Testul Integral

Testul integral este o unealta puternica pentru investigarea convergentei unei serii $\sum u_n$. Presupunem ca exista o functie $f(x)$ pozitiva monoton descrescatoare pentru *x* mai mare decat o valoare fixata x_0 si pentru care $f(n)=u_n$, i.e. valoarea functiei pentru un *x* intreg este egala cu termenul corespunzator din seria aflata in investigatie. Atunci, se poate arata ca , daca limita integralei

$$\lim_{N\to\infty}\int_{x_0}^{N} f(x)\,dx$$

exista, atunci seria $\sum u_n$ este convergenta. Altfel seria este divergenta.

Exemplu: Determinati daca urmatoarea serie este convergenta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-3/2)^2}=4+4+\frac{4}{9}+\frac{4}{25}+\ldots$$

Consideram functia $f(x)=\dfrac{1}{(x-3/2)^2}$. Desigur $f(n)=u_n$ si $f(x)$ descreste monoton pentru $x>3/2$. Aplicand testul integral, consideram

$$\lim_{N\to\infty}\int_{2}^{N}\frac{1}{(x-3/2)^2}\,dx=\lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{x-3/2}\right)\Bigg|_{2}^{N}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2-3/2}-\frac{1}{N-3/2}\right)=2$$

Deoarece limita exista, seria este convergenta.

Testul Integral este util in examinarea convergentei seriei Dirichlet sau armonica generalizata. Aceasta este o serie speciala:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

Aceasta este convergenta pentru $p>1$ si divergenta pentru $p\le 1$. Acest criteriu de convergenta poate fi derivat cum urmeaza.

Cu testul Integral, consideram $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$.

$$\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x^p}dx = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right)\Bigg|_1^N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right)$$

Limita tinde la $\frac{1}{p-1}$ daca $p>1$ si ∞ pentru $p\le 1$.

Testul radacinii Cauchy Testul Cauchy poate fi folosit in stabilirea convergentei unei serii al carei termen general contine o putere *n*. Daca definim limita

$$\rho = \lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}}$$

atunci se poate arata ca seria $\sum u_n$ converge daca $\rho<1$. Daca $\rho>1$ atunci seria este divergenta. Natura seriei nu este determinata pentru $\rho=1$.

Exemplu: Determinati daca urmatoarea serie este convergenta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \ldots$$

Cu testul radacinii al lui Cauchy, avem

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Deci seria este convergenta.

Gruparea termenilor

Consideram seria Dirichlet cu o demonstratie alternativa a convergentei sale care foloseste tehnica gruparii termenilor. In general sunt metode mai bune pentru determinarea convergentei, dar metoda gruparii termenilor poate fi folosita daca nu este imediat evident cum sa abordam o problema cu o metoda mai buna.

La inceput consideram cazul $p>1$, si grupam termenii din serie dupa cum urmeaza:

$$S_N = \frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \ldots + \frac{1}{15^p}\right) + \ldots$$

Se observa ca, fiecare paranteza a acestei serii este mai mica decat fiecare termen din seria geometrica:

$$S_N = \frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \dots$$

$$S_N = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} + \dots$$

Aceasta serie geometrica are ratia $q = \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$; deoarece $p > 1$, urmeaza ca ratia $q < 1$ si seria geometrica este convergenta. Atunci testul de comparatie ne arata ca seria Dirichlet (Riemann zeta) este convergenta pentru $p > 1$.

Divergenta seriei Dirichlet pentru $p \le 1$ poate fi constatata mai intai pentru cazul $p = 1$. Seria este

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Care nu este convergenta, asa cum se vede daca grupam termenii seriei in paranteze astfel

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

Fiecare suma de termeni din paranteze este $\ge 1/2$ si, pentru ca putem forma cate astfel de grupuri dorim, este clar ca S_N creste indefinit atunci cand N creste. S_N nu are limita.

In cazul seriei Dirichlet cu $p < 1$, observam ca fiecare termen in serie este mai mare decat termenul corespunzator din seria armonica cu $p = 1$. Cu alte cuvinte,

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} \text{ , pentru } n > 1 \text{ , } p < 1$$

Testul de comparatie ne arata ca seria Dirichlet va fi divergenta pentru toti $p \le 1$.

4.3.3 *Test pentru seriile alternate*

Testele discutate in ultimul paragraf se refera la detrminarea convergentei unei serii cu termini reali pozitivi $\sum |u_n|$, si daca seriile $\sum u_n$ sunt absolut convergente.

Cu toate acestea, uneori este folositor sa stim daca seria este numai convergenta si nu absolut convergenta. Acest caz apare in cazul seriilor cu numar infinit de termeni pozitivi si infinit de termeni negativi. Vom considera convergenta seriilor in care termenii pozitivi si negativi alterneaza, i.e. *serii alternate*.

O serie alternate poate fi scrisa

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \ldots$$

cu toti $u_n \geq 0$. Se poate arata ca o astfel de serie este convergenta daca:

i) $u_n \to 0$ pentru $n \to \infty$

ii) $u_{n-1} > u_n$ pentru toti $n > N$ pentru un N finit.

Daca aceste conditii nu sunt indeplinite seria oscileaza.

Pentru a demonstra aceasta concluzie, presupunem ca N este impar si consideram seria care incepe cu u_N. Suma primilor *2m* termeni sunt

$$S_{2m} = (u_N - u_{N+1}) + (u_{N+2} - u_{N+3}) + \ldots (u_{N+2m-2} - u_{N+2m-1})$$

Cu conditia (ii) , toate parantezele sunt pozitive, si astfel S_{2m} creste daca m creste. Putem scrie si

$$S_{2m} = u_N - (u_{N+1} - u_{N+2}) - (u_{N+3} - u_{N+4}) - \ldots (u_{N+2m-3} - u_{N+2m-2}) - u_{N+2m-1}$$

Si deoarece fiecare paranteza este pozitiva, trebuie sa avem $S_{2m} < u_N$. Astfel, deoarece S_{2m} este totdeauna mai mic decat u_N pentru orice m . Sirul S_{2m} crescator si marginit superior deci convergent. In concluzie, seria alternata este convergenta. O demonstratie analoaga poate fi construita pentru N par.

Exemplu: Determinati daca seria armonica alternata este convergenta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Aceasta serie in mod clar satisface cele doua conditii i) si ii) si de aceea este convergenta. Totusi, seria corespunzatoare a valorilor absolute este divergenta. Avem un caz de convergenta conditionata sau semiconvergenta.

4.4 Operatii cu serii

Urmatoarele reguli de calcul se aplica seriilor finite si infinite.

i)Daca $\sum u_n = S$ atunci $\sum ku_n = kS$ unde k este o constanta.

ii)Daca $\sum u_n = S$ si $\sum v_n = T$ atunci $\sum (u_n + v_n) = S + T$.

iii)Daca $\sum u_n = S$ atunci $a + \sum u_n = a + S$. O simpla extensie a acestui rezultat trivial arata ca renuntarea/introducerea unui numar finit de termeni oriunde in serie nu afecteaza convergenta.

iv)Daca seriile infinite $\sum u_n$ si $\sum v_n$ sunt ambele absolut convergente atunci seria $\sum w_n$, unde

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1$$

este si ea absolut convergenta. Seria $\sum w_n$ se numeste *produs Cauchy* a doua serii date. Mai mult , daca $\sum u_n$ converge la suma S si $\sum v_n$ converge la suma T atunci $\sum w_n$ este convergenta la ST.

v)In general, nu putem afirma ca prin derivare si integrare termen cu termen a unei serii , rezultatul este o noua serie cu aceleasi proprietati de convergenta ca si seria initiala.

4.5 Serii de puteri

O serie de puteri are forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

unde $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ sunt constante. Astfel de serii apar in fizica si sunt folositoare pentru ca , pentru $|x| < 1$, ultimii termeni din serie pot deveni foarte mici si pot fi neglijati. De exemplu, seria

$$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Desi in principiu are o infinitate de termeni, in practica poate fi simplificata daca x se intampla sa ia valori mici in comparatie cu unitatea. Pentru a vedea mai bine acest lucru, vedem ca $P(x)$ pentru $x = 0.1$ are urmatoarele valori: 1 daca se ia in considerare un termen, 1.1 daca se iau in considerare doi termeni, 1.11 pentru trei termeni, 1.111 pentru patru termeni, etc. Daca cantitatea pe care o reprezinta poate fi masurata cu o acuratete de doua zecimale , atunci toti termenii cu exceptia primilor trei pot fi ignorati, adica cand $x = 0.1$ sau mai mic

$$P(x) = 1 + x + x^2 + O(x^3) \approx 1 + x + x^2$$

Acest tip de aproximatie este folosita adesea pentru a simplifica ecuatii, pentru a aduce ecuatii in forma manevrabila. Poate parea extrem de imprecis la prima vedere, dar este perfect acceptabil daca rezultatele obtinute sunt in concordanta cu rezultatele experimentale.

Simbolurile O si $\approx$ folosite mai sus au nevoie de explicatii. Acestea sunt folosite pentru a compara comportamentul a doua functii atunci cand o variabila de care ambele functii depind tinde la o limita particulara, de obicei zero sau infinit. Pentru doua functii $f(x)$ si $g(x)$, cu *g* potitiva, definitiile formale ale simbolurilor precedente sunt:

i) Daca exista o constanta *k* astfel incat $|f| \le kg$ pe masura ce *x* tinde la o anumita limita, atunci $f = O(g)$

ii) Daca pentru *x* tinzand la o anumita limita raportul f / g tinde la limita *l*, cu $l \neq 0$, atunci $f \approx l\mathrm{g}$. Afirmatia $f \approx g$ inseamna ca raportul celor doua functii tinde la unitate.

4.5.1 Convergenta seriilor de puteri

Natura seriilor de puteri este cruciala din motive practice. De exemplu, daca folosim o serie de puteri pentru a aproxima ceva, este important ca aceasta tinde la un rezultat precis daca adunam tot mai multi termeni in aproximatia considerata. Fie seria de puteri generala

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Folosind testul raportului al lui D'Alembert, vedem ca $P(x)$ converge absolut daca

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

Astfel, convergenta lui $P(x)$ depinde de valoarea lui *x*, i.e. in general exista un domeniu al valorilor lui x pentru care $P(x)$ este convergenta, un *interval de convergenta*. Trebuie mentionat ca la limita acestui domeniu $\rho=1$, seria poate sa fie convergenta sau divergenta. Convergenta seriei la capetele domeniului poate fi determinata substituind aceste valori ale lui x in seria de puteri $P(x)$ si testand efectiv seria numerica obtinuta pentru convergenta cu orice test ce poate fi aplicat.

Exemplu: Determinati intervalul de convergenta pentru seria de puteri:

$$P(x)=1+2x+4x^2+8x^3+\dots$$

Folosind metoda indicata, calculam

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{2^n}x\right|=|2x|$$

Seria de puteri va fi convergenta daca $|2x|<1$, $|x|<1/2$. Examinam capetele intervalului separate:

$$P(1/2)=1+1+1+\dots$$

$$P(-1/2)=1-1+1-\dots$$

Evident, $P(1/2)$ este divergenta, iar $P(-1/2)$ oscileaza. Atunci $P(x)$ nu este convergenta la nici unul dintre capete dar, ramane convergenta pentru -1/2<x<1/2 .