Cap. 4 Serii si limite

4.1 Serii

O serie este o suma care poate avea un numar finit sau infinit de termeni. In fiecare din cele doua cazuri, suma primilor N termeni ai seriei se numeste *suma partiala* si se scrie:

$$S_N = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_N$$

unde termenii seriei u_n , $n = 1, 2, 3, \ldots, N$ sunt numere, care pot fi in general complexe. Daca termenii sunt numere complexe atunci suma partial S_N va fi complexa si se va scrie

$$S_N = X_N + iY_N$$

unde X_N si Y_N sunt sumele partiale ale partilor reale si imaginare ale fiecarui termen si ambele sunt reale. Daca o serie are numai N termeni atunci suma partiala S_N va fi suma seriei. Uneori intalnim serii in care fiecare termen depinde de o variabila, x, de exemplu. Astfel, consideram seria infinita:

$$S(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Acesta este un exemplu de serie de puteri. In fapt, este dezvoltarea in serie Maclaurin a exponentialei e^x . Pentru aceasta serie $S(x) = e^x$ si desigur, variaza in acord cu valorile variabilei x. O serie poate sa depinda si de o variabila complexa z.

Un sir aleator de numere poate fi descris ca o serie si poate fi cautata suma seriei. Dar, in cazurile de ineres practic, in mod usual va exista un fel de relatie intre termeni consecutivi ai seriei. De exemplu, daca al n-lea termen al seriei va fi dat de formula:

$$u_n = \frac{1}{2^n}$$

pentru $n = 1, 2, 3, \ldots, N$, atunci suma primilor N termeni va fi:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^N} \qquad (1)$$

Este clar ca suma unui numar finit de termeni este finita, cu conditia ca fiecare termen sa fie finit. In practica suntem interesati uneori de suma unei serii cu numar infinit de termeni finiti. Suma unei serii infinite de termeni este definita cel mai bine prin considerarea sumei partiale a primilor N termeni, S_N. Daca valoarea sumei partiale S_N tinde la o limita finita, S, atunci cand N tinde la infinit, spunem ca seria este *convergenta* si suma sa este limita S. Cu alte cuvinte, suma unei serii infinite este

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N$$

cu conditia ca limita sa existe. Pentru serii complexe infinite, daca S_N tinde la o limita $S = X + iY$ cand $N \to \infty$, inseamna ca $X_N \to X$ si $Y_N \to Y$ separat, i.e. partile reale si imaginare ale seriei sunt fiecare serii convergente cu sumele X si Y respectiv.

Totusi, nu toate seriile infinite au sume finite. Cand $N \to \infty$, valoarea sumei partiale S_N poate fi divergenta: aceasta poate tinde la $+\infty$ sau $-\infty$, sau poate oscila. Mai mult, pentru o serie in care fiecare termen depinde de o variabila, convergenta poate depinde de valorile asumate de variabila. Faptul ca o serie infinita este convergenta, divergenta sau oscileaza are implicatii importante atunci cand descriem un sistem fizic.

4.2 Suma seriilor

Deseori, este necesar sa calculam suma seriilor finite sau a seriilor infinite convergente. In cele ce urmeaza consideram serii aritmetice, geometrice si aritmetico-geometrice, care sunt comune si pentru care sumele sunt usor de gasit.

4.2.1 Serii aritmetice

O serie aritmetica se caracterizeaza prin faptul ca diferenta dintre doi termini consecutivi este constanta. Suma unei serii aritmetice generale se scrie:

$$S_N = a + (a+r) + (a+2r) + \ldots + \left[a + (N-1)r\right] = \sum_{n=0}^{N-1}(a+nr)$$

Rescriind seria in ordine inversa obtinem

$$S_N = \left[a + (N-1)r\right] + \ldots + (a+2r) + (a+r) + a$$

Si adunand termen cu termen cele doua relatii, gasim

$$2S_N = N\left[a + a + (N-1)r\right]$$

$$S_N = \frac{N}{2}(\text{primul termen+ultimul termen}) \qquad (2)$$

Daca adunam un numar infinit de astfel de termeni seria va creste sau descreste indefinit; adica seria va fi divergenta.

Exemplu: Sumati intregii dintre 1 si 1000 inclusiv.

Aceasta este o serie aritmetica cu $a=1$, $r=1$ si $N=1000$. Atunci cu formula (2)

$$S_N = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500500$$

4.2.2 Serii geometrice

Ecuatia (1) este un exemplu de serie geometrica, care are caracteristica ca raportul a doi termeni consecutivi este o constanta (½ in acest exemplu). Suma unei serii geometrice, in general ,se scrie:

$$S_N = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} aq^n$$

unde a este o constanta si q este raportul termenilor consecutivi, ratia comuna. Suma poate fi evaluate considerand S_N si qS_N :

$$S_N = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{N-1}$$

$$qS_N = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots + aq^N$$

Daca scadem cele doua relatii, obtinem

$$(1-q)S_N = a - aq^N$$

$$S_N = \frac{a\left(1-q^N\right)}{1-q} \qquad (3)$$

Pentru o serie cu numar infinit de termeni si $|q|<1$, avem $\lim_{N\to\infty} q^N = 0$ si astfel suma tinde la limita

$$S = \frac{a}{1-q} \qquad (4)$$

In seria (1) $q=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{2}$ si astfel $S=1$.

Pentru $|q|\geq 1$, seria este fie divergenta fie oscilanta.

Exemplu: Consideram o minge care cade de la o inaltime de 27m si la fiecare ciocnire cu pamantul pastreaza doar o treime din energia sa cinetica; astfel dupa o ciocnire, aceasta se va intoarce la o inaltime de 9m, dupa doua ciocniri la 3m si asa mai departe. Gasiti distanta totala parcursa intre prima ciocnire si a M-a ciocnire.

Distanta totala parcursa intre prima ciocnire si a M-a ciocnire este data de suma a $M-1$ termeni:

$$S_{M-1} = 2\left(9+3+1+\ldots\right) = 2\sum_{m=0}^{M-2}\frac{9}{3^m}$$

Pentru $M>1$, unde factorul 2 este inclus pentru a permite urcarea si coborarea mingii. In paranteza avem o progresie geometrica cu primul termen 9 si ratia 1/3 si atunci distanta cu formula (3) este:

$$S_{M-1} = 2\frac{9\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{M-1}\right]}{1-\frac{1}{3}} = 27\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{M-1}\right]$$

4.2.3 Serii aritmetico-geometrice

O serie aritmetico-geometrica este o combinatie de serie aritmetica si geometrica.

Forma generala este:

$$S_N = a + (a+r)q + (a+2r)q^2 + \ldots + \left[a + (N-1)r\right]q^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1}(a+nr)q^{N-1}$$

Suma poate fi evaluata in mod similar seriilor pur geometrice, inmultind cu q si scazand apoi relatiile.

$$qS_N = aq + (a+r)q^2 + (a+2r)q^3 + \ldots + \left[a + (N-1)r\right]q^N$$

$$(1-q)S_N = a + rq + rq^2 + \ldots + rq^{N-1} - \left[a + (N-1)r\right]q^N$$

Folosind expresia sumei geometrice (3) si rearanjand obtine:

$$(1-q)S_N = \frac{rq\left(1-q^{N-1}\right)}{1-q} + a - \left[a + (N-1)r\right]q^N$$

$$S_N = \frac{a - \left[a + (N-1)r\right]q^N}{1-q} + \frac{rq\left(1-q^{N-1}\right)}{(1-q)^2}$$

Pentru o serie infinita cu $|q| < 1$, $\lim_{N\to\infty} q^N = 0$ si suma tinde la limita:

$$S = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2} \qquad (5)$$

Ca si in cazul seriilor geometrice, daca $|q| \geq 1$, seria este fie divergenta fie oscilanta.

Exemplu: Calculati suma seriei:

$$S = 2 + \frac{5}{2} + \frac{8}{2^2} + \frac{11}{2^3} + \ldots$$

Aceasta este o serie aritmetico-geometrica infinita cu $a = 2$, $r = 3$ si $q = 1/2$. Atunci din (5) obtinem $S = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} + \frac{3\times\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 10$

4.2.4 Metoda diferentelor

Metoda diferentelor este uneori folositoare la sumarea seriilor care sunt mai complicate decat cele din exemplele precedente. Consideram seria generala:

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_N$$

Daca termenii seriei u_n , pot fi exprimati in forma:

$$u_n = f(n) - f(n-1)$$

Cu ajutorul unei functii $f(n)$ atunci suma sau suma partiala va fi:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = f(N) - f(0)$$

Acest rezultat se demonstreaza foarte usor,

$$S_N = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_N$$

Si deoarece $u_n = f(n) - f(n-1)$, putem scrie

$$S_N = \left[f(1) - f(0)\right] + \left[f(2) - f(1)\right] + \left[f(3) - f(2)\right] + \ldots + \left[f(N) - f(N-1)\right]$$

Reducand majoritatea termenilor, observam ca

$$S_N = f(N) - f(0)$$

Exemplu: Evaluati suma $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$

Folosind descompunerea in fractii simple, gasim:

$$u_n = -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

$u_n = f(n) - f(n-1)$ cu $f(n) = -1/(n+1)$, si astfel suma este

$$S_N = f(N) - f(0) = -\frac{1}{N+1} + 1 = \frac{N}{N+1}$$

Metoda diferentelor poate fi extinsa la evaluarea sumelor in care fiecare termen poate fi exprimat in forma:

$$u_n = f(n) - f(n-m) \tag{6}$$

Unde *m* este un intreg. Scriind suma celor *N* termeni cu fiecare termen exprimat in forma (6) si reducand perechile de termeni ca in cazul precedent, gasim:

$$S_N = \sum_{k=1}^{m} f(N-k+1) - \sum_{k=1}^{m} f(1-k)$$

Exemplu: Evaluati suma $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)}$

Descompunem in fractii simple:

$$u_n = -\left[\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2n}\right]$$

Prin urmare $u_n = f(n) - f(n-2)$ cu $f(n) = -\frac{1}{2(n+2)}$ si astfel suma este:

$$S_N = f(N) + f(N-1) - f(0) - f(-1) = -\frac{1}{2(N+2)} - \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

Metoda diferentelor este flexibila si poate fi folosita la evaluarea sumelor si atunci cand fiecare termen nu poate fi exprimat ca in (6). Metoda inca se bazeaza pe capacitatea de a scrie u_n in functie de o singura functie astfel incat majoritatea termenilor sa se reduca, ramanand doar cativa termeni de la inceputul si la sfarsitul seriei.

Exemplu: Evaluati suma $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Descompunand in fractii simple:

$$u_n = \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n}$$

Prin urmare, $u_n = f(n) - 2f(n-1) + f(n-2)$. Scriem toti termenii sumei in aceasta forma, reducem cea mai mare parte a termenilor si ramanem cu:

$$S_N = f(N) - f(N-1) - f(0) + f(-1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+1}\right)$$

4.2.5 Serii cu numere naturale

Seriile care contin numerele naturale 1, 2, 3, … sau patratele, sau cuburile acestora sunt des mentionate. Consideram pentru inceput suma primelor *N* numere natural,

$$S_N = 1 + 2 + 3 + \ldots + N = \sum_{n=1}^{N} n$$

Aceasta serie este una aritmetica cu primul termen $a = 1$ si ratia $r = 1$. Cu formula (2) $S_N = \frac{N}{2}(1+N)$.

Apoi consideram suma patratelor primelor *N* numere natural:

$$S_N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + N^2 = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

Aceasta suma poate fi calculate cu metoda diferentelor. Termenul general $u_n = n^2$, trebuie sa fie exprimat in forma $f(n) - f(n-1)$ cu o functie $f(n)$.

Consideram functia:

$$f(n) = n(n+1)(2n+1) \quad \Rightarrow \quad f(n-1) = (n-1)n(2n-1)$$

Pentru aceasta functie $f(n) - f(n-1) = 6n^2$, si prin urmare putem scrie:

$$u_n = \frac{1}{6}\left[f(n) - f(n-1)\right]$$

Atunci, cu metoda diferentelor

$$S_N = \frac{1}{6}\left[f(N) - f(0)\right] = \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1)$$

In final, calculam suma cuburilor primelor *N* numere naturale.

$$S_N = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + N^3 = \sum_{n=1}^{N} n^3$$

Din nou folosim metoda diferentelor. Consideram functia:

$$f(n) = \left[n(n+1)\right]^2 \quad \Rightarrow \quad f(n-1) = \left[(n-1)n\right]^2$$

Pentru care , $f(n) - f(n-1) = 4n^3$ si prin urmare putem scrie:

$$u_n = \frac{1}{4}\left[f(n) - f(n-1)\right]$$

Atunci, cu metoda diferentelor

$$S_N = \frac{1}{4}\left[f(N) - f(0)\right] = \frac{1}{4}N^2(N+1)^2$$

Observam ca:

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \left(\sum_{n=1}^{N} n\right)^2$$

Exemplu: Calculati $\sum_{n=1}^{N}(n+1)(n+3)$

Termenul general al seriei este:

$$u_n = (n+1)(n+3) = n^2 + 4n + 3$$

Si prin urmare:

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)(n+3) = \sum_{n=1}^{N}\left(n^2 + 4n + 3\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} n^2 + 4\sum_{n=1}^{N} n + \sum_{n=1}^{N} 3$$

$$= \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) + 4 \times \frac{1}{2}N(N+1) + 3N$$

$$= \frac{1}{6}N\left(2N^2 + 15N + 31\right)$$

4.2.6 Transformarea seriilor

O serie complicata poate fi uneori sumata prin transformarea ei in serii familiare pentru care stim deja suma, poate o serie geometrica ori o dezvoltare Maclaurin a unei functii simple. Exista mai multe tehnici utile de transformare si alegerea tehnicii potrivite tine de experienta. Vom discuta cateva tehnici comune.

Derivarea si integrarea unei serii este adesea utila in transformarea unei serii aparent de nerezolvat, intr-o serie mai familiara. De exemplu, seriile de puteri pot fi derivate si integrate termen cu termen.

Exemplu: Calculati suma seriei:

$$S(x) = \frac{x^4}{3(0!)} + \frac{x^5}{4(1!)} + \frac{x^6}{5(2!)} + \ldots$$

Impartind relatia cu x obtinem:

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{x^3}{3(0!)} + \frac{x^4}{4(1!)} + \frac{x^5}{5(2!)} + \ldots$$

Apoi derivam termen cu termen:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{S(x)}{x}\right] = \frac{x^2}{0!} + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \ldots$$

Reamintind dezvoltarea Maclaurin pentru e^x , recunoastem ca in RHS avem $x^2 e^x$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{S(x)}{x}\right] = x^2 e^x$$

Acum putem integra in ambele parti:

$$\frac{S(x)}{x} = \int x^2 e^x dx$$

Integrand in RHS prin parti:

$$\frac{S(x)}{x} = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

Valoarea constantei de integrare c poate fi fixata prin cerinta $S(x)/x = 0$ la $x = 0$. Astfel, gasim $c = -2$ si suma cautata este:

$$S(x) = x^3 e^x - 2x^2 e^x + 2xe^x - 2x$$

Adesea, vrem sa calculam suma unei serii ce nu depinde de o variabila. In aceasta situatie , putem deriva sau integra serii si ca rezultat sa definim o functie de o variabila x astfel incat valoarea acestei functii intr-o valoare a lui x este chiar suma seriei (de obicei x=1).

Exemplu: Calculati suma seriei:

$$S = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots$$

Incepem cu definirea functiei:

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Astfel incat suma $S = f(1/2)$. Integram aceasta functie:

$$\int f(x)\,dx = x + x^2 + x^3 + \dots$$

Aici recunoastem o seri geometrica cu primul termen $a = x$ si ratia $q = x$.

Atunci, cu (4), gasim ca suma seriei este $x/(1-x)$.

$$\int f(x)\,dx = \frac{x}{1-x}$$

Si prin urmare $f(x)$ este data de:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Suma seriei ceruta este $S = f(1/2) = 4$

O alta tehnica de transformare a seriilor o constitue substitutia. In particular, seriile cu termeni care contin functii trigonometrice se pot suma cu exponentiale complexe.

Exemplu: Calculati suma seriei:

$$S(\theta)=1+\cos\theta+\frac{\cos 2\theta}{2!}+\frac{\cos 3\theta}{3!}+\dots$$

Inlocuim termenii cu cosinus cu exponentiale complexe.

$$S(\theta)=\mathrm{Re}\left\{1+e^{i\theta}+\frac{e^{i2\theta}}{2!}+\frac{e^{i3\theta}}{3!}+\dots\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{1+e^{i\theta}+\frac{\left(e^{i\theta}\right)^2}{2!}+\frac{\left(e^{i\theta}\right)^3}{3!}+\dots\right\}$$

Folosim dezvoltarea Maclaurin a functiei exponentiale si scriem:

$$S(\theta)=\mathrm{Re}\left\{\exp\left(e^{i\theta}\right)\right\}=\mathrm{Re}\left\{\exp\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{e^{\cos\theta}e^{i\sin\theta}\right\}=\mathrm{Re}\left\{e^{\cos\theta}\left(\cos\left(\sin\theta\right)+i\sin\left(\sin\theta\right)\right)\right\}$$

$$S(\theta)=e^{\cos\theta}\cos\left(\sin\theta\right)$$