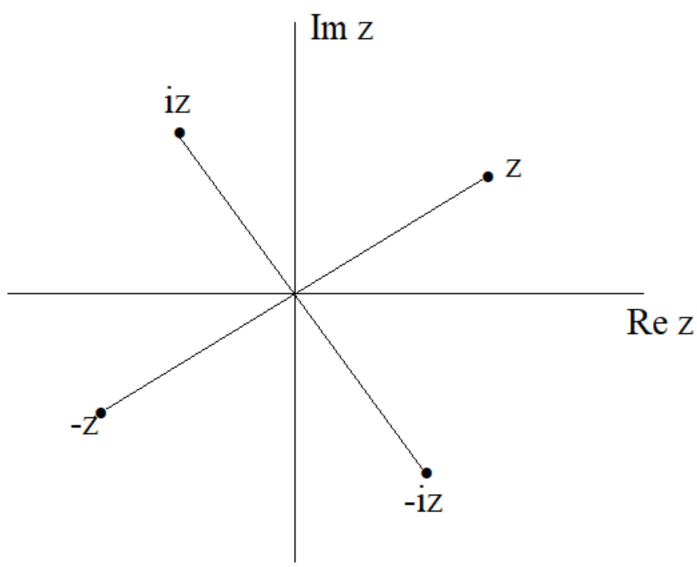
$$|z_1 z_2| = |5-14i| = \sqrt{5^2+(-14)^2} = \sqrt{221}$$

$$|z_1| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$$

$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2+(-4)^2} = \sqrt{17}$$

$$|z_1||z_2| = \sqrt{13}\sqrt{17} = \sqrt{221} = |z_1 z_2|$$

Acum examinam efectul multiplicarii cu ± 1 si $\pm i$ asupra unui numar complex *z*. Acesti patru factori au modulul unu si putem vedea imediat din proprietatea (10) ca inmultirea lui *z* cu alt numar complex cu modul unu are ca rezultat un produs cu acelasi modul ca si *z*. Din proprietatea (11) vedem ca daca inmultim *z* cu un numar complex atunci argumentul produsului este suma argumentului lui *z* cu argumentul factorului de inmultire. Astfel, daca inmultim *z* cu unitatea (care argument zero) lasam pe *z* nemodificat in modul si argument. Inmultind *z* cu -1 (care are argument π) duce la o rotatie cu unghi π , a dreptei ce uneste originea cu *z* in diagrama Argand. Similar, inmultirea cu *i* sau –*i* conduce la rotatii cu π/2 sau -π/2 respectiv. Aceasta interpretare geometrica a inmultirii este redata in figura.



Inmultirea unui numar complex cu ± 1 si $\pm i$

Exemplu: Folositi interpretarea geometrica a inmultirii cu *i* si determinati produsul $i(1-i)$.

Numarul complex $1-i$ are argumentul –π/4 si modul $\sqrt{2}$. Astfel, folosind proprietatile (10) si (11), produsul cu *i* are argumentul +π/4 si modulul nemodificat $\sqrt{2}$. Numarul complex cu modulul $\sqrt{2}$ si argumentul π/4 este $1+i$ si astfel

$$i(1-i)=1+i$$

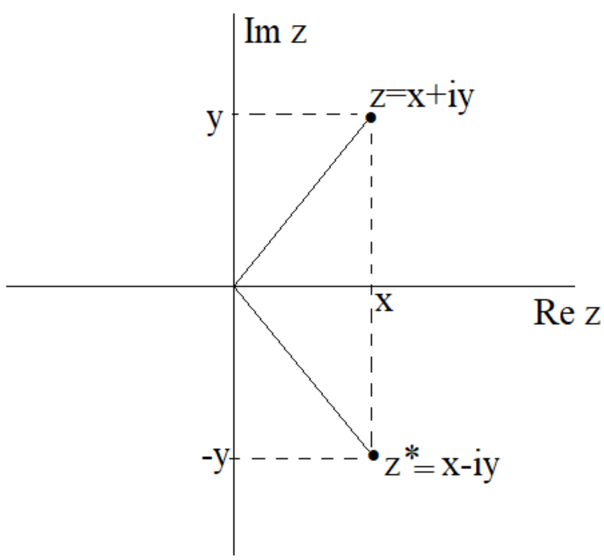
Relatie simplu de verificat prin inmultire directa.

3.2.4 Conjugare complexa

Daca numarul complex *z* are forma $x+iy$ atunci complex conjugatul notat z^*, poate fi determinat simplu schimband semnul partii imaginare, i.e. daca $z=x+iy$ atunci $z^*=x-iy$. Complex conjugatul lui *z*, z^* este un numar complex cu aceeasi modul ca *z* si inmultit cu *z* duce la un rezultat real pozitiv.

$$zz^*=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$$

Conjugarea complexa corespunde la o reflexie a lui *z* in axa reala, pe diagrama Argand.



Complex conjugatul, o reflexie fata de axa reala

Exercitiu: Calculati complex conjugatul lui $z = a + 2i + 3ib$

Numarul complex in forma standard este:

$$z = a + i(2 + 3b)$$

Inlocuim *i* cu –*i* , si obtinem:

$$z^* = a - i(2 + 3b)$$

In multe cazuri nu este necesara rearanjarea expresiei lui *z* in forma standard $x + iy$ pentru a calcula conjugatul complex.

Se poate arata ca au loc proprietatile:

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

Cu aceste rezultate, se poate deduce ca indiferent cat de complicata este expresia , cojugata sa complexa totdeauna poate fi gasita inlocuind fiecare *i* cu –*i* .

Exemplu: Determinati conjugatul complex al numarului complex $z = w^{(3y+2ix)}$ unde $w = x + 5i$.

$$z = (x + 5i)^{(3y+2ix)}$$

Acum, inlocuind fiecare *i* cu –*i* obtinem:

$$z^* = (x - 5i)^{(3y-2ix)}$$

Si alte proprietati ale conjugarii complexe pot fi determinate usor. Daca $z = x + iy$:

$$(z^*)^* = z \qquad (12)$$

$$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\,z = 2x \qquad (13)$$

$$z - z^* = 2i\,\mathrm{Im}\,z = 2iy \qquad (14)$$

$$\frac{z}{z^*} = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) + i\left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right) \tag{15}$$

3.2.5 Impartirea

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \tag{16}$$

Pentru a separa componenta reala si cea imaginara a raportului, inmultim numaratorul si numitorul cu conjugatul complex al numitorului. Operatia lasa numitorul real.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Relatia (15) se obtine in cazul $z_2 = z_1^*$, cu $x_2 = x_1$ si $y_2 = -y_1$.

Exemplu: Exprimati *z* in forma $x + iy$, daca

$$z = \frac{3 - 2i}{-1 + 4i}$$

$$z = \frac{3 - 2i}{-1 + 4i}\,\frac{-1 - 4i}{-1 - 4i} = \frac{-11 - 10i}{17} = -\frac{11}{17} - \frac{10}{17}i$$

Impartirea numerelor complexe are proprietatile:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{17}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \tag{18}$$

3.3 *Reprezentarea polara a numerelor complexe*

Desi considerarea unui numar complex ca suma dintre o parte reala si una imaginara este adesea utila, uneori reprezentarea polara ofera o manipulare mai usoara a acestora. Acest lucru foloseste *functia exponentiala complexa*, care este definita cu:

$$e^z = \exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \tag{19}$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \tag{20}$$

Este proprietate analoaga celei de la exponentiala reala.

Din (19) imediat urmeaza ca pentru $z = i\theta$, θ real,

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \dots \tag{21}$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \tag{22}$$

Si de aici avem:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{23}$$

Am folosit dezvoltarile in serie ale functiilor sin si cos. Aceasta ultima relatie se numeste *ecuatie Euler*. Din aceasta ecuatie obtinem si:

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta \text{ pentru } \forall n$$

Din ecuatia Euler si figura deducem:

$$re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = x + iy$$

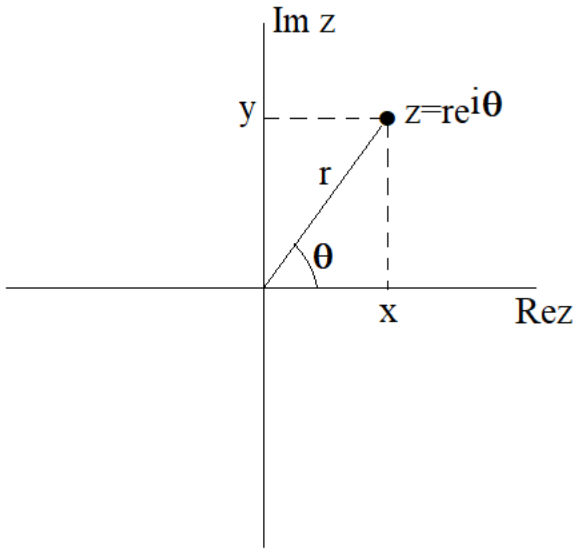
Astfel un numar complex poate fi reprezentat in forma polara cu:

$$z = re^{i\theta} \tag{24}$$

Din figura se observa ca *r* este $|z|$ si θ este arg z. In mod conventional, θ se afla in domeniul $-\pi < \theta \le \pi$, dar pentru ca o rotatie cu θ este identica cu o rotatie cu $\theta + 2n\pi$, unde *n* este orice intreg,

$$re^{i\theta} = re^{i(\theta + 2n\pi)}$$

Algebra folosita in reprezentarea polara este diferita de cea folosita in reprezentarea standard cu parte reala si parte imaginara, dar rezultatele sunt aceleasi. Unele operatii se dovedesc a fi mai simple in reprezentarea polara, altele mai complicate. Cea mai buna reprezentare pentru o problema particulara este dictata de manipularile necesare.



3.3.1 Inmultirea si impartirea in forma polara

Inmultirea si impartirea in forma polara sunt foarte simple. Produsul numerelor $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ si $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ este:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} \\ &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned} \tag{25}$$

Relatiile $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ si $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ decurg imediat.

Impartirea este la fel de simpla in forma polara. Catul numerelor $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ si $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ este:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{26}$$

Relatiile $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$ si $\arg(z_1 / z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$ decurg iar imediat.

3.4 *Formula lui de Moivre*

Deoarece $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, avem

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(27)

Acest rezultat se numeste *formula lui de Moivre* si este des folosit in manipularea numerelor complexe. Formula are loc indiferent daca *n* este real, imaginar sau complex.

Formula de Moivre are multe aplicatii. Dintre acestea: demonstrarea unor identitati trigonometrice, determinarea radacinilor de ordinul *n*, rezolvarea ecuatiilor polinomiale cu radacini complexe.

3.4.1 Identitati trigonometrice

Consideram expresii pentru functii trigonometrice de unghiuri multiple in termeni de polinoame in functii trigonometrice de unghiuri simple precum si invers expresii pentru functii trigonometrice de unghiuri simple in termeni de polinoame in functii trigonometrice de unghiuri multiple.

Exemple: Exprimati $\sin 3\theta$ si $\cos 3\theta$ in termeni de $\sin\theta$ si $\cos\theta$.

Folosim formula de Moivre:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i\sin 3\theta &= \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta i\sin\theta + 3\cos\theta i^2\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)\end{aligned}$$

Egalam partile reale si partile imaginare separate:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \qquad (28)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \qquad (29)\end{aligned}$$

Aceasta tehnica poate fi folosita la determinarea unor astfel de expresii pentru $\cos n\theta$ si $\sin n\theta$ pentru orice intreg *n* pozitiv.

Aratati ca pentru $z = e^{i\theta}$,

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta \qquad (30)$$

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta \qquad (31)$$

Aceste relatii rezulta din simple aplicari ale formulei de Moivre.

$$z^n + \frac{1}{z^n} = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n + \frac{1}{\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n}$$

$$= \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n + \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^{-n}$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta + \cos\left(-n\theta\right) + i\sin\left(-n\theta\right)$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta + \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$$= 2\cos n\theta$$

$$z^n - \frac{1}{z^n} = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n - \frac{1}{\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n}$$

$$= \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n - \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^{-n}$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta - \cos\left(-n\theta\right) - i\sin\left(-n\theta\right)$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta - \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$= 2i\sin n\theta$$

In cazul particular $n = 1$,

$$z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \qquad (32)$$

$$z - \frac{1}{z} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \qquad (33)$$

Exemplu: Determinati o expresie pentru $\cos^3\theta$ in termeni de $\cos 3\theta$ si $\cos\theta$.

Din (32)

$$\cos^3\theta = \frac{1}{2^3}\left(z + \frac{1}{z}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(z^3 + 3z + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^3}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \frac{3}{8}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Din (30) si (32)

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{8}\cos\theta$$

Acest rezultat este o simpla rearanjare a relatiei (28), dar cazurile care implica valori mai mari pentru *n* sunt mai bine manipulate prin metoda directa decat rearanjand expresia polinomiala de tip (28).