2.2 Integrare

2.2.1 Integrala nedefinită

O funcţie $F(x)$ este o *primitivă* a funcţiei $f(x)$ pe intervalul (a,b), dacă $F(x)$ este diferenţiabilă în oricare punct din (a,b) şi $F'(x)=f(x)$ sau echivalent $dF(x)=f(x)dx$, $\forall x\in(a,b)$.

Exemple: **1)** $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ este o primitivă a funcţiei $f(x)=x^2$ pe intervalul $(-\infty,+\infty)$.

Intr-adevar, $F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2$

2) $F(x)=\arcsin x$ este o primitivă a funcţiei $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pe intervalul $(-1,+1)$.

Intr-adevăr,

$$F'(x)=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $F(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$ este o primitivă a funcţiei $f(x)=a^x$ pe intervalul $(-\infty,+\infty)$. Intr-adevăr,

$$F'(x)=\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'=\frac{a^x\ln a}{\ln a}=a^x$$

Dacă $F(x)$ este o *primitivă* a funcţiei $f(x)$ pe intervalul (a,b), atunci şi $\Phi(x)=F(x)+C$ este o *primitivă* a funcţiei $f(x)$ pe intervalul (a,b).

Definiţie: Mulţimea tuturor primitivelor unei funcţii $f(x)$ pe (a,b) se numeşte *integrala nedefinită* a funcţiei $f(x)$ pe intervalul (a,b) şi se notează:

$$\int \underbrace{f(x)\,dx}_{element\ de\ integrare} \quad \text{cu} \quad x=\text{variabilă de integrare.}$$

Dacă $F(x)$ este una din primitivele funcţiei $f(x)$ pe intervalul (a,b), atunci:

$$\int f(x)dx=F(x)+C\,, \quad C=\text{ constantă}$$

Observaţie: Dacă $f(x)$ este o funcţie *continuă* pe intervalul (a,b), atunci funcţia *admite primitive* pe intervalul (a,b) şi în consecinţă are integrală nedefinită pe (a,b).

Proprietăţile integralei nedefinite:

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

Intr-adevăr, $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

Intr-adevăr, relaţia are loc dacă avem în vedere definiţia diferenţialei.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$

Intr-adevăr, $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$

4. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \quad A = \text{ct.} \quad A \neq 0$

5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

6. $\int \left(\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \int f_k(x)dx, \quad A_k = \text{ct.}$

Integralele nedefinite ale funcţiilor elementare

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\qquad \alpha \neq -1$, $x > 0$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $\qquad x \neq 0$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $\qquad a > 0$, $a \neq 1$

$\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\ x + C$**,** $x \neq n\pi$**,** $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\ x + C$**,** $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$**,** $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$**,** $x \in (-1, +1)$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$**,** $x \in (-a, +a)$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, semnul **(-)** cere $|x| > |a|$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ x + C$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$**,** $a \neq 0$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$**,** $a \neq 0$

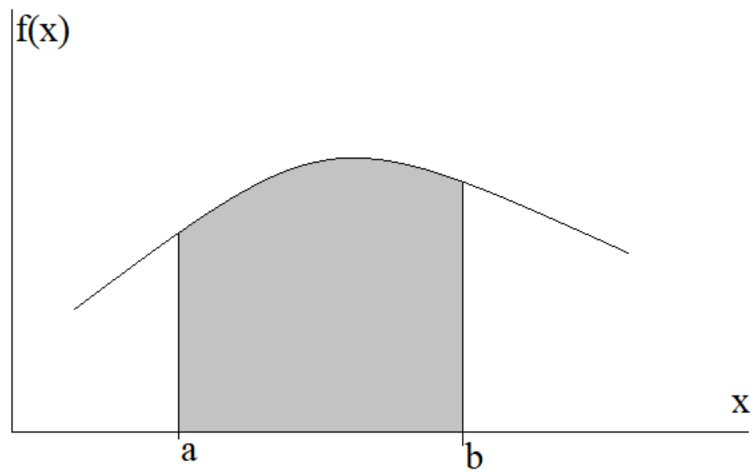
Observaţie: Operaţiile de diferenţiere şi integrare sunt diferite. Subliniem că diferenţiind funcţii elementare totdeauna obţinem funcţii elementare, în timp ce integrand funcţii elementare nu vom putea reprezenta totdeauna integralele nedefinite ale acestora în mulţimea funcţiilor elementare.

2.2.2 Integrala definita

Integrala definita a unei functii este aria de sub graficul curbei. In figura curba este graficul functiei $f(x)$, iar aria hasurata reprezinta cantitatea notata:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

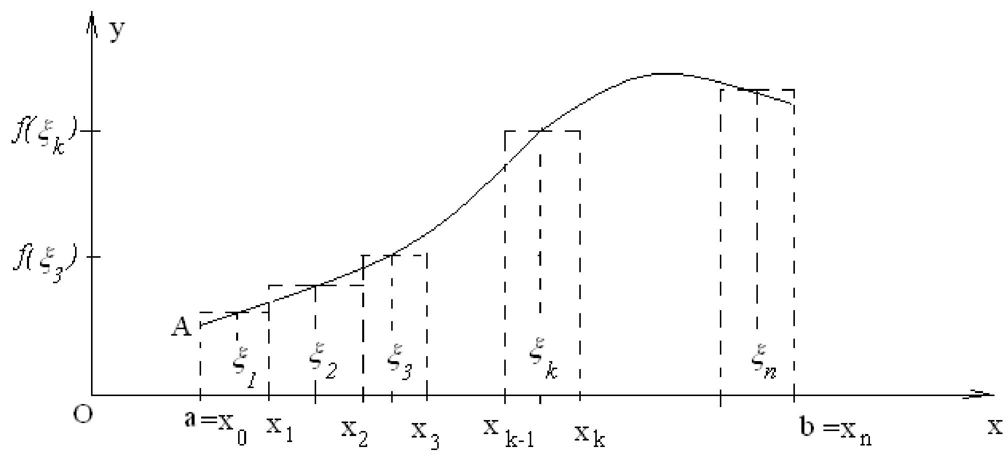
Expresia este cunoscuta ca integrala definita a lui $f(x)$ intre limita inferioara $x = a$ si limita superioara $x = b$ si $f(x)$ se numeste integrand.



Definitia integralei drept aria de sub graficul functiei nu este o definitie formala. Definitia formala a integralei I implica impartirea intervalului $a \le x \le b$ intr-un numar mare de subintervale considerand punctele x_i astfel incat $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, si apoi formarea sumei

$$S = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

unde ξ_i este un punct arbitrar care se afla in subintervalul $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.



Daca *n* tinde la infinit in orice fel , cu singura restrictie ca lungimea fiecarui subinterval $\left(x_{i-1}, x_i\right)$ sa tinda la zero, atunci *S* ar putea sau nu sa tinda la o limita unica *I*. Daca aceasta limita exista atunci integrala definita a lui $f\left(x\right)$ intre a si b se defineste ca fiind aceasta valoare *I*.

Daca nu exista limita unica integrala nu este definita.

Pentru functii continue si un interval $a \le x \le b$ finit, existenta limitei unice si deci a integralei definite este asigurata.

Exemplu: Evaluati cu definitia integrala: $I = \int_0^b x^2 dx$

Incepem prin a aproxima aria de sub curba $y = x^2$ intre *0* si *b* cu *n* dreptunghiuri de latime egala *h*. Daca consideram valorile functiei in punctele arbitrare din fiecare subinterval la capatul din stanga al subintervalului (la limita unui numar infinit de subintervale nu conteaza unde pozitionam punctele arbitrare), pentru a calcula inaltimea dreptunghiurilor corespunzatoare, atunci aria dreptulghiului al k-lea va fi $(kh)^2 h = k^2h^3$. Aria totala va fi

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} k^2h^3 = h^3 \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

Dar $h = b/n$ si astfel:

$$S = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) = \frac{b^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

Daca $n \to \infty$, $S \to b^3/3$ care este valoarea I a integralei.

Proprietati ale integralei definite:

$$\int_a^b 0dx = 0 \qquad \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

Combinand doua din proprietatile precedente avem:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Integrarea ca inversa a diferentierii

Integrala definita a fost definita ca aria de sub o curba intre doua puncte limita fixe. Pentru o functie continua $f(x)$, lasam limita superioara a integralei sale sa fie variabila si definim functia

$$F(x) = \int_a^x f(u)du \qquad (1)$$

In care limita inferioara *a* ramane fixa dar limita superioara *x* este acum variabila. Am notat variabila de integrare cu u pentru a nu avea aceeasi variabila si in integral si la limita superioara. $F(x)$ este o functie continua.

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(u)du$$

$$= \int_a^x f(u)du + \int_x^{x+\Delta x} f(u)du$$

$$= F(x) + \int_{x}^{x+\Delta x} f(u)\,du$$

Rearanjand si impartind cu Δx obtinem:

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} f(u)\,du$$

Daca $\Delta x \to 0$, in LHS avem dF/dx , iar in RHS $f(x)$ cu teorema de medie sau cand Δx este mic valoarea integralei din RHS este aproximativ $f(x)\Delta x$. Astfel,

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Sau substituind (1)

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{a}^{x} f(u)\,du\right] = f(x)$$

Din ultimele doua relatii se vede ca integrarea poate fi considerate ca o diferentiere inversa.

Observatie: $F(x)$ este o primitive a functiei $f(x)$. Limita inferioara *a* este arbitrara si orice functie $F(x)$ cu orice constanta *a* drept limita inferioara, este o primitiva a functiei $f(x)$. Oricare astfel de doua functii difera printr-o constanta.

Practic, integrala nedefinita a functiei $f(x)$ exista si poate fi scrisa:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$$\int f(x)\,dx = \int_{a}^{x} f(u)\,du + c$$

unde *c* este constanta de integrare.

Mai observam ca integrala definita a functiei $f(x)$ intre limitele fixe $x = a$ si $x = b$ poate fi scrisa in termeni de $F(x)$.

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{a} f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{b}$$

Din pacate, nu putem calcula intotdeauna integrala unei functii arbitrare, chiar daca existenta ei este asigurata de proprietatile functiei. In multe probleme fizice reale, integrarea exacta nu poate fi realizata si ne indreptam spre aproximari numerice pentru a rezolva problemele. Totusi, multe functii simple pot fi integrate si in paragrafele urmatoare prezentam cateva tehnici commune de integrare.

2.2.3 Integrarea prin inspectie(cu tabelul)
Multe din integralele functiilor elementare ar trebui memorate. De sesizat ca aceste integrale sunt inversele derivatelor.

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

$$\int a\cos bx\ dx = a\frac{\sin bx}{b} + c$$

$$\int a\sin bx dx = -a\frac{\cos bx}{b} + c$$

$$\int a\cos bx \sin^n bx\ dx = \frac{a\sin^{n+1} bx}{b(n+1)} + c$$

$$\int a\sin bx \cos^n bx\ dx = -\frac{a\cos^{n+1} bx}{b(n+1)} + c\ ,\quad n \neq -1$$

2.2.4 Integrarea functiilor sinusoidale
Integrale de tipul $\int \sin^n x\ dx$ si $\int \cos^n x\ dx$ pot fi calculate cu ajutorul unor relatii trigonometrice. Doua metode sunt aplicabile, una pentru cazul *n* impar si cealalta pentru *n* par.

$$I = \int \sin^5 x\ dx$$

Rescriem integrandul ca un produs de $\sin x$ si o putere para de $\sin x$, si apoi utilizam relatia $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^4 x \sin x\ dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x\ dx \\ &= \int \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right)\sin x\ dx \\ &= -\cos x + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

$$I = \int \cos^4 x\ dx$$

Rescriem integrandul ca o putere a expresiei $\cos^2 x$ si apoi folosim formula $\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)$

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx \end{aligned}$$

In ultimul termen, folosim aceeasi formula $\cos^2 2x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\left(x+2\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{4}\right)+c$$
$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$$

2.2.5 Integrare logaritmica
Integralele pentru care integrandul poate fi scris ca o fractie in care numaratorul este derivate numitorului poate fi evaluate folosind:

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln f(x)+c$$

Exemplu: $I=\int\frac{6x^2+2\cos x}{x^3+\sin x}dx$

$$I=2\int\frac{3x^2+\cos x}{x^3+\sin x}dx=2\ln\left(x^3+\sin x\right)+c$$

2.2.6 Integrarea folosind fractii partiale
Daca integrandul este o functie rationala (raport de doua polinoame), acesta se scrie ca o suma de fractii simple, usor de integrat.

Exemplu: $I=\int\frac{1}{x^2+x}dx$

$$I=\int\frac{1}{x(x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln|x|-\ln|x+1|=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$$

2.2.7 Integrarea prin substitutie
Uneori este posibil sa facem o substitutie de variabila care transforma o integrala complicata intr-o integrala mai simpla, care apoi poate fi integrate cu metode standard. Sunt multe substitutii folositoare si alegerea celei potrivite tine de experienta. Prezentam in cele ce urmeaza, cateva substitutii folositoare.

1. $I=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Facem substitutia $x=\sin u$ si diferentiem $dx=\cos u\ du$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos u\ du=\int\frac{1}{\sqrt{\cos^2 u}}\cos u\ du=\int du=u+c$$
$$I=\arcsin x+c$$

2. $I=\int \frac{1}{a+b\cos x}dx$ sau $I=\int \frac{1}{a+b\sin x}dx$

Facem substitutia $t=tg\frac{x}{2}$ si transformam astfel de intregale in integrala unui raport de polinoame in noua variabila t.

$$I= \ I=\int \frac{2}{1+3\cos x}dx$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$t=tg\frac{x}{2}$ diferentiem $dt=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1+t^2}{2}dx$

$$I=\int \frac{2}{1+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2}{2-t^2}dt$$

$$=\int \frac{2}{\left(\sqrt{2}-t\right)\left(\sqrt{2}+t\right)}dt=\int\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-t}+\frac{1}{\sqrt{2}+t}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}-t\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}+t\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+tg\frac{x}{2}}{\sqrt{2}-tg\frac{x}{2}}\right|+c$$

In exemplul final de evaluare a integralelor cu substitutie este metoda completarii patratului.

$$I=\int\frac{1}{x^2+4x+7}dx$$

$$I=\int\frac{1}{\left(x+2\right)^2+3}dx$$

Facem substitutia $y=x+2$ si diferentiem $dy=dx$

$$I=\int\frac{1}{y^2+3}dy=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+c$$