4.3 Convergenta seriilor infinite

Desi sumele unor serii infinite populare pot fi calculate, suma unei serii infinite, in general, este dificil de calculat. Cu toate acestea, este util sa stim daca suma partiala a unei astfel de serii este convergenta la o limita, chiar daca limita nu poate fi gasita explicit. Asa cum stim, daca $N \to \infty$, suma partiala

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n \qquad (1)$$

a unei serii poate tinde la o limita definita (adica la suma S a seriei), poate creste sau descreste fara limita, sau poate oscila.

Pentru a investiga convergenta oricarei serii, este util sa avem disponibile un numar de teste si teoreme cu larga aplicabilitate.

4.3.1 *Convergenta absoluta si conditionata*

La inceput punctam cateva observatii. In general, o serie infinita $\sum u_n$ poate avea termeni complecsi, si in cazul special al unei serii cu termini reali, acestia pot fi pozitivi si negativi. Din oricare astfel de serie, totusi noi putem totdeauna construe alta serie $\sum |u_n|$ in care fiecare termen este pur si simplu modulul termenului corespunzator din seria originala. Fiecare termen in noua serie va fi un numar real pozitiv.

Daca seria $\sum |u_n|$ este convergenta atunci $\sum u_n$ este de asemenea convergenta si $\sum u_n$ se spune ca este *absolut convergenta*, i.e. seria formata cu cu valorile absolute este convergenta. Pentru o serie absolut convergenta, termenii pot fi reordonati fara a afecta convergenta seriei. Totusi, daca $\sum |u_n|$ este divergenta in timp ce $\sum u_n$ este convergenta, atunci spunem ca $\sum u_n$ este *conditionat convergenta* sau *semiconvergenta*. Pentru serii conditionat convergente, rearanjarea ordinii termenilor poate afecta comportamentul sumei, si natura seriei. De fapt, o teorema a lui Riemann arata ca printr-o rearanjare potrivita o serie conditionat convergenta poate fi facuta sa fie convergenta la orice limita arbitrara, sau sa fie divergenta, sau sa fie oscilanta. Desigur, daca seria originala $\sum u_n$ are doar termeni reali pozitivi si este convergenta atunci automat este si absolut convergenta.

4.3.2 *Convergenta seriilor cu termeni reali pozitivi*

Asa cum am discutat, pentru a testa convergenta absoluta a unei serii $\sum u_n$, mai intai construim seria corespunzatoare $\sum |u_n|$ care este alcatuita doar din termeni reali pozitivi. De aceea in acest paragraf ne vom focusa doar pe serii cu termeni reali pozitivi.

Vom discuta cateva teste care pot fi folosite pentru a investiga convergenta unor astfel de serii. Dar, inainte de a face acest lucru, notam un aspect crucial. In toate testele, sau discutiile despre convergenta seriilor, problema nu se refera la ce se intampla cu primii zece, sau primii o suta, sau primii un milion de termeni (sau orice alt numar finit de termeni) ceea ce conteaza sunt ultimii termeni.

Test preliminar

O conditie necesara dar nu suficienta pentru ca o serie cu termeni reali pozitivi $\sum u_n$ sa fie convergenta este ca termenul u_n sa tinda la zero atunci cand n tinde la infinit, adica este necesar ca

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (2)$$

Daca aceasta conditie nu este satisfacuta atunci seria este divergenta. Chiar daca este satisfacuta, totusi seria mai poate fi divergenta si alte teste sunt necesare.

Testul de comparatie

Consideram doua serii $\sum u_n$ si $\sum v_n$ si presupunem ca stim ca ultima serie este convergenta (dintr-o analiza anterioara). Apoi, daca fiecare termen u_n din prima serie este mai mic sau egal cu termenul corespnzator v_n din a doua serie , pentru toti n mai mari decat o valoare fixata N care va varia de la o serie la alta, atunci seria originala $\sum u_n$ este si ea convergenta. Cu alte cuvinte, daca $\sum v_n$ este convergenta si

$$u_n \le v_n \text{ pentru } n > N,$$

atunci $\sum u_n$ este convergenta.

Dar, daca $\sum v_n$ este divergenta si $u_n \geq v_n$ pentru toti n mai mari decat un intreg fixat, atunci $\sum u_n$ este divergenta.

Exemplu: Determinati daca urmatoarea serie este convergenta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{25} + \ldots \qquad (3)$$

O sa comparam aceasta serie cu seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \qquad (4)$$

Serie care se obtine inlocuind $x = 1$ in dezvoltarea Maclaurin a exponentialei e^x

$$e^1 = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Clar, cea de a doua serie este convergenta deoarece este alcatuita doar din termeni pozitivi si are o suma finita. Astfel, deoarece fiecare termen u_n din seria (3) este mai mic decat termenul corespunzator $1/n!$ din seria (4), concludem cu testul de comparatie ca seria (3) este si ea convergenta.

Testul raportului D'Alembert

Testul raportului determina daca o serie este convergenta prin compararea marimii relative a termenilor succesivi. Daca consideram o serie $\sum u_n$ si fie

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \qquad (5)$$

atunci daca $\rho < 1$ atunci seria este convergenta; daca $\rho > 1$ seria este divergenta; daca $\rho = 1$ atunci comportamentul seriei nu este determinat cu acest test.

Pentru a demonstra acest rezultat observam ca daca limita (5) este mai mica ca unu, adica $\rho < 1$ atunci putem gasi o valoare r in domeniul $\rho < r < 1$ si o valoare N astfel incat

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r \ , \ \forall n > N$$

Acum termenii seriei u_n care urmeaza dupa u_N sunt

$$u_{N+1},\ u_{N+2},\ u_{N+3},\ \dots$$

Si fiecare dintre acestia sunt mai mici decat termenii corespunzatori din sirul

$$ru_N,\ r^2u_N,\ r^3u_N,\ \dots \tag{6}$$

Termenii din seria (6) sunt cei ai unei serii geometrice cu ratia *r* care este mai mica decat unu. Aceasta serie geometrica in consecinta este convergenta si atunci cu testul de comparatie discutat si seria originala $\sum u_n$ este convergenta. In mod analog poate fi demonstrat cazul divergent $\rho > 1$.

Exemplu: Determinati daca urmatoarea serie este convergenta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Asa cum s-a mentionat in exemplul precedent, aceasta serie poate fi obtinuta inlocuind $x = 1$ in dezvoltarea Maclaurin a exponentialei e^x, si atunci stim ca aceasta este convergenta si are suma $e^1 = e$. Cu toate acestea, putem folosi testul raportului D'Alembert pentru a confirma ca aceasta serie este convergenta.

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \tag{7}$$

si deoarece $\rho < 1$, seria este convergenta, asa cum ne asteptam.

Testul de comparatie al raportului

Asa cum sugereaza numele, testul de comparatie al raportului este o combinatie a testelor de comparatie si al raportului. Consideram doua serii $\sum u_n$ si $\sum v_n$ si presupunem ca stim ca ultima dintre acestea este convergenta. Se poate arata ca daca

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}\ ,\ \forall n > N$$

atunci $\sum u_n$ este si ea convergenta.

Similar, daca

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$ pentru toti *n* sufficient de mari

si $\sum v_n$ este divergenta atunci $\sum u_n$ este si ea divergenta.

Exemplu: Determinati daca seria urmatoare este convergenta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$

Raportul termenilor succesivi pentru *n* tinzand la infinit este dat de

$$R = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n!}{(n+1)!} \right]^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^2$$

Care este mai mic decat raportul termenilor succesivi ai seriei convergente din exemplul precedent

$$\left(\frac{1}{n+1} \right)^2 \leq \frac{1}{n+1}$$

Atunci cu testul de comparative al raportului, seria data este convergenta. Sigur convergenta acestei serii poate fi demonstratea si cu testul raportului.

Testul catului

Testul catului poate fi considerat ca o combinatie a testelor de comparatie si raport.

Consideram doua serii $\sum u_n$ si $\sum v_n$, si definim ρ ca fiind limita

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) \qquad (7)$$

Atunci, se poate arata ca:

- Daca $\rho \neq 0$ dar este finit atunci $\sum u_n$ si $\sum v_n$ sunt fie ambele convergente fie divergente.
- Daca $\rho = 0$ si $\sum v_n$ convergenta atunci $\sum u_n$ este convergenta
- Daca $\rho = \infty$ si $\sum v_n$ divergenta atunci $\sum u_n$ este divergenta

Exemplu: Stiind ca seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergenta, determinati natura urmatoarei serii

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-n-3}{n^3+2n} \tag{8}$$

Daca consideram $u_n=\left(4n^2-n-3\right)/\left(n^3+2n\right)$ si $v_n=1/n$ atunci limita (7) devine

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4n^2-n-3\right)/\left(n^3+2n\right)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n^2-3n}{n^3+2n}=4$$

Deoarece ρ este finit si nenul si $\sum v_n$ este divergenta, seria data (8) este si ea divergenta.