1.2 *Identitati trigonometrice (continuare)*

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \tag{1.18}$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \tag{1.19}$$

Daca consideram unul dintre unghiuri egal cu π sau π/2, putem deduce alte rezultate:

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \qquad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \tag{1.20}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \tag{1.21}$$

Prin impartirea relatiilor (1.18), (1.19) deducem:

$$tg(A \pm B) = \frac{tgA \pm tgB}{1 \mp tgA\ tgB} \tag{1.22}$$

O aplicatie a acestui rezultat este *un test care verifica ortogonalitatea* a doua drepte intr-un grafic; mai exact determina unghiul dintre doua drepte. Ecuatia unei drepte este $y = mx + n$ in care *m* este panta dreptei si *n* este intersectia cu axa *y*. Geometric panta *m* este tangenta unghiului facut de dreapta cu axa *x*.

In consecinta, unghiul θ_{12} dintre doua astfel de drepte este diferenta dintre unghiurile pe care le fac cele doua drepte cu axa *x*, si tangenta acestui unghi este:

$$tg\theta_{12} = \frac{tg\theta_1 - tg\theta_2}{1 + tg\theta_1\ tg\theta_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \tag{1.23}$$

Pentru drepte ortogonale trebuie sa avem $\theta_{12} = \pi / 2$, i.e. ultima fractie din RHS din ecuatia precedenta trebuie sa fie ∞ si astfel

$$m_1 m_2 = -1 \tag{1.24}$$

Un fel de inversare a relatiilor (1.18) si (1.19) duce la exprimarea sumei sau diferentei a doua sinusuri sau cosinusuri in produs de doua functii sinusoidale. Adunand $\sin(A+B)$ cu $\sin(A-B)$ obtinem

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$$

Daca notam $A+B=C$ si $A-B=D$, aceasta devine:

$$\sin C+\sin D=2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right) \quad (1.25)$$

Intr-o maniera similara, se obtin:

$$\sin C-\sin D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right) \quad (1.26)$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right) \quad (1.27)$$

$$\cos C-\cos D=-2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right) \quad (1.28)$$

Identitati pentru unghiuri duble

Consideram $B=A$ in relatiile (1.18) si (1.19) si obtinem:

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta \quad (1.29)$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$=2\cos^2\theta-1$$

$$=1-2\sin^2\theta \quad (1.30)$$

$$tg2\theta=\frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta} \quad (1.31)$$

Urmatorul set de identitati exprima functiile trigonometrice ale unghiului θ ca raport de polinoame de variabila $t=tg(\theta/2)$.

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \tag{1.32}$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{1.33}$$

$$tg\theta = \frac{2t}{1-t^2} \tag{1.34}$$

Exercitiu: Rezolvati in θ ecuatia:

$$a\sin\theta + b\cos\theta = k$$

unde *a*, *b* si *k* sunt numere reale date.

Rezolvam ecuatia folosind relatia (1.18) considerand $a = K\cos\phi$ si $b = K\sin\phi$

$$k = K\cos\phi\sin\theta + K\sin\phi\cos\theta = K\sin(\theta+\phi)$$

cu $K^2 = a^2 + b^2$ si $\phi = arctg\frac{b}{a}$

Solutia ecuatiei date este:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{k}{K}\right) - \phi$$

De remarcat faptul ca functia arcsin conduce la doua valori in domeniul $(0, 2\pi)$ si ca nu exista solutii pentru ecuatia data daca $|k| > |K| = \sqrt{a^2+b^2}$.

1.3 Geometrie analitica

Forma standard, explicita, pentru ecuatia unei drepte este:

$$y = mx + c$$

(1.35)

si reprezinta o relatie liniara intre variabila independenta *x* si variabila dependenta *y*. Panta *m* este egala cu tangenta unghiului pe care-l face dreapta cu axa *x* iar *c* este intersectia cu axa *y*.

O forma alternativa a ecuatiei dreptei este:

$$ax + by + k = 0 \tag{1.36}$$

Prin comparatie

$$m = -\frac{a}{b} \quad \text{si} \quad c = -\frac{k}{b}$$

Forma (1.36) trateaza *x* si *y* in mod mai simetric, intersectiile cu cele doua axe sunt $-k/a$ si $-k/b$ respectiv.

O relatie de tip putere dintre doua variabile, adica de forma $y = Ax^n$, poate fi incadrata intr-o dreapta aplicand logaritmul in ambele parti ale relatiei.

$$\ln y = n \ln x + \ln A \tag{1.37}$$

Acum panta este puterea *n* iar intersectia cu axa $\ln y$ este $\ln A$, din care *A* se obtine prin exponentiere.

Alte curbe bidimensionale pe care studentii ar trebui sa stie sa le recunoasca sunt cele care descriu sectiuni conice. Sectiunile conice pot avea diverse orientari, iar forma lor cea mai complexa este:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \tag{1.38}$$

Fiecare astfel de conica poate fi incadrata in una din patru grupe: elipsa, parabola, hiperbola sau o forma degenerata, o pereche de drepte. Daca acestea sunt reduse la reprezentarea standard, in care axele de simetrie sunt facute sa coincida cu axele de coordonate, primele trei grupe au formele:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{elipsa} \tag{1.39}$$

$$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha) \qquad \text{parabola} \tag{1.40}$$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \qquad \text{hiperbola} \qquad (1.41)$$

In aceste relatii, (α,β) defineste pozitia centrului curbei, centru care de obicei este originea $(0,0)$. Ecuatia parabolei data astfel este o curba simetrica fata de o dreapta paralela cu axa x . Pentru o parabola simetrica fata de o dreapta paralela cu axa *y*, ecuatia este:

$$(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$$

Cercul este un caz special de elipsa $b=a$ si ecuatia are forma:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2 \qquad (1.42)$$

Caracteristica acestei ecuatii este ca daca este scrisa in forma (1.38) coeficientii lui x^2 si y^2 sunt egali iar coeficientul lui *xy* este zero; aceasta proprietate nu se modifica la nici o reorientare si ramane un criteriu de distinctie al unui cerc din conice.

Sectiunile conice au si definitii ce contin proprietati geometrice. De exemplu, o parabola poate fi definit ca locul geometric al punctelor care se afla la aceeasi distanta fata de o dreapta data, directrix, si fata de un punct dat , focar.

Un cerc poate fi definit ca locul geometric al punctelor care se afla la aceeasi distanta *a* fata de punctul (α,β). In urmatorul exercitiu determinam ecuatia unei parabole.

Exemplu: Gasiti ecuatia unei parabole care are dreapta $x=-a$ drept directrix si punctul $(a,0)$ drept focar.

Conform definitiei geometrice $PN=PF$

$$x+a=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

$$(x+a)^2=(x-a)^2+y^2$$

$$y^2 = 4ax$$

Aceasta este ecuatia (1.40) cu α si β nule.

Desi algebra este mai complicata, aceeasi metoda poate fi folosita pentru a gasi ecuatia unei elipse si a unei hiperbole.

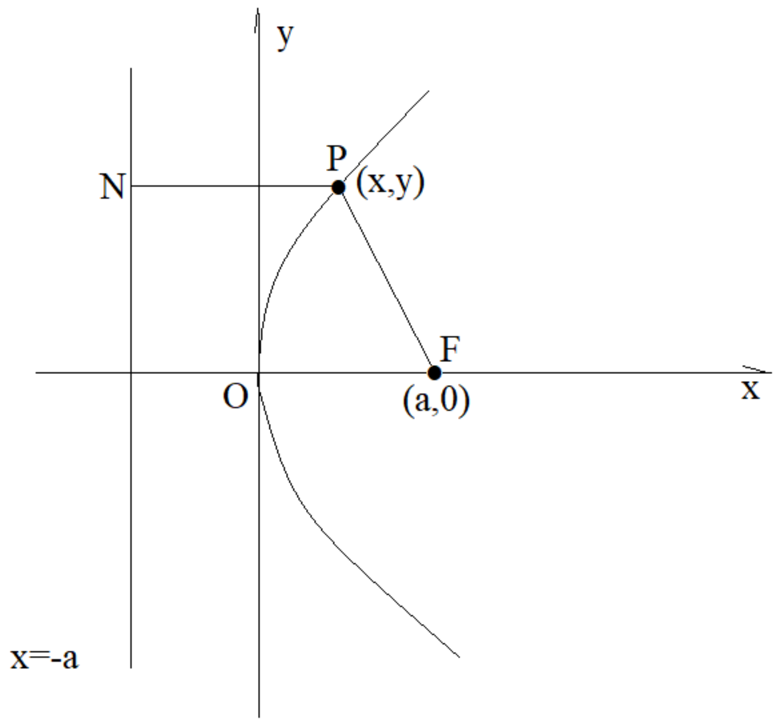
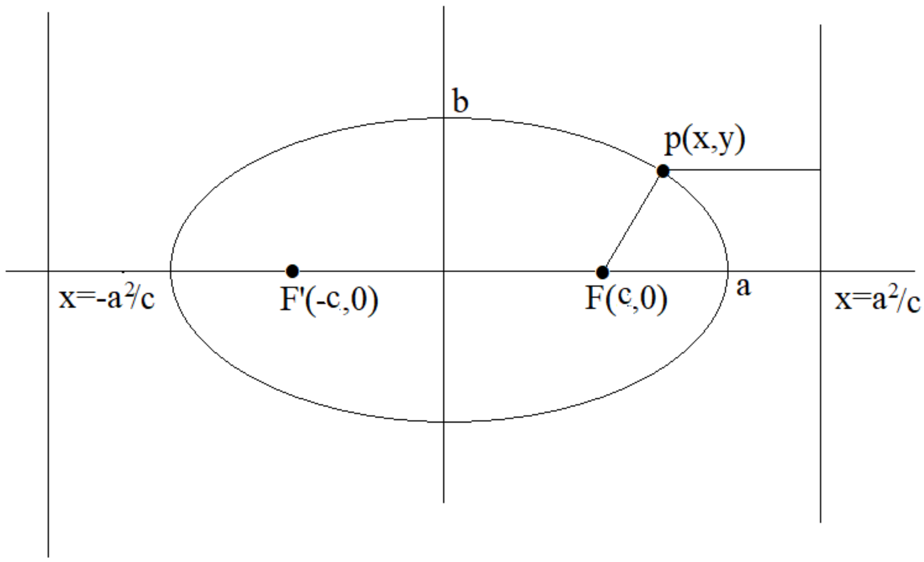


Figura 1.3



In cazul elipsei:

$$d(P,F)+d(P,F')=2a \qquad b=\sqrt{a^2-c^2}$$

$$d(P,F)=e\,d(P,\delta) \text{ unde } \delta : x=\frac{a^2}{c}$$

Distanta de la focar este o fractiune e (excentricitatea) din distanta la o dreapta.

$e\in(0,1)$ pentru elipsa; $e=0$ pentru cerc; $e>1$ hiperbola; $e=1$ parabola

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2} \qquad e=\frac{c}{a}$$

Reprezentarile parametrice ale unei curbe permit fiecarui punct de pe curba sa fie asociat cu o singura valoare a unui parametru t

Elipsa: $\begin{cases} x=\alpha+a\cos t \\ y=\beta+b\sin t \end{cases}$

Parabola: $\begin{cases} x = \alpha + at^2 \\ y = \beta + 2at \end{cases}$

Hiperbola: $\begin{cases} x = \alpha + a \text{ ch}t \\ y = \beta + b\ sht \end{cases}$

Exemplu: Aratam ca unghiul cu varful pe cerc care subintinde un diametru este un unghi drept.

Diametru: dreapta ce uneste A(a,0) si B(-a,0)

Fie P(x,y) un punct pe cercul $x^2 + y^2 = a^2$

Dreapta BP are panta $m_1 = \dfrac{y-0}{x-(-a)} = \dfrac{y}{x+a}$

Dreapta AP are panta $m_2 = \dfrac{y-0}{x-a}$ Produsul $m_1 m_2 = \dfrac{y^2}{x^2 - a^2} = -1$

1.4 *Fractii partiale*

Cea mai simplă funcţie raţională este un polinom de gradul n :

$$Q_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

unde $a_0 \neq 0$ şi $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Un număr b este rădăcină pentru polinom $\Leftrightarrow$ $Q_n(b) = 0$.

Observaţie: Orice polinom real $Q_n(x)$ poate fi descompus în factori în mod unic. Factorii sunt polinoame liniare $x - b$ şi polinoame pătratice $x^2 + px + q$, în care *p, q* sunt coeficienţi reali şi fiecare polinom pătratic este ireductibil la polinoame liniare, deoarece nu are rădăcini reale.

$$Q_n(x) = a_0(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \cdots (x-l)^\lambda \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{\mu_1} \cdots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{\mu_s}$$

unde exponenţii $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_s$ sunt numere naturale şi are loc:

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + 2(\mu_1 + \ldots + \mu_s) = n$$

Dacă $\alpha = 1$, rădăcina *a* se numeşte *simplă.*

Dacă $\alpha \geq 2$, rădăcina *a* se numeşte *multiplă.*

In general, o funcţie raţională reală $f(x)$, este raportul a două polinoame reale care nu au nici un factor comun.

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

O funcţie raţională se numeşte *proprie* dacă numărătorul $P_m(x)$ are gradul mai mic decât numitorul $Q_n(x)$, adică $m < n$.

Dacă $m \geq n$, în urma unei împărţiri, functia $f(x)$ poate fi reprezentată astfel:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{\widetilde{P}(x)}{Q_n(x)}$$

unde $R_{m-n}(x)$ şi $\widetilde{P}(x)$ sunt polinoame reale, iar $\dfrac{\widetilde{P}(x)}{Q_n(x)}$ este funcţie raţională proprie.

Funcţiile raţionale simple sunt funcţiile raţionale proprii de forma:

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^k},\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\quad \text{şi}\quad \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$$

unde $A, M, N, a, p, q \in \mathbb{R}$, $k \geq 2$ număr natural. Polinomul pătratic x^2+px+q nu are rădăcini reale, $p^2-4q<0$.

Teoremă: Fie funcţia raţională reală *proprie* $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ şi fie

$$Q_n(x)=a_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots(x-l)^{\lambda}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\mu_1}\cdots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\mu_s}.$$

Atunci, $f(x)$ se descompune în mod unic într-o sumă de funcţii raţionale *simple*:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+$$

$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+$$

$$\ldots$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^2}+\cdots+\frac{M_{\mu_s}x+N_{\mu_s}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\mu_s}}$$

unde $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_\beta, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_{\mu_s}, N_{\mu_s} \in \mathbb{R}$ şi nu sunt toate nule.

Pentru a determina coeficienţii de la numărătorii fracţiilor raţionale simple, înmulţim relaţia precedentă cu $Q_n(x)$ şi aplicăm metoda identificării coeficienţilor puterilor egale a lui x în relaţia astfel obţinută. Se obţine un sistem liniar în necunoscutele $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_\beta, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_{\mu_s}, N_{\mu_s}$.

Exemple:

1. Descompuneţi în funcţii raţionale simple funcţia rationala:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x\left(x^2 - 3x + 2\right) = x(x-1)(x-2)$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$$

$$3x^2 - 6x + 2 = A\left(x^2 - 3x + 2\right) + B\left(x^2 - 2x\right) + C\left(x^2 - x\right)$$

x^2 : $3 = A + B + C$

x^1 : $-6 = -3A - 2B - C$

x^0 : $2 = 2A$

$\Rightarrow \quad A = B = C = 1$

$$f(x)=\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$$

2. Descompuneţi în funcţii raţionale simple funcţia rationala:

$$f(x)=\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}$$

$$x^5+3x^4+3x^3+x^2=x^2\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=x^2\left(x+1\right)^3$$

$$\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{\left(x+1\right)^2}+\frac{B_3}{\left(x+1\right)^3}$$

$$x^3+3x+1=A_1x\left(x+1\right)^3+A_2\left(x+1\right)^3+B_1x^2\left(x+1\right)^2+B_2x^2\left(x+1\right)+B_3x^2$$

$$x^3+3x+1=A_1\left(x^4+3x^3+3x^2+x\right)+A_2\left(x^3+3x^2+3x+1\right)+B_1\left(x^4+2x^3+x^2\right)+B_2\left(x^3+x^2\right)+B_3x^2$$

$x^4:\quad 0=A_1+B_1$

$x^3:\quad 1=3A_1+A_2+2B_1+B_2$

$x^2:\quad 0=3A_1+3A_2+B_1+B_2+B_3$

$x^1:\quad 3=A_1+3A_2$

$x^0:\quad 1=A_2$

$\Rightarrow\quad A_1=0\quad A_2=1\quad B_1=0\quad B_2=0\quad B_3=-3$

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{\left(x+1\right)^3}$$

3. Descompuneţi în funcţii raţionale simple funcţia rationala:

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\frac{x^3+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$x^3+x^2+1=\left(M_1x+N_1\right)\left(x^2+1\right)+M_2x+N_2$$

$$x^3+x^2+1=M_1x^3+M_1x+N_1x^2+N_1+M_2x+N_2$$

$x^3:\quad 1=M_1$

$x^2:\quad 1=N_1$

$x^1:\quad 0=M_1+M_2$

$x^0:\quad 1=N_1+N_2$

$\Rightarrow \quad \mathrm{M}_1=1 \quad N_1=1 \quad M_2=-1 \quad N_2=0$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$$