4.5.1 Convergenta seriilor de puteri-continuare

Convergenta seriilor de puteri poate fi extinsa la cazul in care variabila z este complexa. Pentru seria de puteri

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Gasim ca $P(z)$ este convergenta daca

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} z\right| = |z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Atunci avem un domeniu pentru $|z|$ pentru care $P(z)$ este convergenta, i.e. $P(z)$ converge pentru valorile lui z aflate intr-un cerc in diagrama Argand (in acest caz cerc centrat in originea diagramei Argand). Raza cercului se numeste *raza de convergenta*: daca *z* se afla in interiorul cercului, seria va fi convergenta, iar daca z se afla in exteriorul cercului seria va fi divergenta; daca *z* se afla pe cerc, convergenta trebuie testata cu alta metoda. Raza de convergenta R este data de

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Exemplu: Determinati domeniul valorilor lui *z* pentru care urmatoarea serie de puteri complexa este convergenta.

$$P(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots$$

Gasim ca $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} z\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{1}{2} z\right| = \left|\frac{z}{2}\right|$. Ceea ce arata ca $P(z)$ este convergenta daca $|z| < 2$. Atunci cercul de convergenta in diagrama Argand este centrat in origine si are raza $R = 2$. Pe acest cerc trebuie sa testam convergenta substituind valoarea lui *z* pe cerc, in $P(z)$ si analizam apoi seria care rezulta din inlocuire. Pe cercul de convergenta putem scrie $z = 2e^{i\theta}$. Substituim in $P(z)$, si obtinem

$$P(z)=1-\frac{2e^{i\theta}}{2}+\frac{4e^{i2\theta}}{4}-\dots$$

$$=1-e^{i\theta}+\left(e^{i\theta}\right)^2-\dots$$

Care, este o serie geometrica infinita complexa cu primul termen $a=1$ si ratia $q=-e^{i\theta}$

Atunci pe cercul de convergenta avem

$$P(z)=\frac{1}{1+e^{i\theta}}$$

Pentru θ diferit de π acesta este un numar complex finit, si astfel $P(z)$ este convergenta in toate punctele de pe cercul $|z|=2$ cu exceptia lui $\theta=\pi$ (i.e. $z=-2$), unde seria este divergenta. Observam ca seria $P(z)$ este dezvoltarea $(1+z/2)^{-1}$ pentru care $z=-2$ este un punct de singularitate. In general, pentru dezvoltarile in serii de puteri ale unor functii complexe in jurul unui punct din planul complex, cercul de convergenta se extinde pana la cel mai apropiat punct singular.

Centrul cercului de convergenta nu coincide neaparat cu originea. De exemplu, aplicam testul raportului la seria de puteri complexa:

$$P(z)=1+\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{4}+\frac{(z-1)^3}{8}+\dots$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(z-1)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}(z-1)\right|=\left|\frac{z-1}{2}\right|$$

Pentru convergenta $\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$, $|z-1|<2$. Astfel seria este convergenta pentru z aflat in interiorul cercului cu raza 2 centrat in $z=1$ sau punctul $(1,0)$ din diagram Argand.

4.5.2 *Operatii cu serii de puteri*

Urmatoarele reguli sunt folositoare la manipularea seriilor de puteri; acestea se aplica seriilor de puteri de variabila reala sau complexa.

i) Daca doua serii de puteri $P(x)$ si $Q(x)$ au intervale de convergenta care se suprapun intr-o oarecare masura atunci seriile care se obtin prin suma, diferenta sau produs al lui $P(x)$ cu $Q(x)$ sunt convergente pe partea comuna a intervalelor de convergenta.

ii) Daca doua serii de puteri $P(x)$ si $Q(x)$ sunt convergente pentru toate valorile lui *x*, atunci o serie poate fi substituita in cealalta pentru a obtine o a treia serie, care este convergenta pentru toate valorile lui x. De exemplu, consideram dezvoltarile in serie de puteri pentru $\sin x$ si e^x

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Ambele serii sunt convergente $\forall x \in \mathbb{R}$. Substituind seria $\sin x$ in seria pentru e^x obtinem:

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{8}{5!}x^5 + \ldots$$

Serie convergenta si ea pentru orice *x*.

iii) Daca o serie de puteri $P(x)$ este convergenta pe un interval de valori ale lui *x* atunci seria obtinuta prin derivare termen cu termen si cea obtinuta prin integrarea termen cu termen sunt convergente pe acelasi interval.

Acest lucru este usor de vazut; fie seria:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

convergenta daca $|x| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$. Seria obtinuta prin derivarea lui $P(x)$ in raport cu *x* este:

$$\frac{dP}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

si este convergenta daca

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| = R \; .$$

Similar, seria obtinuta prin integrarea termen cu termen a lui $P(x)$,

$$\int P(x)\,dx = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+2}x^{n+2} + \ldots$$

este convergenta daca:

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| = R$$

Astfel, seriile rezultate prin derivare sau integrare au acelasi interval de convergenta ca si seria originala. Totusi, chiar daca seria originala este convergenta la capetele intervalului, nu este necesar ca si seria nou obtinuta sa fie convergenta la capetele intervalului. Seria nou obtinuta trebuie testata la capete pentru a stabili daca e convergenta sau nu la capetele intervalului. Trebuie retinut ca desi seriile de puteri pot fi integrate sau diferentiate termen cu termen fara alterarea intervalului de convergenta, aceasta proprietate nu este adevarata pentru serii in general.

Trebuie sa subliniem ca diferentierea sau integrarea termen cu termen a unei serii de puteri pe intervalul de convergenta este echivalenta cu diferentierea sau integrarea functiei pe care seria o reprezinta. De exemplu, consideram dezvoltarea in serie de puteri a lui $\sin x$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

care este convergenta $\forall x \in \mathbb{R}$. Daca diferentiem termen cu termen, obtinem seria:

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Care, este dezvoltarea in serie a functiei $\cos x$, asa cum ne asteptam.

4.6 Serii Taylor

Teorema lui Taylor ne da o metoda de dezvoltare a unei functii intr-o serie de puteri in *x*, cunoscute sub numele de serii Taylor, dar poate fi aplicata numai functiilor care sunt continue si diferentiabile in domeniul valorilor lui *x* care ne intereseaza.

4.6.1 Teorema lui Taylor

Presupunem o functie $f(x)$ pe care vrem sa o dezvoltam intr-o serie de puteri in $x-a$ in jurul punctului $x=a$. Vom presupune ca, intr-un domeniu dat al valorilor x, $f(x)$ este o functie continua, are derivate continue in raport cu x, notate $f'(x)$, $f''(x)$ si asa mai departe, pana la inclusiv $f^{(n-1)}(x)$. De asemenea presupunem ca exista si $f^{(n)}(x)$ in acest domeniu.

Avand in vedere evaluarea integralei definite, putem scrie:

$$\int_a^{a+h} f'(x)dx = f(a+h) - f(a)$$

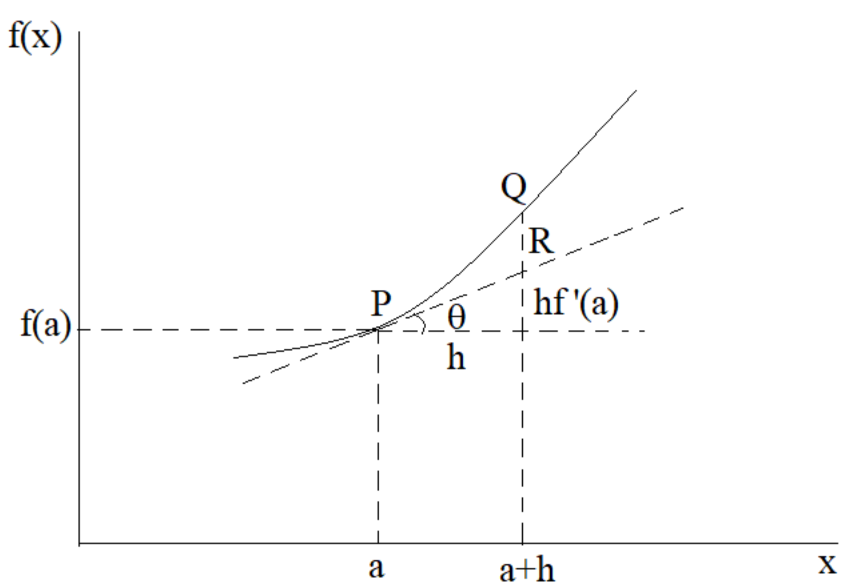
unde a, $a+h$ sunt valori din domeniul lui x. Rearanjand aceasta ecuatie, putem exprima valoarea functiei in $x=a+h$ in functie de valoarea sa in $x=a$ cu

$$f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} f'(x)dx \qquad (1)$$

O prima aproximatie pentru $f(a+h)$ poate fi obtinuta substituind $f'(a)$ pentru $f'(x)$ in relatia precedenta.

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a) \qquad (2)$$

Aceasta aproximatie este reprezentata grafic.



Putem scrie aceasta prima aproximatie in functie de *x* si *a*

$$f(x) \approx f(a) + (x-a) f'(a)$$

Si, in mod similar,

$$f'(x) \approx f'(a) + (x-a) f''(a)$$

$$f''(x) \approx f''(a) + (x-a) f'''(a)$$

Etc. Inlocuim $f'(x)$ sub integrala din (1), obtinem o a doua aproximatie:

$$f(a+h) \approx f(a) + \int_a^{a+h} \left[f'(a) + (x-a) f''(a) \right] dx$$

$$\approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) \qquad (3)$$

Putem repeata aceasta procedura de cate ori dorim (cat timp exista derivatele lui $f(x)$) pentru a obtine aproximatii de ordin superior pentru $f(a+h)$; gasim ca aproximatia de ordinul $n-1$ este:

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \qquad (4)$$

Eroarea asociata cu aproximarea lui $f(a+h)$ cu aceasta serie de ordinul $n-1$, este de ordinul urmatorului termen din serie. Eroarea sau *restul* poate fi scris in forma:

$$R_n(h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

pentru un ξ din domeniul $[a, a+h]$. *Teorema Taylor* afirma ca putem scrie egalitatea

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(h) \qquad (5)$$

Teorema poate fi scrisa intr-o forma potrivita pentru a determina $f(x)$ cu ajutorul valorii functiei si valorii derivatelor sale in $x = a$, substituind $x = a+h$ in expresia precedenta. Aceasta devine:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(x) \quad (6)$$

Iar restul are forma:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad (7)$$

si ξ se afla in intervalul $[a, x]$. Formulele (5), (6) ne dau dezvoltarea Taylor a functiei in jurul punctului $x = a$. Un caz special apare atunci cand $a = 0$. Astfel de dezvoltari Taylor, in jurul lui $x = 0$, se numesc *serii Maclaurin*.

Teorema Taylor este adevarata fara modificari semnificative si in cazul functiilor de variabila complexa. De asemenea are loc si o extensie a acestei teoreme pentru functii de mai multe variabile.

Conditiile pe care trebuie sa le satisfaca o functie pentru a putea fi dezvoltata intr-o serie de puteri infinita sunt: functia sa fie indefinit diferentiabila si restul R_n trebuie sa tinda la zero atunci cand *n* tinde la infinit, adica $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. Daca conditiile sunt indeplinite, seria de puteri va reprezenta functia in intervalul de convergenta al seriei.

Exemplu: Dezvoltati $f(x) = \sin x$ in serie Maclaurin, i.e. in jurul lui $x = 0$

Trebuie sa verificam daca $f(x) = \sin x$ poate fi reprezentata cu o serie de puteri infinita. Se poate arata usor ca derivata de ordinul *n* a functiei $f(x) = \sin x$ este:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Restul ce ramane daca dezvoltam $f(x)$ in polinom de ordinul $n-1$ in jurul lui $x = 0$ este:

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!}\sin\left(\xi + n\frac{\pi}{2}\right)$$

unde ξ se afla in domeniul $[0, x]$. Deoarece modulul sinusului este mai mic sau egal cu unu, putem scrie $|R_n(x)| \le \frac{|x^n|}{n!}$. Pentru orice valoare particulara a lui *x*, sa spunem

$x = c$, $R_n(c) \to 0$ pentru $n \to \infty$. Atunci, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, si $\sin x$ poate fi reprezentat de o serie Maclaurin infinita.

Evaluam functia si derivatele in $x = 0$ si obtinem:

$$f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f'(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f''(0) = \sin \pi = 0$$

$$f'''(0) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

Etc. Atunci, dezvoltarea in serie Maclaurin a functiei $\sin x$ este:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Observam ca deoarece $\sin x$ este functie impara, dezvoltarea sa in serie de puteri contine doar puterile impare ale lui *x*.

Putem urma o procedura similara pentru a obtine o dezvoltare in serie Taylor in jurul punctului $x = a$.

Exemplu: Dezvoltati functia $f(x) = \cos x$ in serie Taylor in jurul lui $x = \pi / 3$.

Ca in exemplul precedent, se poate arata ca:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Restul dezvoltarii functiei in polinom de ordinul $n-1$ in jurul lui $x = \pi / 3$ este:

$$R_n(x) = \frac{(x - \pi/3)^n}{n!}\cos\left(\xi + n\frac{\pi}{2}\right)$$

unde ξ se afla in domeniul $[\pi/3, x]$. Deoarece modulul cosinusului este mai mic sau egal cu unu, putem scrie $|R_n(x)| \le \frac{\left|(x-\pi/3)^n\right|}{n!}$. Ca si in exemplul precedent, pentru orice valoare particulara a lui *x*, sa spunem $x = c$, $R_n(c) \to 0$ pentru $n \to \infty$. Atunci,

$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, si $\cos x$ poate fi reprezentat de o serie Taylor infinita in jurul lui $x = \pi/3$.

Evaluam functia si derivatele acesteia in $x = \pi/3$, obtinem

$$f(\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$$

$$f'(\pi/3) = \cos(\pi/3 + \pi/2) = \cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$$

$$f''(\pi/3) = \cos(\pi/3 + \pi) = \cos(4\pi/3) = -1/2$$

Etc. Astfel, dezvoltarea in serie Taylor a functiei $\cos x$ in jurul lui $x = \pi/3$ este:

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\frac{(x-\pi/3)^2}{2!} + \ldots$$

4.6.2 Erorile de aproximare cu serii Taylor

In paragraful precedent am vazut cum sa reprezentam o functie $f(x)$ cu o serie de puteri infinita, serie care este exact egala cu $f(x)$ $\forall x$ din intervalul de convergenta al seriei. Totusi, in problemele de fizica nu ne dorim sume cu un numar infinit de termeni, dar preferam sa folosim doar un numar finit de termeni din seriile Taylor pentru a *aproxima* o functie intr-un anumit domeniu al valorilor lui *x*. In acest caz, este de dorit sa stim care este eroarea posibila maxima asociata cu aproximarea facuta.

Asa cum am vazut, in relatia

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(x)$$

o functie $f(x)$ poate fi reprezentata de o serie finita de puteri de ordinul $n-1$ impreuna cu un termen ce constitue restul.

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

si ξ se afla in intervalul $[a, x]$. $R_n(x)$ este termenul rest si reprezinta eroarea in aproximarea lui $f(x)$ cu seria finita de puteri de ordinul $n-1$ de mai sus. Deoarece valoarea exacta a lui ξ care satisfice expresia lui $R_n(x)$ este necunoscuta, o limita superioara a erorii poate fi gasita prin derivarea lui $R_n(x)$ in raport cu ξ si egalarea derivatei cu zero pentru a determina maximul.

Exemplu: Dezvoltati functia $f(x)=\cos x$ in serie Taylor in jurul lui $x=0$ si gasiti eroarea asociata cu folosirea aproximarii la evaluarea lui $\cos(0.5)$ daca se retin numai primii doi termeni nenuli. (Observatie: Dezvoltarile Taylor pentru functiile trigonometrice sunt valabile numai pentru unghiuri exprimate in radiani.)

Evaluam functia si derivatele sale in $x=0$:

$$f(0)=\cos 0=1$$

$$f'(0)=-\sin 0=0$$

$$f''(0)=-\cos 0=-1$$

$$f'''(0)=\sin 0=0$$

Astfel, pentru $|x|$ mic, gasim ca:

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$$

Deoarece $\cos x$ este functie para, dezvoltarea in serie de puteri contine numai puteri pare ale lui *x*. Atunci, pentru a estima eroarea in aceasta aproximatie, trebuie sa consideram termenul in x^4 , care este urmatorul in serie. Derivata necesara este $f^{(4)}(x)$ si este egala cu $\cos x$. Astfel, adaugam termenul rest $R_4(x)$,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\cos\xi$$

Unde ξ se afla in $[0,x]$. Astfel, cea mai mare eroare posibila este $x^4/4!$, deoarece $\cos\xi$ nu depaseste valoarea unu. Daca $x=0.5$, considerand numai primii doi termeni $\cos(0.5)\approx 0.875$ cu o eroare prezisa mai mica decat 0.0026. De fapt $\cos(0.5)=0.87758$. Astfel, la aceasta acuratete, erorea reala este 0.00258, o eroare de 0.3%.

4.6.3 Serii Maclaurin standard

Uneori este folositor sa avem la dispozitie tabele cu serii Maclaurin disponibile pentru functii elementare, fapt pentru care listam cateva astfel de serii.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \text{ pentru } -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \text{ pentru } -\infty < x < +\infty$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \text{ pentru } -1 < x < +1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \text{ pentru } -\infty < x < +\infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ pentru } -1 < x \leq 1$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ pentru } -\infty < x < +\infty$$

Toate acestea pot fi deduse aplicand teorema Taylor pentru dezvoltarea functiilor in $x = 0$.

4.7 Evaluarea limitelor

Ideea de limita a unei functii $f(x)$ atunci cand variabila x se apropie de o valoare a este intuitiva, si exista si o definitie formala pe care o dam ceva mai tarziu. In multe cazuri limita unei functii cand variabila x se apropie de o valoare a este simplu valoarea $f(a)$, dar uneori limita nu se calculeaza in acest mod. Mai intai, functia poate sa nu fie definita in $x = a$, asa cum, de exemplu,

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ia valoarea 0/0 in $x = 0$. Totusi, limita cand x se apropie de zero exista si poate fi evaluata (are valoarea unu) folosind regula l'Hopital. Alta posibilitate este aceea in care chiar daca $f(x)$ este definita in $x = a$ valoarea sa in $x = a$ sa fie diferita de $\lim_{x \to a} f(x)$. Aceasta situatie poate apare in cazul unei functii discontinua intr-un punct de discontinuitate. Definitia stricta a limitei unei functii este urmatoarea: $\lim_{x \to a} f(x) = l$

daca pentru orice numar ε oricat de mic, trebuie sa fie posibil sa gasim un numar δ astfel incat $|f(x) - l| < \varepsilon$ pentru $\forall x \neq a$, $|x - a| < \eta$. Cu alte cuvinte, atunci cand *x* se apropie foarte mult de *a*, $f(x)$ devine foarte apropiat de limita sa *l*. Trebuie subliniat ca , in general, numarul δ va depinde de ε si de forma lui $f(x)$.

Urmatoarele observatii sunt adesea utile in determinarea limitei unei functii.

i) O limita poate fi $\pm\infty$. De exemplu, pentru $x \to 0$, $1/x^2 \to \infty$

ii) O limita poate fi calculata la stanga sau la dreapta si valoarea poate fi diferita in cele doua cazuri. De exemplu, consideram functia $f(x) = tgx$. Facem pe *x* sa tinda la $\pi/2$ de la valori mai mici $f(x) \to \infty$, dar daca limita se calculeaza cu valori mai mari decat $\pi/2$ atunci $f(x) \to -\infty$. Modalitate de scriere:

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} tgx = \infty \qquad \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} tgx = -\infty$$

iii) Poate fi simplu de calculat o limita daca functia considerata are forma unei sume, produs sau cat. Presupunand ca in fiecare caz limitele exista, regulile de evaluare pentru limite sunt urmatoarele:

a) $\lim_{x \to a} \{ f(x) + g(x) \} = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

b) $\lim_{x \to a} \{ f(x) g(x) \} = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$

c) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, daca numaratorul si numitorul nu sunt simultan zero sau infinit.

Exemple: Evaluati limitele:

$$\lim_{x \to 1} \left(x^2 + 2x^3 \right) , \quad \lim_{x \to 0} \left(x \cos x \right) , \quad \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \to 1} \left(x^2 + 2x^3 \right) \overset{a}{=} \lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} 2x^3 = 3$$

$$\lim_{x \to 0} \left(x \cos x \right) \overset{b}{=} \lim_{x \to 0} x \cdot \lim_{x \to 0} \cos x = 0 \times 1 = 0$$

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x}{x}\overset{c}{=}\frac{\lim_{x\to\pi/2}\sin x}{\lim_{x\to\pi/2}x}=\frac{1}{\pi/2}=\frac{2}{\pi}$$

iv) Limitele functiilor de x care contin exponenti care sunt functii de x pot fi adesea determinate considerand logaritmul.

Exemplu: Evaluati limita: $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^{x^2}$

Definim:

$$y=\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^{x^2}$$

Si consideram logaritmul limitei cerute, i.e.

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\left[x^2\ln\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)\right]$$

Folosind seria Maclaurin pentru $\ln(1+x)$ putem dezvolta logaritmul in serie si obtinem:

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\left[x^2\left(-\frac{a^2}{x^2}-\frac{a^4}{2x^4}-\frac{a^6}{3x^6}-\dots\right)\right]=-a^2$$

Atunci, deoarece $\lim_{x\to\infty}\ln y=-a^2$ urmeaza ca $\lim_{x\to\infty}y=e^{-a^2}$.

v) Regula l'Hopital poate fi folosita; aceasta regula este o extensie a proprietatii iii)c. Cazul in care numaratorul si numitorul sunt ambii zero sau infinit, este tratat in cele ce urmeaza. Consideram mai intai cazul in care

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

are $f(a)=g(a)=0$. Dezvoltam numaratorul si numitorul in serie Taylor si obtinem:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)+(x-a)f'(a)+\left[(x-a)^2/2!\right]f''(a)+\ldots}{g(a)+(x-a)g'(a)+\left[(x-a)^2/2!\right]g''(a)+\ldots}$$

Dar, $f(a)=g(a)=0$, astfel:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)+\left[(x-a)/2!\right]f''(a)+\ldots}{g'(a)+\left[(x-a)/2!\right]g''(a)+\ldots}$$

Gasim ca:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Cu conditia ca $f'(a)$ si $g'(a)$ sa nu fie ambele nule. Daca, $f'(a)$ si $g'(a)$ sunt ambele nule atunci acelasi proces poate fi aplicat raportului $f'(x)/g'(x)$ si obtinem:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f''(a)}{g''(a)}$$

Cu conditia ca cel putin unul dintre $f''(a)$ si $g''(a)$ sa fie nenul. Daca limita originala exista atunci aceasta poate fi gasita repetand procesul de cate ori este necesar pentru ca raportul derivatelor de ordinul *n* sa nu fie o nedeterminare 0/0, i.e.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

Exemplu: Evaluati limita:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

Observam ca in $x=0$, numaratorul si numitorul sunt zero. Astfel, aplicam regula l'Hopital, derivam si obtinem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

Pana acum am considerat numai cazul $f(a)=g(a)=0$. Pentru cazul in care $f(a)=g(a)=\infty$ mai putem aplica regula l'Hopital scriind:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{1/g(x)}{1/f(x)}$$

care este acum de forma 0/0 in $x=a$. Notam ca regula l'Hopital ramane valabila si la determinarea limitei pentru $x\to\infty$, i.e. cand $a=\infty$. Acest lucru se argumenteaza simplu facand schimbarea de variabila $y=1/x$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f(1/y)}{g(1/y)}=\lim_{y\to 0}\frac{-f'(1/y)/y^2}{-g'(1/y)/y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{f'(1/y)}{g'(1/y)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Rezumat al metodelor de evaluare a limitelor

Pentru a afla limita unei functii continue $f(x)$ intr-un punct $x=a$, pur si simplu inlocuiti valoarea *a* in functie avand in vedere ca $\frac{0}{\infty}=0$ si ca $\frac{\infty}{0}=\infty$. Dificultati apar atunci cand obtinem expresiile $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$. In acest caz derivati numaratorul si numitorul si incercati din nou. Continuati derivarea pana cand cele doua functii de la numerator si numitor nu sunt ambele nule sau infinite. Daca apare nedeterminarea $0\times\infty$ atunci aceasta poate fi rescrisa in forma $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.