2.1.8 Puncte special ale unei functii

Pana acum am analizat puncte stationare care sunt definite cu $df/dx = 0$. Am aratat ca intr-un punct stationar de inflexiune d^2f/dx^2 este zero si schimba semnul.

Consideram acum puncte in care d^2f/dx^2 este zero si schimba semnul dar in care df/dx nu este zero. Astfel de puncte se numesc puncte de inflexiune generale sau simple puncte de inflexiune. Punctele de inflexiune stationare sunt un caz special de puncte de inflexiune in care df/dx este zero.

Intr-un punct de inflexiune general, graficul functiei se schimba de la covex la concav sau invers de la concav la convex. Tangenta la curba intr-un astfel de punct nu trebuie sa fie orizontala.

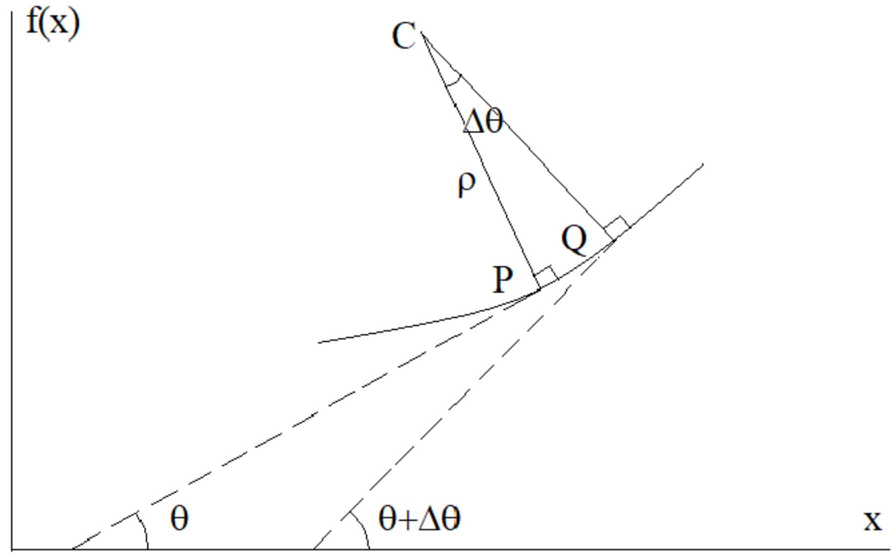
Determinarea punctelor stationare ale unei functii impreuna cu identificarea radacinilor acesteia, cu identificarea eventualelor asimptote sunt suficiente pentru schitarea graficului functiei.

2.1.9 Curbura unei functii

In paragraful precedent am aratat ca intr-un punct de inflexiune al unei functii $f(x)$, derivata secunda d^2f/dx^2 schimba semnul si trece prin valoarea nula. Corespunzator, graficul lui f prezinta o inversare a curburii in punctul de inflexiune. In acest paragraf prezentam o *masura* pentru curbura unei functii (a graficului sau), o masura aplicabila intr-un punct oarecare al functiei si nu numai in vecinatatea unui punct de inflexiune.

Fie θ unghiul facut de tangenta intr-un punct P de pe curba $f(x)$ cu sensul pozitiv al axei x si $tg\theta = \frac{df}{dx}$ evaluata in P. Consideram si tangenta la un punct vecin Q de pe curba, si presupunem ca aceasta face un unghi $\theta + \Delta\theta$ cu sensul pozitiv al axei x ca in figura.

Normalele in punctele P si Q, care sunt perpendiculare pe tangentele corespunzatoare, formeaza un unghi $\Delta\theta$. Mai mult, punctul de intersectie al normalelor, C va fi pozitia centrului unui cerc care aproximeaza arcul PQ. Acest cerc se numeste *cerc de curbura*.



Pentru un arc finit PQ, lungimile CP si CQ nu sunt, in general, egale, cum ar fi daca $y = f(x)$ ar fi chiar ecuatia unui cerc. Dar, daca Q tinde sa se apropie de P, adica $\Delta\theta \to 0$, aceste lungimi devin egale, si lungimea comuna va fi ρ, raza cercului si se numeste *raza de curbura*. Curba $f(x)$ si cercul de curbura au tangenta comuna in P si ambele se afla de aceeasi parte a tangentei. Inversa razei de curbura ρ^{-1} defineste *curbura* functiei $f(x)$ in punctul P.

Raza de curbura poate fi definita mai "matematic". Lungimea Δs a arcului PQ este aproximativ egala cu $\rho\Delta\theta$ si la limita $\Delta\theta \to 0$, aceasta relatie defineste raza de curbura:

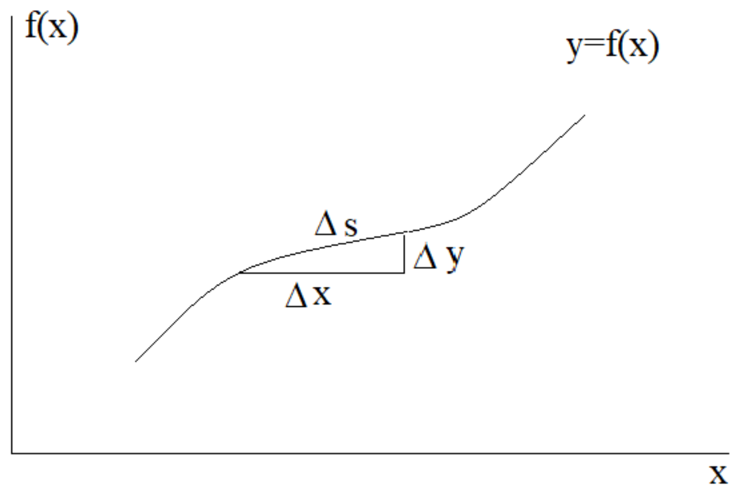
$$\rho = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{ds}{d\theta} \qquad (1)$$

Trebuie mentionat ca, daca s creste, atunci θ poate sa creasca sau sa scada in acord cu forma curbei local convexa sau concava. Acest lucru se reflecta in semnul lui ρ, care indica atunci si pozitia curbei si cercului de curbura relativ la tangenta comuna, deasupra acesteia sau sub aceasta. Astfel, o valoare negativa pentru ρ indica o curba local concava si o tangenta aflata deasupra curbei $f(x)$.

In cele ce urmeaza determinam o formula de calcul pentru ρ, care nu este in termeni de s si θ , ci in functie de x si $f(x)$. Formula rezulta din definitia (1), din proprietatea $tg\theta = \frac{df}{dx} = f'$ si din formula pentru viteza de variatie a lungimii arcului s in raport cu x.

Daca o curba este definita de $y = f(x)$, atunci distanta de-a lungul curbei Δs care corespunde la mici modificari Δx si Δy in x si y este data de teorema Pitagora

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$



Prin impartire la Δx si trecere la limita $\Delta x \to 0$ obtinem

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (2)$$

Sau
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f')^2}$$

Din definitia (1) cu "chain rule" urmeaza:

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{d\theta} \qquad (3)$$

Diferentiind in raport cu x, in ambele parti in relatia

$$tg\theta = \frac{df}{dx}$$

Obtinem
$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dx}=\frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dx}=\frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\left(1+tg^2\theta\right)\frac{d\theta}{dx}=\frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1+\left(f'\right)^2}{f''} \qquad (4)$$

Substituind (2) si (4) in (3) obtinem:

$$\rho=\frac{ds}{d\theta}=\frac{ds}{dx}\frac{dx}{d\theta}=\left[1+\left(f'\right)^2\right]^{1/2}\frac{1+\left(f'\right)^2}{f''}=\frac{\left[1+\left(f'\right)^2\right]^{3/2}}{f''}$$

$$\rho=\frac{\left[1+\left(f'\right)^2\right]^{3/2}}{f''} \qquad (5)$$

Observam ca numaratorul este pozitiv. Semnul razei de curbura este determinat numai de semnul derivatei secunde, in linie cu concavitatea curbei. Intr-un punct de inflexiune $d^2 f/dx^2$ este zero si atunci ρ este formal infinita si curbura lui $f(x)$ nula.

Exemplu: Aratati ca raza de curbura in punctul (x, y) de pe elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

are marimea $\left(a^4 y^2+b^4 x^2\right)^{3/2}/\left(a^4 b^4\right)$ si are semn opus semnului lui y. Verificati cazul special $a=b$ in care elipsa devine cerc.

Diferentiem ecuatia elipsei in raport cu x:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Mai derivam o data:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{y - xy'}{y^2}\right) = -\frac{b^2}{a^2 y^2}\left(y + x\frac{b^2 x}{a^2 y}\right) = -\frac{b^4}{a^2 y^3}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\right) = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

Observam ca $d^2 y / dx^2$, si deci ρ are semn opus lui y^3 sau y. Substituind relatia precedent in (5) obtinem marimea razei de curbura

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(f'\right)^2\right]^{3/2}}{f''} = \frac{\left[1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right]^{3/2}}{-\frac{b^4}{a^2 y^3}} = \frac{\left(a^4 y^2 + b^4 x^2\right)^{3/2}}{-a^4 b^4}$$

$$|\rho| = \frac{\left(a^4 y^2 + b^4 x^2\right)^{3/2}}{a^4 b^4}$$

In cazul special $a = b$, marimea razei de curbura se reduce la

$$|\rho| = \frac{\left(a^4 y^2 + a^4 x^2\right)^{3/2}}{a^4 a^4} = \frac{\left(y^2 + x^2\right)^{3/2}}{a^2}$$

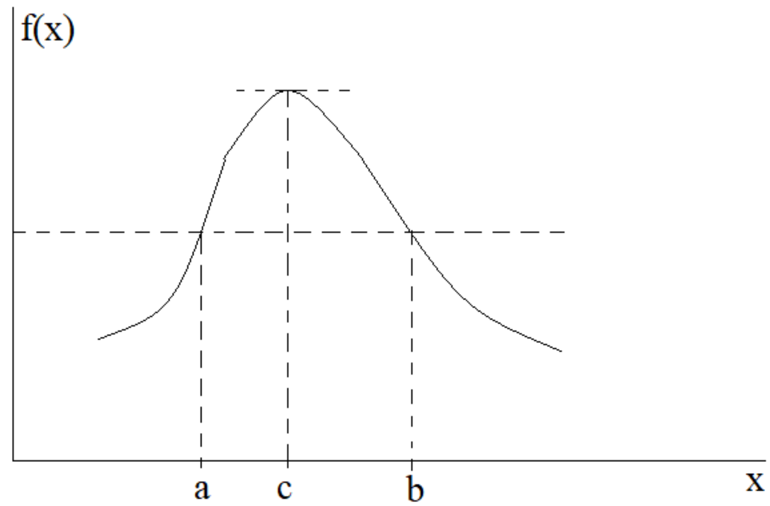
Si deoarece $x^2 + y^2 = a^2$ avem $|\rho| = a$ cum ne asteptam.

2.1.10 Teoreme de medie

Teorema Rolle

Teorema Rolle afirma ca daca o functie $f(x)$ este *continua* in intervalul $a \le x \le c$, este *derivabila* in intervalul $a < x < c$ si satisface $f(a) = f(c)$ atunci in cel putin un punct $x = b$ cu $a < b < c$, $f'(b) = 0$.

Cu alte cuvinte, Teorema Rolle afirma ca pentru o functie cu comportament decent (continua si derivabila) care are aceeasi valoare in doua puncte, fie exista cel putin un punct stationar intre aceste puncte ori functia este constanta intre ele. Demonstratia teoremei rezulta din desen.



Teorema Lagrange (Teorema valorii medii)

Teorema Lagrange afirma ca daca o functie $f(x)$ este *continua* in intervalul $a \le x \le c$, este *derivabila* in intervalul $a < x < c$ atunci are loc

$$f'(b) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \qquad (6)$$

in cel putin un punct *b* cu $a < b < c$.

Cu alte cuvinte, Teorema Lagrange afirma ca pentru o functie cu comportament decent (continua si derivabila) cresterea segmentului care uneste doua puncte de pe curba este egala cu panta tangentei la curba in cel putin un punct intermediar.

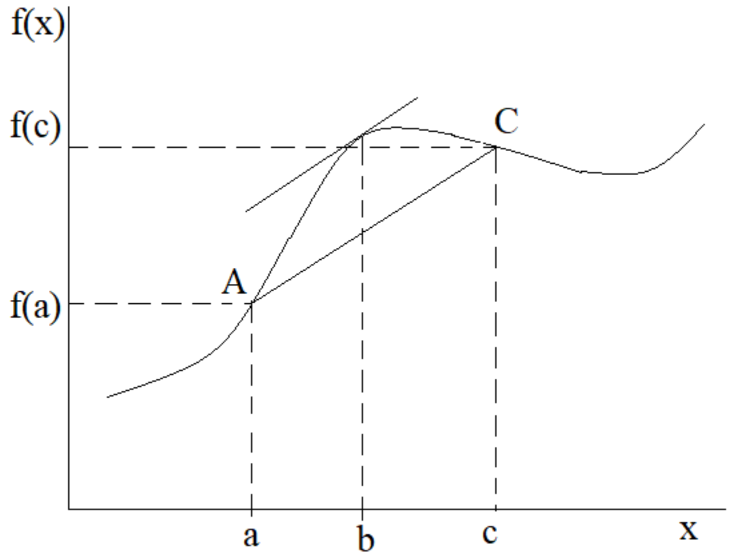
Demonstratia teoremei Lagrange:

Ecuatia dreptei AC: $\frac{y - y_A}{y_C - y_A} = \frac{x - x_A}{x_C - x_A}$

$$g(x) = f(a) + (x - a)\frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

Diferenta dintre curba $f(x)$ si dreapta AC este:

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$



Deoarece curba si dreapta AC se intersecteaza in A si C , $h(x)=0$ in aceste puncte. Aplicand teorema lui Rolle $h'(x)=0$ pentru cel putin un punct b intre a si c. Derivam expresia functiei $h(x)$,

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

In b aceasta derivata este nula:

$$f'(b)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

Exemple de aplicare: Aplicati teorema Rolle urmatoarelor functii $f(x)$ cu a si c alese astfel incat $f(a)=f(c)=0$ a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) x^2-3x+2 d) x^2+7x+3 e) $2x^3-9x^2-24x+k$.

Cu Teorema Rolle nu determinam solutii precise.

Exemplu: Aplicam Teorema Lagrange functiei $f(x)=x^2$. Atunci, exista b in intervalul $a<b<c$ astfel incat

$$f(c)-f(a)=(c-a)f'(b)$$

$$c^2 - a^2 = (c-a)2b$$

$$b = \frac{a+c}{2}$$

Alt exemplu: Aplicam Teorema Lagrange functiei $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 6$ intre doua valori ale lui x 1 si 2. Trebuie sa verificam daca exista un x in intervalul $1 < x < 2$ care verifica:

$$f(2) - f(1) = (2-1) f'(x)$$

$$18 - 1 = 3x^2 + 4x + 4$$

Verificam daca $3x^2 + 4x + 4 - 17$ ia valori cu semne diferite in $x = 1$ si $x = 2$

Alt exemplu: Aplicam Teorema Lagrange la stabilirea unor inegalitati.

$f(x) = \ln x$ Pentru argumente pozitive putem scrie

$$\frac{\ln c - \ln a}{c - a} = \frac{1}{b}$$

Pentru un b in intervalul $0 < a < b < c$. Mai mult, cum $a < b < c$ avem $c^{-1} < b^{-1} < a^{-1}$

$$\frac{1}{c} < \frac{\ln c - \ln a}{c - a} < \frac{1}{a}$$

Inmultim cu $c - a$

$$\frac{c-a}{c} < \ln c - \ln a < \frac{c-a}{a}$$

Notam $c/a = x$, $$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

Aplicam Teorema Lagrange functiei $f(x) = \sin x$

$$\frac{\sin c - \sin a}{c - a} = \cos b$$

Pentru un b aflat intre a si c. Daca a si c sunt restrictionati la domeniul $0 \le a < c \le \pi$, in care cosinusul este monoton descrescator

$$\cos c < \cos b < \cos a$$

$$\cos c < \frac{\sin c - \sin a}{c - a} < \cos a$$