1.5 Dezvoltari Binomiale

Am intalnit deja functii ce au forma unei sume sau diferente ridicate la o putere, e.g $(x-\alpha)^n$. De multe ori vrem sa scriem astfel de puteri ca un polinom. Pentru a generaliza aceasta discutie, vom considera dezvoltarea functiei $f(x)=(x+y)^m$, unde *x* si *y* pot fi constant, variabile sau functii si pentru moment *n* este un intreg pozitiv.

Sa ne facem o idee:

$$(x+y)^1 = x+y$$

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2+2xy+y^2$$

$$(x+y)^3 = (x+y)\left(x^2+2xy+y^2\right) = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$(x+y)^4 = (x+y)\left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right) = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

Aceasta nu este o formula generala, dar regulile ce se observa in scrierea termenilor indica un numar de $n+1$ termini intr-o formula generala, si puterile lui x si y in fiecare termen au suma n; coeficientii primului si ultimului termen sunt unu, in timp ce al doilea si penultimul termen au coeficientii n.

Expresia generala a dezvoltarii binomiale pentru puterea n este data de relatia:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \qquad (1)$$

unde C_n^k sunt coeficientii binomiali , exprimati cu factoriale astfel $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

In paragraful urmator ne referim la cateva proprietati ale coeficientilot binomiali.

1.5.1 Coeficienti binomiali. Proprietati elementare

Coeficientii binomiali se defines prin:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k},\ 0 \le k \le n \qquad (2)$$

Urmatoarele proprietati sunt evidente:

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$
2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
3. $C_n^k = C_n^{n-k}$

Pentru orice n, cel mai mare coeficient binomial din dezvoltare este cel din mijloc ($k = n/2$) daca n este par sau cei doi coeficienti centrali ($k = \frac{1}{2}(n \pm 1)$) daca n este impar.

Mai putin evident este urmatorul rezultat:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k \qquad (3)$$

Daca k trece in k+1 se obtine o relatie echivalenta:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \qquad (4)$$

Daca n trece in n-1 se obtine alta relatie echivalenta:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$$

1.5.2 Demonstratia formulei de dezvoltare bininomiala

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$$

Vom folosi metoda inductiei.

Presupunem ca dezvoltarea (1) este adevarata pentru un intreg pozitiv $n = N$ si aratam ca acest fapt implica valabilitatea dezvoltarii si pentru $n = N+1$:

$$(x+y)^{N+1} = (x+y)(x+y)^N = (x+y)\sum_{k=0}^{N} C_N^k x^{N-k} y^k$$

$$=\sum_{k=0}^{N} C_N^k x^{N+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{N} C_N^k x^{N-k} y^{k+1}$$

Schimbam indicele de sumare din a doua suma $k+1=j$

$$=\sum_{k=0}^{N} C_N^k x^{N+1-k} y^k + \sum_{j=1}^{N+1} C_N^{j-1} x^{N+1-k} y^j$$

Apoi, separam primul termen din prima suma:

$$C_N^0 x^{N+1} = C_{N+1}^0 x^{N+1}$$

Similar, separam ultimul termen din a doua suma:

$$C_N^N y^{N+1} = C_{N+1}^{N+1} y^{N+1}$$

Termenii ramasi in cele doua sume se scriu impreuna cu acelasi indice de sumare notat cu k:

$$(x+y)^{N+1} = C_{N+1}^0 x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \left(C_N^k + C_N^{k-1}\right) x^{N+1-k} y^k + C_{N+1}^{N+1} y^{N+1}$$

$$(x+y)^{N+1} = C_{N+1}^0 x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N} C_{N+1}^k x^{N+1-k} y^k + C_{N+1}^{N+1} y^{N+1}$$

$$(x+y)^{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} C_{N+1}^k x^{N+1-k} y^k$$

Observam ca aceasta ultima relatie este chiar dezvoltarea binomiala (1) cu $n=N+1$. Astfel am aratat ca daca dezvoltarea binomiala este presupusa adevarata pentru $n=N$, atunci se poate arata ca este adevarata si pentru $n=N+1$. Dar, in mod trivial are loc si pentru $n=1$, si atunci si pentru $n=2$ de asemenea. Mai departe, este valida pentru $n=3,4,\ldots$ si astfel aceasta dezvoltare are loc pentru toti intregii pozitivi n.

1.6 Coeficienti binomiali. Proprietati

1.6.1 Identitati care implica coeficienti binomiali

Exista multe astfel de identitati referitoare la coeficientii binomiali, dar doar cele elementare , pe care le-am parcurs, merita un loc in memoria noastra. Drept ilustrare, mai demonstram doua rezultate ce implica sume de coeficienti binomiali.

Prima identitate este o aplicatie a metodei de inductie.

$\forall n \geq 1$, $\forall k \geq 1$,

$$\sum_{s=0}^{n-1} C_{k+s}^{k} = C_{n+k}^{k+1} \qquad (5)$$

Observam ca *n*, numarul de termeni din suma, este parametrul care variaza. *k* este parametru fix, iar *s* este indicele de sumare si nu apare in RHS a ecuatiei.

$$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \ldots + C_{k+n-1}^k = C_{k+n}^{k+1}$$

Presupunem ca relatia de sumare a coeficientilor binomiali este adevarata pentru $n = N$ si scriem suma cu un extra termen

$$\sum_{s=0}^{N+1-1} C_{k+s}^{k} = \sum_{s=0}^{N-1} C_{k+s}^{k} + C_{k+N}^{k} = C_{k+N}^{k+1} + C_{k+N}^{k} = C_{k+N+1}^{k+1}$$

Aceasta este relatia (5) cu n setat la N+1.

Al doilea rezultat , da o formula pentru combinarea termenilor din doua seturi de coeficienti binomiali intr-un mod particular (un fel de convolutie).

Pornim de la identitatea:

$$(x+y)^p (x+y)^q = (x+y)^{p+q}$$

$$\sum_{s=0}^{p} C_p^s x^{p-s} y^s \sum_{t=0}^{q} C_q^t x^{q-t} y^t = \sum_{r=0}^{p+q} C_{p+q}^{r} x^{p+q-r} y^r$$

Identificam coeficientii termenilor cu puteri egale in x si y, din cele doua parti ale egalitatii precedente:

$$x^{p+q-r} y^r \ : \ \sum_{t=0}^{r} C_p^{r-t} C_q^t = C_{p+q}^{r} \qquad (6)$$

In partea stanga contribuie toate combinatiile de s si t a.i. $s + t = r$.

Alte identitati pentru coeficientii binomiali pot fi obtinute considerand valori particulare pentru x si y in dezvoltarea binomial (1).

1. $x = y = 1$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n \qquad (7)$$

2. $x=1,\ y=-1$

$$0=C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots(-1)^n C_n^n \qquad (8)$$

1.6.2 Valori negative pentru n

Pana acum *n* in dezvoltarea binomiala este restrictionat la valori intregi positive. Valori negative pentru n pot fi introduse, dar costul este o serie infinita de termeni in loc de una finita ca in (1). Din ratiuni greu de explicat acum, se folosesc dezvoltari in care cel putin ultimii termini succesivi in seria infinita descresc spre zero.

Daca $|x|>|y|$ consideram:

$$(x+y)^n=(x+y)^{-m}=x^{-m}\left(1+\frac{y}{x}\right)^{-m}$$

unde *m* este intreg pozitiv.

Deoarece raportul y/x este subunitar, termenii cu puteri mari vor fi foarte mici.

Dam fara demonstratie forma dezvoltarii binomiale potrivite pentru valori negative a lui n=-m:

$$(x+y)^n=(x+y)^{-m}=x^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}C_{-m}^k\left(\frac{y}{x}\right)^k \qquad (9)$$

$$C_{-m}^k=(-1)^k\frac{m(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1)}{k!}=(-1)^k\frac{(m+k-1)!}{(m-1)!k!}=(-1)^k C_{m+k-1}^k \qquad (10)$$

Avem o definitie a coeficientilor binomiali pentru valori n intregi negative in functie de definitia acestora pentru valori positive. Intre coeficienti exista relatii de recurenta

$$C_n^{k+1}=\frac{n-k}{k+1}C_n^k \qquad (11)$$

1.7 Metode de demonstratie

Demonstratia prin inductie si demonstratia prin contradictie. Acestea au o caracteristica comuna, in faza initiala a demonstratiei se presupune un enunt ce trebuie demonstrate prin explorarea consecintelor.

1.7.1 Demonstratia prin inductie

Am folosit deja aceasta metoda de demonstratie la stabilirea dezvoltarii binomiale si la suma (5) pt coeficienti binomiali. Limita metodei: doar un rezultat presupus initial poate fi demonstrat. Propozitiile ce pot fi demonstrate prin inductie sunt limitate la acelea care contin un parametru care ia valori intregi intr-un domeniu de obicei infinit.

Pentru o propozitie care implica un parametru *n*, o demonstratie prin inductie implica cinci pasi:

1. Se formuleaza presupusul rezultat pentru un *n* general.
2. Presupunem propozitia (1) adevarata pentru $n = N$ (sau mai general pentru toate valorile $n \le N$).
3. Se arata, folosind numai rezultate dovedite si presupunerea (2), ca propozitia (1) este adevarata pentru $n = N + 1$.
4. Se demonstreaza direct ca propozitia (1) este adevarata cand *n* ia cea mai mica valoare.
5. Din (3) si (4) urmeaza validitatea propozitiei (1) pentru orice *n*.

Exemplu 1: Aratati ca suma patratelor primelor n numere naturale este data de:

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Presupunem rezultatul adevarat pentru $n = N$.

$$\sum_{r=1}^{N+1} r^2 = \sum_{r=1}^{N} r^2 + (N+1)^2$$

$$= \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) + (N+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(N+1)\left[N(2N+1) + 6N + 6\right]$$

$$= \frac{1}{6}(N+1)(N+2)(2N+3) \qquad \text{Relatia cu } n = N+1$$

Rezultatul este adevarat si pentru $n = 1$

Deci, rezultatul este adevarat pentru orice n.

Exemplu 2: Mai complicat, presupune doua inductii.

Aratati ca $Q(n) = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n$ este divizibil cu 6 pentru toate valorile n intregi positive.

Incepem prin a presupune rezultatul adevarat pentru o valoare particulara N a lui n, si remarcam rezultatul trivial pentru $n = 0$. Examinam $Q(N+1)$ scriind fiecare termen cu o dezvoltare binomiala:

$$Q(N+1) = (N+1)^4 + 2(N+1)^3 + 2(N+1)^2 + (N+1)$$

$$= \left(N^4 + 4N^3 + 6N^2 + 4N + 1\right) + 2\left(N^3 + 3N^2 + 3N + 1\right) +$$

$$+2\left(N^2 + 2N + 1\right) + (N+1)$$

$$= \left(N^4 + 2N^3 + 2N^2 + N\right) + \left(4N^3 + 12N^2 + 14N + 6\right)$$

Cu presupunerea facuta, termenii din prima paranteza sunt divizibili cu 6 si desigur terminii $12N^2$ si 6 sunt divizibili cu 6. Trebuie sa decidem daca $4N^3 + 14N$ este divizibl cu 6, sau echivalent $R(N) = 2N^3 + 7N$ este divizibil cu 3.

Pentru aceasta problema folosim o a doua inductie.

Presupunem $R(N)$ divizibil cu 3 pentru $N = M$ si examinam $R(M+1)$

$$R(M+1) = 2(M+1)^3 + 7(M+1) =$$

$$= 2\left(M^3 + 3M^2 + 3M^2 + 1\right) + 7(M+1)$$

$$= \left(2M^3 + 7M\right) + 3\left(2M^2 + 2M + 3\right)$$

Prin ipoteza primul grup este divizibil cu 3 si desigur si al doilea grup. In concluzie $R(N)$ este divizibil cu 3 pentru orice N. Daca ne intoarcem la problema initiala $4N^3 + 12N^2 + 14N + 6$ este divizibil cu 6 si deci $Q(N+1)$ este divizibil cu 6. Cum $Q(0)$ divizibil cu 6, propozitia din exemplu are loc pentru orice n.

1.7.2 Demonstratia prin contradictie

Si aceasta metoda este folositoare cand rezultatul este deja presupus. Intrebarile la care poate incerca sa raspunda sunt numai acelea care pot fi exprimate intr-o propozitie care este fie adevarata fie falsa.

Punctul crucial al metodei este presupunerea ca propozitia care trebuie demonstrata este falsa, si apoi folosind aceasta presupunere incorecta se ajunge la o contradictie evidenta cu presupunerea facuta. Concluzia este ca presupunerea facuta este falsa.

Exemplu: Un numar rational *r* este o fractie $r = p/q$ in care p si q sunt intregi cu q pozitiv. Fractia este ireductibila, $(p,q)=1$. Demonstrati ca $\sqrt{m}$ (m numar intreg) nu poate fi numar rational numai daca radicalul este un intreg.

Presupunem ca rezultatul este fals si deci putem scrie o ecuatie de forma

$$\sqrt{m} = r = \frac{p}{q} \quad \text{unde m,p, q intregi cu } q \neq 1$$

$p^2 = mq^2$ Dar p si q nu au factori comuni, deci m|p $p = mp_1$

$m^2 p_1^2 = mq^2 \quad mp_1^2 = q^2$ m|q contradictie.

Presupunerea facuta este falsa.

Capitolul 2. Elemente de calcul diferential si integral

In acest capitol ne ocupam de cea mai folosita tehnica matematica in fizica. Capitolul are doua sectiuni, una dedicata procesului de diferentiere si o a doua dedicata procesului invers de integrare.

2.1 *Diferentiere*

Diferentierea este procesul care ne arata cat de repede sau cat de lent variaza o functie, atunci cand marimea de care depinde, argumentul, variaza. Prin aceasta procedura obtinem o expresie (numerica sau analitica) pentru viteza de variatie a functiei in raport cu argumentul sau. De exemplu, viteza ne da viteza (rata) de modificare a pozitiei unui mobil in raport cu timpul; acceleratia ne da rata de modificare a vitezei in raport cu timpul. Diferentierea poate fi aplicata si la modificari in raport cu alte cantitati decat timpul. De exemplu modificarea presiunii in raport cu modificarea temperaturii.

2.1.1 *Definitia derivatei*

Fie $y = f(x)$ o funcţie definită pe (a,b) şi fie $x \in (a,b)$. Considerăm creşterea Δx a argumentului astfel încât $x + \Delta x \in (a,b)$. Creşterea Δx a argumentului va produce o creştere Δy a funcţiei $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0$$

Pentru *x* fixat, raportul precedent este o funcţie de Δx adică $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(\Delta x)$.

Definiţie: Dacă limita raportului $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pentru $\Delta x \to 0$ există, aceasta se numeşte *derivata funcţiei* $y = f(x)$ în punctul *x* şi se notează $f'(x)$ sau $y'(x)$ sau y'_x. Astfel, prin definiţie avem:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Observaţie: Derivabilitatea implică continuitate. Într-adevăr,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x = f'(x) \cdot 0 = 0$$

In aceasta argumentatie am folosit definitia notiunii de continuitate in termeni de cresteri. Precizam in continuare elemente despre continuitatea unei functii intr-un punct.

Definiţie: Fie $f(x)$ o funcţie definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0. Funcţia $f(x)$ este *continuă în* x_0 dacă:

(i) $f(x)$ are limită în x_0

(ii) limita lui $f(x)$ în x_0 este egală cu valoarea funcţiei în punctul x_0, $f(x_0)$

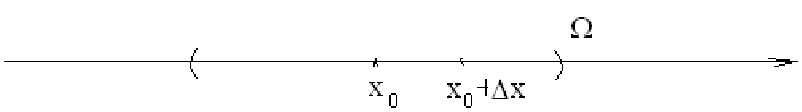
Adică

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Alta definitie pentru continuitate intr-un punct:

$f(x)$ continuă în x_0 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x \in \Omega,\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Alta definitie , in termeni de cresteri pentru argument si functie:



Considerăm punctul $x = x_0 + \Delta x$ din Ω, care diferă de punctul x_0 cu o cantitate pozitivă sau negativă notată Δx. Cantitatea Δx este *creşterea* argumentului x în x_0. Diferenţa $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ se numeşte *creşterea* funcţiei $f(x)$ în x_0 corespunzătoare creşterii Δx a variabilei independente x.

In termeni de creşteri, continuitatea lui $f(x)$ în x_0 , adică $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

devine

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Definiţie: Fie $f:\Omega\to\mathbb{R}$. $f(x)$ *continuă* în $x_0\in\Omega$ dacă creşterea funcţiei $f(x)$ în x_0 corespunzătoare creşterii Δx a variabilei independente x tinde la zero pentru $\Delta x\to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

Exemplu: $y=x^2$ este continuă în fiecare punct al dreptei reale.

Intr-adevăr, pentru orice creştere Δx a argumentului x în punctul x_0 avem

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2=(2x_0+\Delta x)\Delta x$$

$\Rightarrow$ $\Delta y\to 0$ pentru $\Delta x\to 0$ $\Rightarrow$ funcţia este continuă în fiecare punct x_0 al dreptei reale.

Ne intoarcem la derivabilitate ☺ cu exemple de aplicare a definitiei derivatei cu limita.

Exemple:

1. $y=x^2$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall\Delta x\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

Atunci, $y=x^2$ are derivată $y'(x)=2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2. $y=e^x$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall\Delta x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

Facem schimbarea de variabilă $y=e^{\Delta x}-1$

Atunci $1+y=e^{\Delta x}\Rightarrow \ln(1+y)=\Delta x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=e^x\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=e^x\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\ln(1+y)}=e^x\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=e^x\frac{1}{\ln e}=e^x$$

Atunci, $y=e^x$ are derivată $y'(x)=e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Altă definiţie: Fie $f(x)$ o funcţie definită în x_0 şi pe o vecinătate Ω a punctului x_0. Considerăm în definiţia (1) $x = x_0$ şi $\Delta x = x - x_0$. Atunci:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

Observaţie: Spunem că o funcţie $f(x)$ are derivată pe (a,b) dacă derivata $f'(x)$ există în fiecare punct $x \in (a,b)$.

Interpretarea geometrică a derivatei

Considerăm graficul funcţiei $y = f(x)$, definită pe (a,b) şi alegem două puncte $M(x, f(x))$ şi $P(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ pe acest grafic. Considerăm apoi, dreapta care trece prin punctele *M* şi *P*.

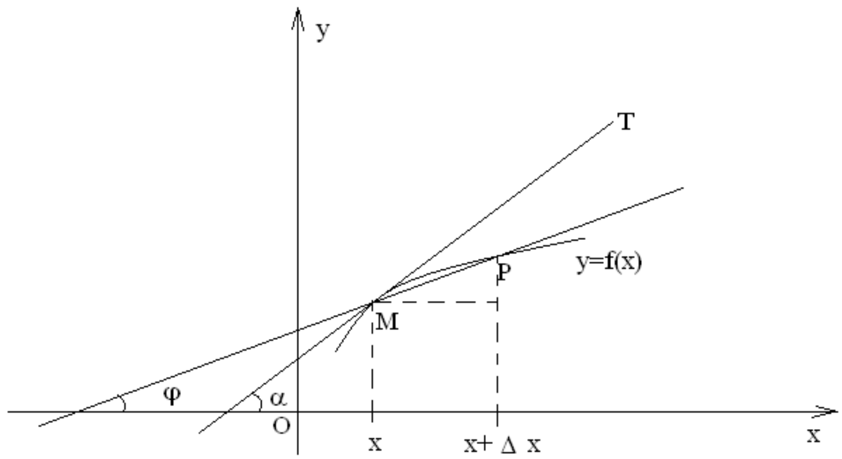
Presupunem că punctul *P* se deplasează pe curba $y = f(x)$, spre *M*, adică $\Delta x \to 0$. Atunci dreapta *MP* se deplasează până ce devine tangentă la curba $y = f(x)$ în *M*, adică dreapta *MT*. Panta *k* a dreptei *MP* este:

$$k = tg\ \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Panta $tg\ \alpha$, a tangentei *MT* la curba $y = f(x)$ în *M*, este limita pantei dreptei *MP* pentru $P \to M$ sau $\Delta x \to 0$, adică

$$tg\ \alpha = \lim_{P \to M} tg\ \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \tag{3}$$

Derivata $f'(x)$ este panta tangentei la curba $y = f(x)$ în punctul de abscisă *x*.


y
T
y=f(x)
P
M
φ
α
O
x
x+ Δ x
x