Capitol 5 Derivare partiala

In capitolele precedente am discutat numai despre functii *f* de o singura variabila *x*, care se scriau $f(x)$. In definitia unei functii *f* mai apareau uneori constante si parametri, e.g. $f(x)=ax+2$ contine constanta 2 si parametrul *a*, dar numai *x* era considerata ca o variabila si au fost definite numai derivatele $f^{(n)}(x)=d^n f/dx^n$.

Totusi, putem considera functii care depind de mai multe variabile, e.g. functia $f(x,y)=x^2+3xy$, care depinde de doua variabile *x* si *y*. Pentru orice pereche de valori x,y , functia $f(x,y)$ are o valoare bine definita, e.g. $f(2,3)=22$. Aceasta notatie poate fi extinsa la functii care depind de mai mult de doua variabile. Pentru cazul *n*-variabile, scriem $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ pentru o functie care depinde de variabilele $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Cand $n=2$, x_1 si x_2 corespund variabilelor *x* si *y* folosite mai sus.

Functiile de o singura variabila, ca $f(x)$, pot fi reprezentate printr-un grafic pe o hartie plana, si este evident ca functiile de doua variabile pot fi reprezentate cu putin efort, printr-o suprafata intr-un spatiu tridimensional. Astfel, putem sa ne imaginam $f(x,y)$ ca descriind variatia inaltimii cu pozitia intr-un peisaj de munte. Functiile de mai multe variabile sunt dificil de vizualizat si astfel discutiile preliminare din acest capitol se vor concentra pe functii de doua variabile.

5.1 Definitia derivatei partiale

O functie de doua variabile $f(x,y)$ va avea un gradient in toate directiile din planul *xy*. Poate fi determinata o expresie generala a ratei de modificare a functiei. Dar, la inceput consideram cazul mai simplu al determinarii vitezei de modificare a lui $f(x,y)$ in directia pozitiva a lui *x* si directia pozitiva a lui *y*. Aceste rate de modificare se numesc *derivate partiale* in raport cu *x* si *y* respectiv, si sunt extrem de importante in diverse aplicatii din fizica.

Pentru o functie de doua variabile $f(x,y)$ putem defini derivata in raport cu *x*, de exemplu, spunand ca este derivata unei functii de o variabila cand *y* este fixat si tratat ca o constanta. Pentru a specifica ca o derivata este calculata in raport cu *x*, dar in acelasi timp sa admitem ca exista si derivata in raport cu *y*, prima este notata cu $\partial f / \partial x$ si este *derivata partiala a lui* $f(x,y)$ *in raport cu x*. Similar, derivata partiala in raport cu *y* se noteaza $\partial f / \partial y$.

Definitia formala a derivatei partiale a lui $f(x,y)$ in raport cu *x* este:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (1)$$

cu conditia ca limita sa existe. Aceasta definitie seamana mult cu cea a derivatei unei functii de o singura variabila. Cealalta derivata partiala a lui $f(x,y)$ se defineste in mod similar ca o limita:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (2)$$

La scrierea derivatelor partiale, se practica indicarea variabilelor care se mentin constante, scriindu-le ca indici la simbolul derivatei. Astfel, derivatele partiale (1) si (2) se pot scrie:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \quad \text{si} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$$

In aceasta forma, indicele arata in mod explicit care variabila sa fie pastrata constanta. O notatie mai compacta pentru aceste derivate partiale este f_x si f_y. Totusi, este extrem de important ca atunci cand folosim derivate partiale sa amintim care variabile sunt pastrate constante si este bine sa scriem derivatele partiale cat mai explicit pentru a evita confuziile.

Extensia definitiilor (1) si (2) la cazul general cu *n*-variabile este simpla:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Ca si in cazul functiilor de o singura variabila, se pot defini derivate partiale de ordin secund sau de ordin mai mare, in mod similar. Pentru o functie de doua variabile $f(x,y)$ acestea sunt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \ , \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy}\ , \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{yx}\ .$$

Numai trei dintre derivatele secunde sunt independente deoarece relatia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

este adevarata , cu conditia ca derivatele partiale secunde sa fie continue in punctul considerat. Aceasta relatie, adesea se dovedeste utila in evaluarea unor derivate complicate. Se poate arata ca pentru o functie de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, in aceleasi conditii are loc:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$$

Exemplu: Calculati derivatele partiale si derivatele partiale secunde pentru functia:

$$f(x,y)=2x^3y^2+y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=4x^3y+3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12xy^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4x^3+6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=12x^2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=12x^2y$$

5.2 Diferentiala totala si derivata totala

Derivatele partiale ale functiei $f(x,y)$ ne dau rata de modificare a functiei f in directia pozitiva a axei x si a axei y, si vom considera in cele ce urmeaza rata de modificare a functiei $f(x,y)$ intr-o directie arbitrara. Presupunem ca facem mici modificari simultane Δx in x si Δy in y si ca rezultat functia f se modifica in $f+\Delta f$. Astfel,

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)\\ &= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\end{aligned}$$

$$=\left[\frac{f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right)-f\left(x, y+\Delta y\right)}{\Delta x}\right]\Delta x+\left[\frac{f\left(x, y+\Delta y\right)-f\left(x, y\right)}{\Delta y}\right]\Delta y \qquad (3)$$

In ultima linie cantitatile din paranteze sunt similare celor din definitiile (1), (2) ale derivatelor partiale. Pentru a avea egalitate stricta cu derivatele partiale, Δx si Δy ar trebui sa fie infinitesimal de mici. Dar, chiar si finite (dar nu prea mari) Δx si Δy , putem scrie formula aproximativa:

$$\Delta f \approx \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\Delta y \qquad (4)$$

Notam ca prima paranteza din (3) de fapt aproximeaza $\partial f\left(x, y+\Delta y\right)/\partial x$ dar aceasta derivata a fost inlocuita cu $\partial f\left(x, y\right)/\partial x$ in (4).

Cat de buna este aproximatia (4) pentru relatia (3) depinde nu numai de cat de mici sunt Δx si Δy dar si de marimile derivatelor partiale de ordin superior; aceste lucruri vor fi discutate in paragraful 5.7 in contextual seriilor Taylor pentru functii de mai multe variabile. Cu toate acestea, facem modificarile Δx si Δy infinitezimale in (4) si putem defini *diferentiala totala df* a functiei $f\left(x, y\right)$, fara nicio aproximatie, ca fiind:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (5)$$

Ecuatia (5) poate fi extinsa la cazul unei functii de *n* variabile, $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \qquad (6)$$

Exemplu: Calculati diferentiala totala a functiei $f\left(x, y\right)=ye^{x+y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{x+y}\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=e^{x+y}+ye^{x+y}$$

$$df=\left(ye^{x+y}\right)dx+\left(e^{x+y}+ye^{x+y}\right)dy$$

$$df=\left(ye^{x+y}\right)dx+\left(1+y\right)e^{x+y}dy$$

In unele situatii, in ciuda faptului ca par implicate multe variabile x_i, $i=1,2,\ldots,n$, efectiv doar o variabila este implicata. Aceasta situatie apare daca exista relatii prin care toate variabilele x_i sunt functii ce depind de o aceeasi variabila, sa spunem de x_1. Aceste relatii pot fi reprezentate in forma:

$$x_i = x_i\left(x_1\right) \ , \quad i = 2,3,\ldots,n \tag{7}$$

In principiu f poate fi exprimata ca o functie doar de x_1 substituind relatiile (7) pentru $x_2, x_3, \ldots, x_n$ si atunci derivata totala a lui f in raport cu x_1 se obtine prin derivare ordinara.

Alternativ, putem folosi diferentiala (6) pentru a obtine:

$$\frac{df}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1} \tag{8}$$

Trebuie notat ca partea stanga a acestei ecuatii este derivata totala df / dx_1 in timp ce derivata partiala $\partial f / \partial x_1$ formeaza o parte din partea dreapta a ecuatiei. La evaluarea acestei derivate partiale trebuie sa consideram doar aparenta explicita a lui x_1 in functia f.

Exemplu: Calculati derivata totala a functiei $f\left(x, y\right) = x^2 + 3xy$ in raport cu x, stiind ca $y = \arcsin x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = 2x + 3y + 3x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{df}{dx} = 2x + 3\arcsin x + \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Desigur, acelasi rezultat se obtine daca substituim de la inceput y in functie de x si apoi derivam in raport cu x, dar metoda folosita produce rezultate cu calcule mai putine.

5.3 Diferentiale exacte si inexacte

In paragraful precedent am discutat cum sa gasim diferentiala totala a unei functii, i.e. modificarea infinitezimala a unei functii intr-o directie arbitrara, in functie de gradientele sale $\partial f / \partial x$ si $\partial f / \partial y$ in directiile x si y (5). Uneori avem nevoie de procesul invers in care sa gasim functia f a carui diferentiala o cunoastem. In mod normal, gasirea unei astfel de functii se bazeaza pe inspectie si experienta.

Ca exemplu, este usor de observat ca functia a carei diferentiala este $df = xdy + ydx$ este pur si simplu $f(x, y) = xy + c$ unde c este o constanta. Diferentiale ca acestea, care se integreaza direct, se numesc *diferentiale exacte*, in timp ce diferentialele fara aceasta proprietate se numesc *diferentiale inexacte*. De exemplu, $xdy + 3ydx$ vom vedea ca nu este diferentiala nici unei functii. Diferentialele inexacte pot fi facute exacte, totusi, prin inmultirea cu o functie potrivita numita *factor integrand*.

Exemplu: Aratati ca diferentiala $xdy + 3ydx$ este inexacta.

Daca integram in raport cu x considerand y constant obtinem ca $f(x, y) = 3xy + g(y)$, unde $g(y)$ este o functie arbitrara de y. Pe de alta parte, daca integram in raport cu y consideram x constant, concludem ca $f(x, y) = xy + h(x)$ unde $h(x)$ este o functie arbitrara de x. Aceste rezultate nu pot coincide pentru nici o alegere a functiilor $g(y)$ si $h(x)$, si atunci diferentiala este inexacta.

Este de interes sa investigam care proprietati ale unei diferentiale o fac sa fie exacta. Consideram diferentiala generala a unei functii de doua variabile:

$$df = A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

Vedem ca:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A(x, y) \text{ si } \quad \frac{\partial f}{\partial y} = B(x, y)$$

Si, folosind proprietatea $f_{xy} = f_{yx}$, impunem:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \tag{9}$$

Aceasta este o *conditie necesara si suficienta* pentru ca o diferentiala sa fie exacta.

Folosind conditia (9) aratati ca diferentiala $xdy + 3ydx$ este inexacta.

Cu notatiile de mai sus, $A(x, y) = 3y$ si $B(x, y) = x$ si astfel

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 3 \ , \ \frac{\partial B}{\partial x} = 1$$

Cum aceste derivate nu sunt egale, inseamna ca diferentiala este inexacta.

Pentru a determina daca o diferentiala care contine mai multe variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este exacta, extindem procedura de mai sus. O diferentiala care contine mai multe variabile poate fi scrisa in general:

$$df = \sum_{i=1}^{n} g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) dx_i$$

si va fi exacta daca

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \quad \text{pentru toate perechile } i, j \qquad (10)$$

Vor fi $n(n-1)/2$ astfel de relatii care trebuie satisfacute.

Exemplu: Aratati ca

$$(y+z)dx + xdy + xdz$$

este diferentiala exacta.

$$g_1(x, y, z) = y + z \ , \quad g_2(x, y, z) = x \ , \quad g_3(x, y, z) = x$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial g_3}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial z} = 1 \quad , \quad \frac{\partial g_2}{\partial z} = \frac{\partial g_3}{\partial y} = 0$$

Si, cu (10) diferentiala este exacta. Asa cum s-a mentionat, uneori este posibil sa aratam ca o diferentiala este exacta gasind prin inspectie functia care are respectiva diferentiala. In acest exemplu, se poate vedea ca

$$f(x, y, z) = x(y+z) + c$$

5.4 Teoreme utile pentru derivarea partiala

Pana acum discutia a fost centrata pe functii de doua variabile $f(x,y)$. Totusi, putem avea o expresie pentru *x* in functie de *f* si *y*, sau pentru *y* o functie de *f* si *x*. Pentru a sublinia ca toate variabilele sunt la fel de importante, inlocuim *f* cu *z*. Asta nu implica faptul ca *x*, *y* si *z* sunt coordonatele de pozitie. Deoarece si *x* este o functie de *y* si *z*, $x = x(y,z)$, urmeaza ca

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz \qquad (11)$$

Similar, $y = y(x,z)$

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz \qquad (12)$$

Acum putem substitui (12) in (11) pentru a obtine:

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz$$

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left(\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right) dz \qquad (13)$$

Acum, daca pastram *z* constant, astfel incat $dz = 0$, obtinem *relatia de reciprocitate*:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z^{-1}$$

Care este valabila cu conditia ca ambele derivate partiale sa existe si niciuna nu este egala cu zero. De notat ca aceasta relatie are loc numai daca variabila pastrata constanta la derivare, in acest caz *z*, este aceeasi in ambele parti ale ecuatiei.

Alternativ, in (13) putem considera $dx = 0$. Atunci, continutul parantezei mari este zero, si obtinem *relatia ciclica*:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 0 \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Relatia nu ramane valabila daca cel putin o derivate este nula. In deducerea acestei relatii am folosit relatia de reciprocitate pentru a inlocui $(\partial x / \partial z)_y^{-1}$ cu $(\partial z / \partial x)_y$.

5.5 Derivarea functiilor compuse (the chain rule)

Pana acum am discutat despre diferentierea unei functii $f(x,y)$ in raport cu variabilele sale *x* si *y*. Acum consideram cazul in care *x* si *y* sunt functii de alta variabila, sa spunem *u*. Daca vrem sa calculam derivata df/du, putem sa substituim in $f(x,y)$ expresiile pentru $x(u)$ si $y(u)$ si apoi sa derivam functia de *u* obtinuta. Astfel de substitutii ne vor da rezultatul dorit in cazuri simple, dar in exemple mai complicate este mai usor sa folosim diferentiala totala.

Din ecuatia (5) diferentiala totala a functiei $f(x,y)$ este:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Impartim formal relatia cu *du*, si obtinem relatia

$$\frac{df}{du} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du} \tag{14}$$

care se numeste *chain rule* pentru derivarea partiala. Aceasta expresie furnizeaza o metoda directa de calculare a derivatei totale a lui *f* in raport cu *u* si este folositoare cand o ecuatie este exprimata in forma parametrica.

Exemplu: Se dau $x(u) = 1 + au$ si $y(u) = bu^3$, gasiti rata de modificare a functiei $f(x,y) = xe^{-y}$ in raport cu *u*.

Asa cum am discutat, aceasta problema poate fi rezolvata inlocuind *x* si *y* pentru a obtine o functie *f* care depinde numai de *u* si apoi o derivam in raport cu *u*. Totusi cu (14) obtinem direct:

$$\frac{df}{du} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du} = e^{-y} \times a + \left(-xe^{-y}\right) \times 3bu^2$$

In care substituim *x* si *y*

$$\frac{df}{du} = e^{-bu^3} \times a + \left(-1 - au\right)e^{-bu^3} \times 3bu^2 = e^{-bu^3}\left(a - 3bu^2 - 3abu^3\right)$$

Ecuatia (14) este un exemplu de *chain rule* pentru o functie de doua variabile fiecare depinzand de o singura variabila. Chain rule poate fi extinsa la functii de mai multe variabile, fiecare din ele fiind o functie de o variabila *u*, i.e. $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, cu $x_i = x_i\left(u\right)$. In acest caz chain rule ne da:

$$\frac{df}{du} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{du} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{du} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{du} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{du} \tag{15}$$

5.6 Schimbarea de variabile

Uneori este necesar sa facem o schimbare de variabile in cursul unei analize si in consecinta trebuie sa modificam o ecuatie exprimata intr-un set de variabile intr-o ecuatie ce utilizeaza alt set de variabile. Aceeasi situatie apare daca o functie f depinde de un set de variabile x_i, astfel incat $f = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_3\right)$ dar x_i sunt functii de un alt set de variabile u_j aceste functii fiind:

$$x_i = x_i\left(u_1, u_2, \ldots, u_m\right) \tag{16}$$

Pentru fiecare valoare a lui i, x_i va fi o functie diferita de u_j. In acest caz, chain rule (15) devine

$$\frac{\partial f}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{17}$$

Si se spune ca exprima o *schimbare de variabile*. In general, numarul de variabile in fiecare set nu trebuie sa fie acelasi, i.e. $m \neq n$ dar daca ambele x_i si u_i sunt multimi de variabile independente atunci $n = m$.

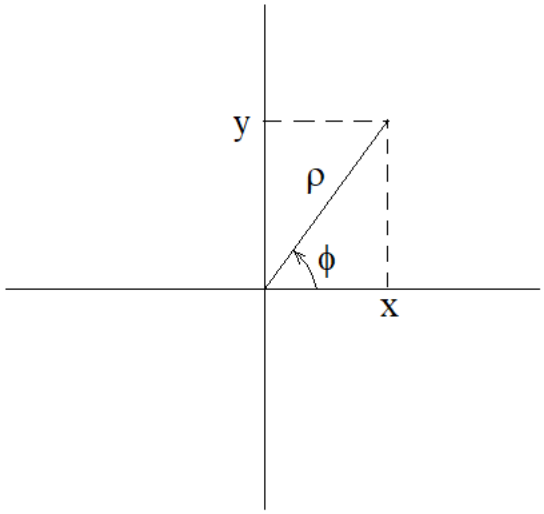
Exercitiu: Coordonatele polare ρ si ϕ si coordonatele carteziene x si y sunt corelate de relatiile

$$x = \rho \cos\phi \quad , \quad y = \rho \sin\phi$$

O functie arbitrara $f\left(x, y\right)$ poate fi re-exprimata ca o functie $g\left(\rho, \phi\right)$. Transformati expresia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

in functie de ρ si ϕ.



Observam ca $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\phi = arctg\left(y/x\right)$. Putem scrie cele patru derivate partiale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\phi \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-\left(y/x^2\right)}{1+\left(y/x\right)^2} = -\frac{\sin\phi}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\phi \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1/x}{1+\left(y/x\right)^2} = \frac{\cos\phi}{\rho}$$

Din (17) putem scrie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\phi - \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\sin\phi}{\rho}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\sin\phi + \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\cos\phi}{\rho}$$

Apoi, scriem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f$$

$$= \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) g$$

$$= \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\left(\cos\phi\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \phi}\right)$$

$$= \cos^2\phi \frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2} + \frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho^2}\frac{\partial g}{\partial\phi} - \frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho}\frac{\partial^2 g}{\partial\rho\partial\phi} + \frac{\sin^2\phi}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho} -$$
$$- \frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi\partial\rho} + \frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho^2}\frac{\partial g}{\partial\phi} + \frac{\sin^2\phi}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

$$= \cos^2\phi \frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2} + 2\frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho^2}\frac{\partial g}{\partial\phi} - 2\frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho}\frac{\partial^2 g}{\partial\rho\partial\phi} + \frac{\sin^2\phi}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho} + \frac{\sin^2\phi}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

Si o expresie similara:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) f$$

$$= \left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\sin\phi\frac{\partial g}{\partial\rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\phi}\right)$$

$$= \sin^2\phi \frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2} - \frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho^2}\frac{\partial g}{\partial\phi} + \frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho}\frac{\partial^2 g}{\partial\rho\partial\phi} + \frac{\cos^2\phi}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho} +$$
$$+ \frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi\partial\rho} - \frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho^2}\frac{\partial g}{\partial\phi} + \frac{\cos^2\phi}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

$$= \sin^2\phi \frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2} - 2\frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho^2}\frac{\partial g}{\partial\phi} + 2\frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho}\frac{\partial^2 g}{\partial\rho\partial\phi} + \frac{\cos^2\phi}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho} + \frac{\cos^2\phi}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

Adunam cele doua derivate secunde, schimbarea de variabile este complete:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

5.7 Teorema Taylor pentru functii de mai multe variabile

Am vorbit deja despre teorema Taylor pentru o functie de o singura variabila $f(x)$. In mod analog, dezvoltarea Taylor a unei functii de doua variabile $f(x,y)$ este:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right] + \ldots \qquad (18)$$

unde $\Delta x = x - x_0$ si $\Delta y = y - y_0$ si toate derivatele sunt evaluate in (x_0, y_0) .

Exemplu: Gasiti dezvoltarea Taylor pana la termenii patratici in $x-2$ si $y-3$, a lui $f(x,y)=ye^{xy}$ in jurul punctului $x=2$, $y=3$.

Evaluam derivatele partiale ale functiei necesare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^2e^{xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y^3e^{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2xe^{xy}+x^2ye^{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2ye^{xy}+xy^2e^{xy}$$

Folosim relatia (18) si scriem dezvoltarea Taylor:

$$f(x,y)\approx 3e^6+9e^6(x-2)+\left(e^6+6e^6\right)(y-3)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[27e^6(x-2)^2+2\left(6e^6+18e^6\right)(x-2)(y-3)+\left(4e^6+12e^6\right)(y-3)^2\right]$$

$$f(x,y)\approx e^6\left[3+9(x-2)+7(y-3)\right]+$$

$$+\frac{e^6}{2!}\left[27(x-2)^2+48(x-2)(y-3)+16(y-3)^2\right]$$

Termenii din (18) care contin derivatele de ordinul intai pot fi scrisi in forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)$$

unde derivatele se calculeaza in punctul (x_0,y_0). Similar, termenii care contin derivatele secunde in (18) pot fi scrisi in forma:

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right]=\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) \qquad (19)$$

unde derivatele se calculeaza in punctul (x_0,y_0). Se poate arata ca termenii de ordin superior din dezvoltarea Taylor a functiei $f(x,y)$ pot fi scrisi in mod analog, si putem scrie seria Taylor completa astfel:

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)\right]_{x_0,y_0}$$

unde toti termenii din RHS se calculeaza in (x_0,y_0).