2.1 Calcul diferential

2.1.1 Definitia derivatei

Prin definitie prima derivate a functiei $f(x)$ este

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{2.1}$$

Cu conditia ca aceasta limita sa existe. Limita va depinde in general de valoarea lui x. Daca limita nu exista intr-un punct $x=a$, spunem ca functia nu are derivata in a. O functie care este derivabila in *a* este in mod necesar continua in *a*. Implicatia reciproca nu are loc (exemple grafice).

In apropierea unui punct P de pe graficul functiei, in care aceasta are derivata, putem aproxima cesterea (modificarea) valorii functiei Δf , care rezulta datorita unei mici modificari Δx in *x* cu

$$\Delta f \approx \frac{df(x)}{dx}\Delta x \tag{2.2}$$

Aproximatia se imbunatateste daca valoarea lui Δx scade. La limita in care Δx define infinitesimal , notam Δx cu dx si relatia precedent devine:

$$df=\frac{df(x)}{dx}dx \tag{2.3}$$

Aceasta relatie coreleaza modificarea infinitezimala a functiei *df* cu modificarea infinitezimala *dx* care o cauzeaza. Cu alte cuvinte, diferentiala este partea principala a cresterii functiei relativ la cresterea dx a argumentului. Diferentiala functiei $y=f(x)$ se poate scrie si in forma:

$$dy=f'(x)dx$$

Exemplu: Determinati diferentiala functiei $y=e^{-x^2}$ pentru o valoare arbitrara a argumentului si a cresterii functiei.

Putem defini derivata secunda inlocuind in definitia (2.1) $f(x)$ cu $f'(x)$

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x} \tag{2.4}$$

Un exemplu din fizica pentru derivate secunda este derivata secunda a spatiului parcurs de o particula in raport cu timpul. Prima derivata a spatiului parcurs ne da viteza particulei iar a doua derivata ne da acceleratia.

Putem continua in aceeasi maniera sis a definim derivata de ordinul n a functiei $f(x)$:

$$f^{(n)}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \tag{2.5}$$

Practic, nu vom deriva folosind definitia cu limita, ci vom memora derivatele functiilor elementare. In plus vom folosi cateva tehnici de derivare pentru a le aplica unor derivate mai complicate.

Listam derivatele unor functii elementare care se pot obtine cu definitia ca si in exemplele din cursul precedent x^2, $\sin x$.

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right)=ae^{ax} \qquad \frac{d}{dx}(\ln ax)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin ax)=a\cos(ax) \qquad \frac{d}{dx}(\cos ax)=-a\sin ax$$

$$\frac{d}{dx}(tg\ ax)=a\frac{1}{\cos^2 ax}=a\sec^2(ax) \qquad \frac{d}{dx}(ctg\ ax)=-a\frac{1}{\sin^2 ax}=-a\ \mathrm{co}\sec^2(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\arccos\frac{x}{a}\right)=-\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(arctg\,\frac{x}{a}\right)=\frac{a}{a^2+x^2}$$

Derivarea cu definitia (2.1) subliniaza definitia derivatei ca o crestere a functiei corespunzatoare unei cresteri infinitezimale a argumentului. Intoarcerea la definitie insa nu e practica. In loc, se folosesc tehnici in care derivatele functiilor elementare listate sunt simple “caramizi” in calcularea unor derivate mai complicate.

2.1.2 Derivarea produselor

$f(x)=u(x)v(x)$

De exemplu $f(x)=x^3\sin x$; putem considera $u(x)=x^3$, $v(x)=\sin x$. Desigur separarea nu este unica. Scopul este sa impartim functia in parti pentru care cunostem derivata.

$$f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)$$

$$u(x+\Delta x)\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]+\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]v(x)$$

Din definitia derivatei avem:

$$\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{u(x+\Delta x)\left[\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]+\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right]v(x)\right\}$$

La limita $\Delta x\to 0$, termenii din parantezele drepte devin dv/dx si du/dx si $u(x+\Delta x)$ devine $u(x)$. In consecinta obtinem:

$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}\left[u(x)v(x)\right]=u(x)\frac{dv(x)}{dx}+\frac{du(x)}{dx}v(x) \qquad (2.6)$$

$$f'=(uv)'=uv'+u'v \qquad (2.7)$$

Exemplu: Determinati derivata in raport cu x a functiei $f(x)=x^3\sin x$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\sin x\right)=x^3\frac{d}{dx}(\sin x)+\frac{d}{dx}\left(x^3\right)\sin x$$

$$=x^3\cos x+3x^2\sin x$$

Regula produsului poate fi extinsa la trei sau mai multe functii.

$$f(x)=u(x)v(x)w(x) \qquad (2.8)$$

$$\frac{df}{dx}=u\frac{d(vw)}{dx}+\frac{du}{dx}vw$$

$$\frac{d}{dx}(uvw)=uv\frac{dw}{dx}+u\frac{dv}{dx}w+\frac{du}{dx}vw \qquad (2.9)$$

$$(uvw)'=uvw'+uv'w+u'vw \qquad (2.10)$$

Aceasta regula de derivare poate fi extinsa la produse care contin n factori.

2.1.3 Regula de derivare a functiilor compuse

Uneori trebuie sa derivam o functie al carui argument este la randul sau functie. De exemplu, $f(x)=\left(3+x^2\right)^3=u(x)^3$ unde $u(x)=3+x^2$. Daca Δf , Δu si Δx sunt cantitati mici finite

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Cand cantitatile devin infiniitezimale, obtinem

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx} \qquad (2.11)$$

Aceasta este regula de derivare a functiei compuse (chain rule)

Exemplu: Derivati $f(x)=\left(3+x^2\right)^3$, $f(x)=e^{\sin x}$, $f(x)=\sin(10x)$, $f(x)=\ln|x|, x\neq 0$

Rescriem $f(x)=u^3$, unde $u(x)=3+x^2$ si aplicand (2.11) avem

$$\frac{df}{dx}=3u^2\frac{du}{dx}=3\left(3+x^2\right)^2 2x=6x\left(3+x^2\right)^2$$

Derivata in raport cu x a functiei $f(x)=1/v(x)$ poate fi obtinuta rescriind functia $f(x)=v^{-1}$ si aplicand (2.11):

$$\frac{df}{dx}=-v^{-2}\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} \qquad (2.12)$$

"Chain rule" este utila si la calcularea derivatei unei functii f in raport cu x cand atat x cat si f sunt definiti ca functii de o variabila sau parametru t.

Exemplu: Determinati derivata in raport cu x a functiei $f(t)=2at$, unde $x=at^2$.

Desigur putem elimina parametrul t si apoi sa derivam f in raport cu x, dar mai rapid:

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{df}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=2a\frac{1}{2at}=\frac{1}{t}$$

Consideram un cerc definit parametric:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -ctgt$$

2.1.4 Derivarea raportului

Aplicand regula (2.6) de derivare a produsului la o functie

$$f(x) = u(x)\left[\frac{1}{v(x)}\right]$$

Putem obtine regula de derivare a raportului de doua functii:

$$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = u\left(\frac{1}{v}\right)' + u'\left(\frac{1}{v}\right) = u\left(-\frac{v'}{v^2}\right) + \frac{u'}{v}$$

$$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{13}$$

Exemplu: Determinati derivata in raport cu x a functiei $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

2.1.5 Diferentierea implicita

Pana acum am derivate numai functii scrise in forma $y = f(x)$ explicita. Totusi, nu intotdeauna relatiile sunt prezentate in aceasta forma simpla. De exemplu, consideram relatia $x^3 - 3xy + y^3 = 4$. In acest caz nu este posibil sa rearanjam y ca o functie de x. Prin derivare termen cu termen in raport cu x (derivare implicita), putem obtine derivate lui y.

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - \frac{d}{dx}(3xy) + \frac{d}{dx}\left(y^3\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$3x^2 - \left(3x\frac{dy}{dx} + 3y\right) + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Notam ca dy/dx este o functie de ambele variabile x si y si nu poate fi exprimata ca o functie doar de x.

2.1.6 Diferentiere logaritmica

Se foloseste la derivarea unei functii de tip putere-exponentiala.

Exemplu: $y = a^x$

Logaritmam si apoi diferentiem implicit:

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a \;\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \ln a = a^x \ln a$$

Mai general.

$$y = \left[u(x)\right]^{v(x)}$$

unde $u(x) > 0$ şi $u(x)$, $v(x)$ sunt diferenţiabile.

$$\ln y = v(x) \ln u(x)$$

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$y' = \left[u(x)\right]^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

Exemplu: $y = x^x$, $x > 0$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = x^x \left(\ln x + 1\right)$$

2.1.7 Teorema Leibnitz

Stim cum sa derivam produsul a doua sau mai multe functii. Teorema Leibnitz ne ajuta sa calculam derivatele de ordin superior pentru produse. Consideram:

$$f(x) = u(x)v(x)$$

$$f' = uv' + u'v$$

$$f'' = \left(uv'' + u'v'\right) + \left(u'v' + u''v'\right)$$

$$= uv'' + 2u'v' + u''v$$

$$f''' = uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''$$

$$f^{(4)} = uv^{(4)} + 4u'v''' + 6u''v'' + 4u'''v' + u^{(4)}v$$

Aceste rezultate sugereaza rezultatul general:

$$f^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} C_n^r u^{(r)} v^{(n-r)} \qquad (2.14)$$

Aceasta relatie poate fi demonstrata prin inductie.

Presupunem relatia (2.14) adevarata pentru $n = N$

$$f^{(N)} = \sum_{r=0}^{N} C_N^r u^{(r)} v^{(N-r)}$$

$$f^{(N+1)} = \sum_{r=0}^{N} C_N^r \frac{d}{dx}\left(u^{(r)} v^{(N-r)}\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{N} C_N^r \left[u^{(r)} v^{(N-r+1)} + u^{(r+1)} v^{(N-r)}\right]$$

$$=\sum_{s=0}^{N} C_N^s u^{(s)} v^{(N+1-s)} + \sum_{s=1}^{N+1} C_N^{s-1} u^{(s)} v^{(N+1-s)}$$

Unde am substituit indicele de sumare s pentru r in prima suma si pentru r+1 in a doua suma. Separam primul termen din prima suma , ultimul termen din a doua suma si folosim relatia:

$$C_N^s + C_N^{s-1} = C_{N+1}^s$$

$$f^{(N+1)} = C_N^0 u^{(0)} v^{(N+1)} + \sum_{s=1}^{N} C_{N+1}^s u^{(s)} v^{(N+1-s)} + C_N^N u^{(N+1)} v^{(0)}$$

$$f^{(N+1)} = C_{N+1}^0 u^{(0)} v^{(N+1)} + \sum_{s=1}^{N} C_{N+1}^s u^{(s)} v^{(N+1-s)} + C_{N+1}^{N+1} u^{(N+1)} v^{(0)}$$

$$f^{(N+1)} = \sum_{s=0}^{N+1} C_{N+1}^s u^{(s)} v^{(N+1-s)}$$

Deci (2.14) are loc pentru $n = N+1$. Pentru $n=1$ este chiar regula de derivare a produsului si deci relatia are loc pentru orice n.

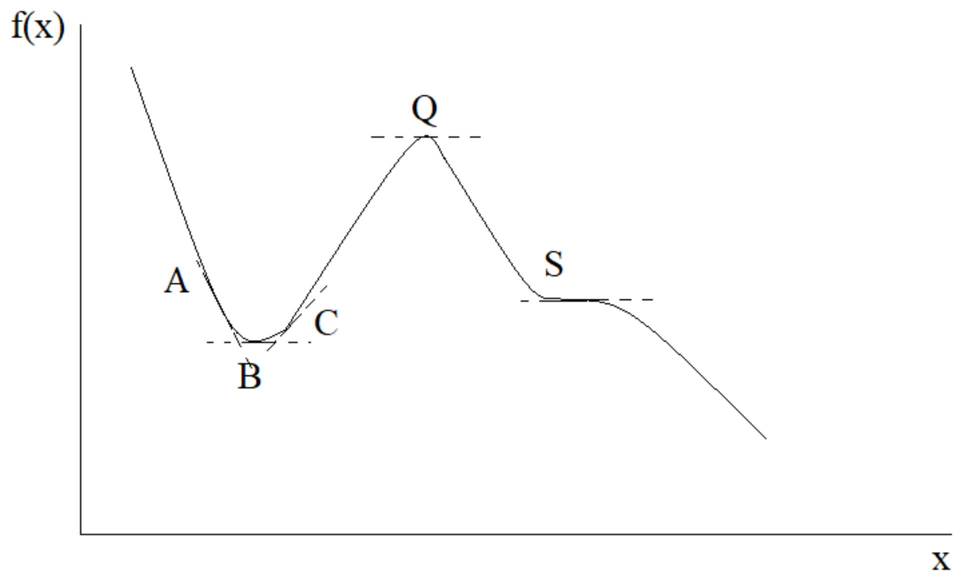
Exemplu: Calculati derivata a treia a functiei $f(x) = x^3 \sin x$

Calculati $f^{(1001)}$ a functiei $f(x) = e^x x^2$

2.1.8 Puncte speciale ale unei functii

Am interpretat derivata ca si cresterea unei functii intr-un punct. Daca cresterea functiei este nula intr-un punct particular x, atunci spunem ca functia este *stationara* in punctul respectiv. Grafic, avem o tangenta la curba orizontala intr-un astfel de punct.

Punctele stationare pot fi impartite in trei categorii si un exemplu din fiecare categorie este prezentat in figura urmatoare.



Punctul B este un *minim* pentru ca functia creste in valoare in ambele directii pornind din B. Punctul Q este un *maxim* pentru ca functia scade in ambele directii cand ne indepartam de Q. B nu este minim absolut, iar Q nu este maxim absolut. Acestea sunt *puncte de extrem* (maxim sau minim) locale.

Al treilea tip de punct stationar este *punctul stationar de inflexiune* S. In acest caz functia scade in sensul pozitiv al axei x si creste in sens negativ al axei x, deci S nu este nici maxim, nici minim. Graficul functiei are tangent orizontala in acest punct.

Distinctia intre cele trei tipuri de puncte stationare poate fi facuta in termini matematici. Toate punctele stationare sunt caracterizate de $df/dx=0$. In cazul punctului de minim B , panta adica df/dx , se modifica de la o valoare negative in A spre o valoare pozitiva in C la trecerea prin B. Astfel df/dx creste continuu si astfel a doua derivata d^2f/dx^2 trebuie sa fie pozitiva. Situatia din punctul de maxim Q impune o derivate secunda d^2f/dx^2 negativa.

Mai putin intuitiv este faptul ca in S , d^2f/dx^2 este nula. La stanga lui S functia este convexa cu df/dx crescatoare deci $d^2f/dx^2>0$. La dreapta lui S curba este concava cu df/dx descrescatoare deci $d^2f/dx^2<0$.

In rezumat, intr-un punct stationar $df/dx=0$ si

1. pentru un minim $d^2f/dx^2>0$,
2. pentru un maxim $d^2f/dx^2<0$,

3. pentru un punct stationar de inflexiune $d^2 f / dx^2 = 0$ si $d^2 f / dx^2$ schimba semnul in punct.

In cazul 3 al punctului stationar de inflexiune pentru ca $d^2 f / dx^2$ sa schimbe semnul in punct , in mod normal cerem $d^3 f / dx^3 \neq 0$ in punct. Aceasta conditie poate sa nu fie indeplinita la unele functii , dar in general daca prima derivata nenula a unei functii $f(x)$ in punctul stationar este $f^{(n)}$ atunci daca n este par punctul este un extrem si daca n este impar atunci punctul este punct stationar de inflexiune.

Exemplu: Determinati pozitia si natura punctelor stationare ale functiei:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2$$

Criteriul pentru puncta stationare este $df / dx = 0$, si atunci avem

$$\frac{df}{dx} = 6x^2 - 6x - 36 = 0$$

$$6(x-3)(x+2) = 0$$

Atunci punctele stationare sunt $x = 3$ si $x = -2$. Pentru a determina natura unui punct stationar evaluam derivate secunda $d^2 f / dx^2$:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 12x - 6$$

Examinam fiecare punct stationar. Pentru $x = 3$, $d^2 f / dx^2 = 30$. Deoarece aceasta valoare este pozitiva, concluzionam ca $x = 3$ este minm. Similar, pentru $x = -2$, $d^2 f / dx^2 = -30$ si $x = -2$ este un maxim.