2.2.8 *Integrarea prin parti*

Integrarea prin parti este analogia integrala a regulii de derivare a produsului. Principiul integrarii prin parti este impartirea functiei mai complicate in produs de doua functii, dintre care cel putin una va fi mai simplu de integrat. Metoda se bazeaza pe regula de derivare a produsului.

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$$

unde u si v sunt functii de x. Integram,

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int \frac{du}{dx}vdx$$

Rearanjand termenii, avem

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int \frac{du}{dx}vdx$$

Sau in notatia cu diferentiale

$$\int udv = uv - \int vdu$$

1. Evaluati integrala: $I = \int x\sin x\, dx$

Cu notatiile precedente, identificam:

$$u = x \qquad\qquad dv = \sin x dx$$

$$du = dx \qquad\qquad v = -\cos x$$

$$I = \int x\sin x\, dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + c$$

2. Evaluati integral $I = \int x^3 e^{-x^2} dx$

$$u = x^2 \qquad\qquad dv = xe^{-x^2}dx$$

$$du = 2xdx \qquad\qquad v = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$I = \int x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) 2xdx$$

$$= -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} + \int e^{-x^2} xdx = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

3. Evaluati integrala $I = \int \ln xdx$

$$u = \ln x \qquad\qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad\qquad v = x$$

$$I = \int \ln xdx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$$

Uneori este necesar sa integram prin parti de mai mult ori. Cand facem asta putem regasi integral originala. In astfel de cazuri putem obtine o ecuatie algebrica pentru integral cautata.

4. $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\ dx$, $\quad \alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$

Considerăm $\qquad u = e^{\alpha x} \qquad\qquad dv = \cos\beta x\ dx$

$$du = \alpha e^{\alpha x}dx \qquad\qquad v = \frac{\sin\beta x}{\beta}$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\ dx = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx$$

$$u = e^{\alpha x} \qquad\qquad dv = \sin\beta x\ dx$$

$$du = \alpha e^{\alpha x}dx \qquad\qquad v = -\frac{\cos\beta x}{\beta}$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\ dx = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx\right)$$

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x}\cos\beta x\ dx = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x\right)+C$$

2.2.9 *Formule de recurenta*

Integrarea care foloseste formule de recurenta este un proces care presupune evaluarea unei integrale simple si apoi in stagii ulterioare s-o foloseasca la calcularea unei integrale mai complicate.

Folosind integrarea prin parti, determinati relatia dintre I_n si I_{n-1} unde

$$I_n=\int_0^1\left(1-x^3\right)^n dx$$

si n este un intreg pozitiv. Apoi evaluati $I_2=\int_0^1\left(1-x^3\right)^2 dx$

Scriem integrandul ca un produs:

$$I_n=\int_0^1\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)^{n-1}dx$$

$$=\int_0^1\left(1-x^3\right)^{n-1}dx-\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^{n-1}dx$$

$$I_n=I_{n-1}-\int_0^1\left(x\right)x^2\left(1-x^3\right)^{n-1}dx$$

Integram prin parti

$$u=x \qquad dv=x^2\left(1-x^3\right)^{n-1}dx$$

$$du=dx \qquad v=-\frac{1}{3}\frac{\left(1-x^3\right)^n}{n}$$

$$I_n=I_{n-1}+\frac{x}{3}\frac{\left(1-x^3\right)}{n}\Bigg|_0^1-\frac{1}{3n}\int_0^1\left(1-x^3\right)^n dx$$

$$I_n = I_{n-1} + 0 - \frac{1}{3n} I_n$$

$$I_n = \frac{3n}{3n+1} I_{n-1}$$

Avem relatia de recurenta care conecteaza doua integrale succesive. Acum daca evaluam I_0 , putem calcula apoi I_1, I_2 etc. Evaluarea lui I_0 este triviala:

$$I_0 = \int_0^1 \left(1-x^3\right)^0 dx = \int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1$$

$$I_1 = \frac{3\times 1}{3\times 1+1} I_0 = \frac{3}{4} \qquad I_2 = \frac{3\times 2}{3\times 2+1} I_1 = \frac{6}{7}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{14}$$

2.2.10 Integrale infinite si improprii

In definitia integralei definite nu a permis limite de integrare infinite(integrale infinite) sau $f(x)$ sa fie nemarginita intr-o parte a domeniului (integrale improprii).

De exemplu $f(x) = (2-x)^{-1/4}$ langa $x = 2$. Modificarea definitiei integralei va da o interpretare integralelor infinite si celor improprii.

In cazul in care o integrala $I = \int_a^b f(x)\,dx$ este integrala infinita in care b tinde la infinit, aceasta se defineste cu limita:

$$I = \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

Unde, F(x) este o primitiva pentru f(x) , iar limita se calculeaza dupa evaluarea integralei.

Evaluati integrala:

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2} dx$$

Prin integrare gasim:

$$F(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+a^2} + c$$

Si astfel,

$$I = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{2\left(b^2+a^2\right)}\right] - \left(\frac{-1}{2a^2}\right) = \frac{1}{2a^2}$$

In cazul integralelor improprii, adoptam o tehnica de excludere a domeniului de nemarginire din integrala. De exemplu, daca integrandul f(x) este intinit la $x = c$, $a \le c \le b$ atunci

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Evaluati integral $I = \int_0^2 (2-x)^{-1/4}dx$

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{4}{3}(2-x)^{3/4}\right]\Bigg|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{4}{3}\varepsilon^{3/4}\right] + \frac{4}{3}2^{3/4} = \frac{4}{3}2^{3/4}$$

2.2.11 Integrarea in coordonate polare

In coordonate polare ρ, ϕ o curba este definita distanta sa pana la origine ρ ca o functie de unghiul ϕ dintre dreapta ce uneste un punct de pe curba si origine, si axa x, adica $\rho = \rho(\phi)$. Aria unui element este :

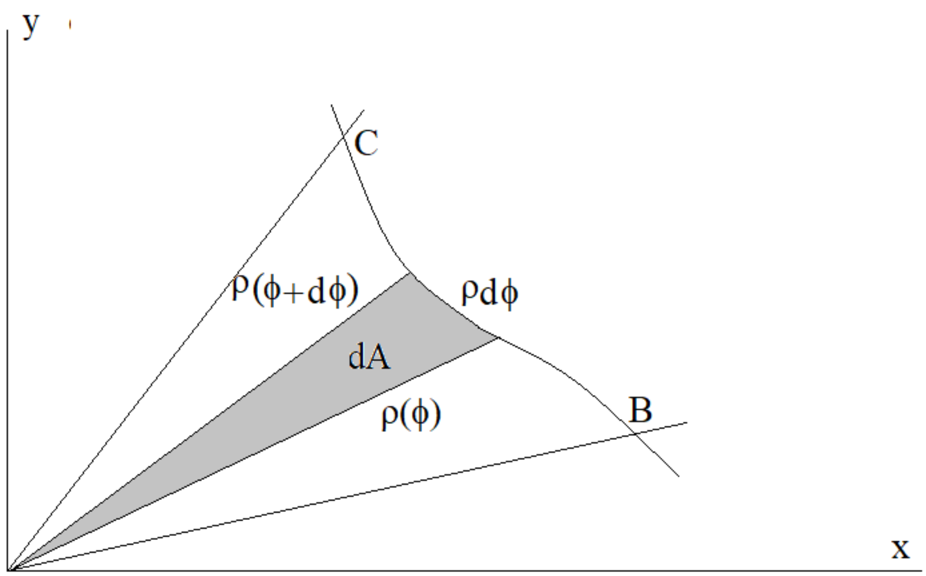
$$dA = \frac{1}{2}\rho^2 d\phi$$

Acest element de arie este reprezentat in figura urmatoare. In aceeasi figura, OB si OC fac unghiurile ϕ_1 si ϕ_2 cu axa x. Aria totala dintre unghiurile ϕ_1 si ϕ_2 este:

$$A = \int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{1}{2}\rho^2 d\phi$$

O observatie importanta este aceea ca aria unui cerc cu raza a este data de:

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 d\phi = \frac{1}{2} a^2 \left.\phi\right|_0^{2\pi} = \pi a^2$$



Ecuatia elipsei cu semiaxele a si b, in coordonate polare, este:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\phi}{a^2} + \frac{\sin^2\phi}{b^2}$$

Aflati aria A a elipsei.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 b^2}{b^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi} d\phi = 2a^2b^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{b^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi} d\phi$$

Pentru a evalua integrala facem schimbarea de variabila $t = tg\phi$.

$$\sin\phi = \frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin^2\phi + \cos^2\phi}} = \frac{tg\phi}{\sqrt{tg^2\phi + 1}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos\phi = \frac{\cos\phi}{\sqrt{\sin^2\phi + \cos^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{tg^2\phi + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$dt = \frac{1}{\cos^2\phi} d\phi = \frac{\cos^2\phi + \sin^2\phi}{\cos^2\phi} d\phi$$

$$dt = \left(1+t^2\right)d\phi$$

$$A = 2b^2\int_0^\infty \frac{1}{\left(b/a\right)^2+t^2}dt = 2b^2\frac{a}{b}arctg\frac{at}{b}\bigg|_0^\infty = \pi ab$$

2.2.12 Inegalitati integrale

Consideram functiile $f(x)$, $\phi_1(x)$ si $\phi_2(x)$ astfel incat $\phi_1(x) \le f(x) \le \phi_2(x)$ pentru orice x din domeniul $a \le x \le b$. Atunci are loc:

$$\int_a^b \phi_1(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \phi_2(x)dx$$

Aceste inegalitati ne permit sa estimam o integrala care este dificil de integrat explicit.

Exemplu: Aratati ca valoarea integralei:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2+x^3\right)^{1/2}}dx$$

Se afla intre 0.810 si 0.882

Observam ca pentru x in intervalul $0 \le x \le 1$, $0 \le x^3 \le x^2$. Atunci

$$\left(1+x^2\right)^{1/2} \le \left(1+x^2+x^3\right)^{1/2} \le \left(1+2x^2\right)^{1/2}$$

Si astfel,

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{1/2}} \ge \frac{1}{\left(1+x^2+x^3\right)^{1/2}} \ge \frac{1}{\left(1+2x^2\right)^{1/2}}$$

In consecinta,

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{1/2}}dx \ge \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2+x^3\right)^{1/2}}dx \ge \int_0^1 \frac{1}{\left(1+2x^2\right)^{1/2}}dx$$

Integrand in stanga si in dreapta obtinem,

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 \geq \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2+x^3\right)^{1/2}}dx \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x+\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}\right)\Big|_0^1$$

$$0.8814 \geq \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2+x^3\right)^{1/2}}dx \geq 0.8105$$

$$0.882 \geq I \geq 0.810$$

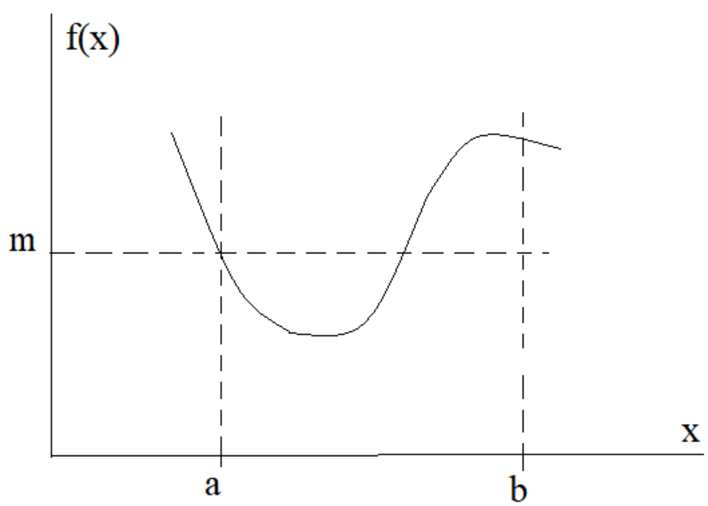
2.2.13 Aplicatii ale integrarii

- Valoarea medie a unei functii

Valoarea medie m a unei functii intre doua limite a si b se defineste cu

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Valoarea medie poate fi gandita ca inaltimea unui dreptunghi care are aceeasi arie (pe acelasi interval) ca si aria de sub curba $f(x)$.



Aflati valoarea medie m a functiei $f(x)=x^2$ intre limitele $x=2$ si $x=4$.

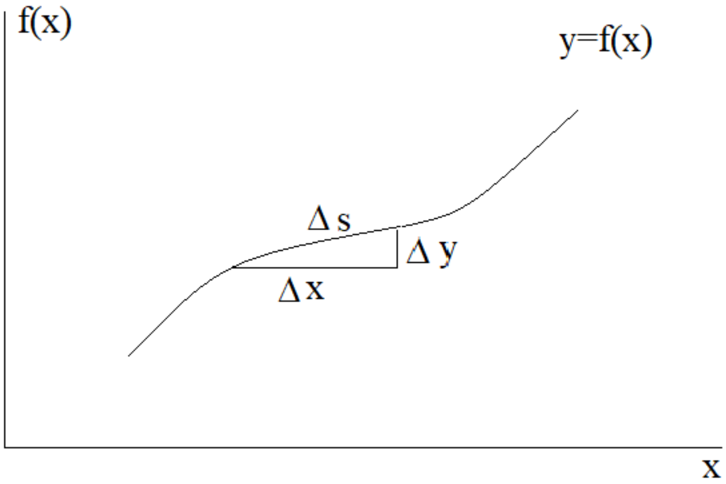
$$m=\frac{1}{4-2}\int_2^4 x^2dx=\frac{28}{3}$$

- Lungimea unei curbe

Determinarea ariei de sub o curba este un exemplu de folosire a integralei. Alt exemplu este calcularea lungimii unei curbe. Daca o curba este definita de $y = f(x)$ atunci distanta Δs de-a lungul curbei, care corespunde la mici modificari Δx si Δy in x si y este data de

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Relatie care deriva direct din teorema lui Pitagora. Impartim aceasta relatie cu Δx si apoi lasam $\Delta x \to 0$ si obtinem:



$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{2}$$

Lungimea totala s a curbei intre punctele $x = a$ si $x = b$ se obtine prin integrare:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{3}$$

Determinati lungimea curbei $y = x^{3/2}$ de la $x = 0$ la $x = 2$.

Cum $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{1/2}$, lungimea curbei s este:

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\ dx$$

$$= \frac{4}{9}\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{27}\left[\left(\frac{11}{2}\right)^{3/2} - 1\right]$$

- Suprafete de revolutie

Consideram suprafata S formata prin rotirea curbei $y = f(x)$ in jurul axei x. Aria suprafetei "guler" formata prin rotatia unui element ds al curbei , in jurul axei x este $2\pi y ds$. Atunci aria totala a suprafetei este

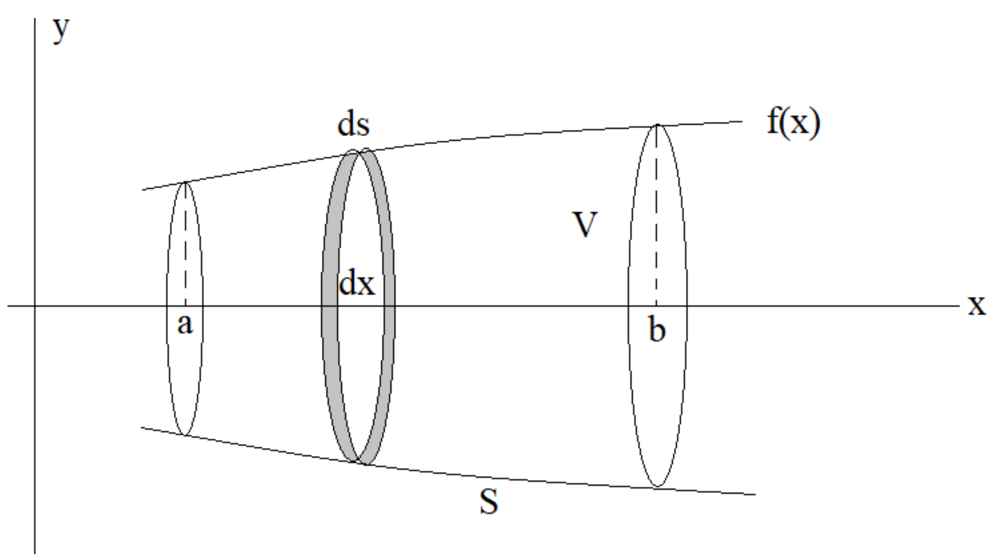
$$S = \int_a^b 2\pi y ds$$

Deoarece

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \qquad (4)$$

Aria suprafetei dintre planele $x = a$ si $x = b$ este:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \qquad (5)$$



Exercitiu: Determinati suprafata conului format prin rotatia dreptei $y = 2x$ in jurul axei x, intre $x = 0$ si $x = h$

Cu formula (5)

$$S = \int_0^h 2\pi 2x \sqrt{1 + \left(\frac{d(2x)}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^h 4\pi x\sqrt{1+2^2}\,dx = \int_0^h 4\sqrt{5}\pi x dx = 2\sqrt{5}\pi\, x^2\Big|_0^h = 2\sqrt{5}\pi h^2$$

Notam ca o suprafata de revolutie poate fi formata rotind o dreapta (sau curba) in jurul axei y. In acest caz aria suprafetei intre $y = a$ si $y = b$ este

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \qquad (6)$$

- Volume de revolutie

Volumul V inchis de curba $y = f(x)$ care se roteste in jurul axei x poate fi calculate. Volumul discului dintre x si x+dx este $dV = \pi y^2 dy$. Atunci volumul total dintre $x = a$ si $x = b$ este

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx \qquad (7)$$

Exercitiu: Calculati volumul unui con inchis de suprafata formata prin rotatia in jurul axei x a dreptei $y = 2x$ in jurul axei x, intre $x = 0$ si $x = h$.

$$V = \int_0^h \pi (2x)^2\, dx = 4\pi \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{4}{3}\pi h^3$$