1. *Notiuni de algebra*

1.1 Functii si ecuatii simple

Cel mai simplu tip de ecuatie este o ecuatie polinomiala, adica o expresie polinomiala in *x*, notata $f(x)$, care este egala cu zero. Ecuatia este satisfacuta de valori particulare a lui *x*, numite radacini.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

(1.1)

$n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ este gradul polinomului sau al ecuatiei.

Astfel de ecuatii apar frecvent in fizica: *x* fiind o marime fizica ce trebuie determinata si coeficientii a_i fiind determinati de proprietatile fizice ale sistemului studiat.

Problema care se pune este determinarea unora sau a tuturor radacinilor ecuatiei (1.1) i.e. a valorilor lui *x*, notate cu α_k care satisfac $f(\alpha_k) = 0$.

k este un index ce poate lua valoarea maxima *n*, $k = 1, 2, \ldots, n$

Atunci cand radacinile sunt *reale*, acestea corespund punctelor in care graficul functiei $f(x)$ taie axa *x*. Radacinile *complexe* nu au o astfel de interpretare.

Pentru $n = 1$ ecuatia (1.1) devine ecuatia *liniara*:

$$a_1 x + a_0 = 0$$

(1.2)

cu solutia $\alpha_1 = -a_0 / a_1$.

Pentru $n = 2$ ecuatia (1.1) devine ecuatia de gradul doi:

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

(1.3)

cu cele doua radacini:

1.

Notiuni de algebra

1.1 Functii si ecuatii simple

Cel mai simplu tip de ecuatie este o ecuatie polinomiala, adica o expresie polinomiala in *x*, notata $f(x)$, care este egala cu zero. Ecuatia este satisfacuta de valori particulare a lui *x*, numite radacini.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

(1.1)

$n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ este gradul polinomului sau al ecuatiei.

Astfel de ecuatii apar frecvent in fizica: *x* fiind o marime fizica ce trebuie determinata si coeficientii a_i fiind determinati de proprietatile fizice ale sistemului studiat.

Problema care se pune este determinarea unora sau a tuturor radacinilor ecuatiei (1.1) i.e. a valorilor lui *x*, notate cu α_k care satisfac $f(\alpha_k) = 0$.

k este un index ce poate lua valoarea maxima *n*, $k = 1, 2, \ldots, n$

Atunci cand radacinile sunt *reale*, acestea corespund punctelor in care graficul functiei $f(x)$ taie axa *x*. Radacinile *complexe* nu au o astfel de interpretare.

Pentru $n = 1$ ecuatia (1.1) devine ecuatia *liniara*:

$$a_1 x + a_0 = 0$$

(1.2)

cu solutia $\alpha_1 = -a_0 / a_1$.

Pentru $n = 2$ ecuatia (1.1) devine ecuatia de gradul doi:

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

(1.3)

cu cele doua radacini:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

(1.4)

Cu alte notatii, aceeasi ecuatie este:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(1.5)

cu solutiile:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(1.6)

Daca expresia de sub radical este pozitiva, atunci ambele radacini sunt reale; daca acesta este negativa atunci radacinile formeaza o pereche complex conjugata $p \pm iq$, cu p,q reale. Daca expresia este nula, atunci radacinile sunt reale si egale.

Problema: Cum determinam informatii complete sau partiale despre radacinile unor ecuatii polinomiale de grad mai mare?

Uneori este suficient sa stim daca o ecuatie are o radacina intr-un anumit interval, sau nu are radacini deloc. Daca este necesar setul complet de radacini, acestea pot fi determinate cu metode numerice cu o acuratete dorita. Nu exista o reteta de rezolvare a ecuatiei polinomiale (1.1) pentru $n \geq 3$. In majoritatea cazurilor metodele analitice ne dau informatii despre radacini dar nu si valorile exacte ale acestora.

Exemplu: Investigam radacinile ecuatiei:

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 1 = 0$$

(1.7)

Alta exprimare: cautam zerourile lui $f(x)$.

In primul rand, observam ca:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Prin continuitate $f(x)$ trebuie sa taie axa x cel putin odata si $f(x)=0$ are cel putin o radacina reala. Mai mult, se poate arata ca daca $f(x)$ este un polinom de gradul n , atunci graficul lui $f(x)$ trebuie sa taie axa x de un numar par sau impar de ori, cand x variaza de la $-\infty$ la $+\infty$, in accord cu paritatea gradului n al polinomului ce formeaza ecuatia. Atunci, o ecuatie polinomiala de grad impar are cel putin o radacina reala. O ecuatie polinomiala de grad par poate sa nu aiba nicio radacina reala.

Dupa ce am stabilit ca ecuatia (1.7) are cel putin o radacina reala, ne putem intreba cate radacini reale are? Pentru a raspunde, avem nevoie de o teorema fundamentala din algebra:

Ecuatia polinomiala de gradul n are exact n radacini.

Nu inseamna ca ecuatia are n radacini reale distincte. Aceasta are cel mult n radacini reale. Radacinile pot fi si de forma $p+iq$ sau radacini multiple.

Orice polinom cu coeficienti reali, de gradul n poate fi descompus în factori în mod unic. Factorii sunt polinoame liniare $x-b$ şi polinoame pătratice x^2+px+q, în care p, q sunt coeficienţi reali şi fiecare polinom pătratic este ireductibil la polinoame liniare, deoarece nu are rădăcini reale.

$$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\mu_1}\cdots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\mu_s} \tag{1.8}$$

unde exponenţii sunt numere naturale şi are loc:

$$m_1+m_2+\ldots+2\left(\mu_1+\mu_2+\ldots\right)=n$$

(1.9)

Dacă $m_1 = 1$, rădăcina a_1 este *simplă.*
Dacă $m_1 \geq 2$, rădăcina a_1 este *multiplă.*

Acum putem spune despre ecuatia particulara (1.7) ca are o radacina reala sau trei radacini reale, dar in acest ultim caz acestea pot sa nu fie distincte. Pentru a decide cate radacini reale are ecuatia, trebuie sa anticipam doua notiuni: derivata unei functii si teorema lui Rolle.

Derivata $f'(x)$ a unei functii $f(x)$ masoara panta tangentei la graficul functiei $f(x)$ in fiecare valoare *x*. Derivata functiei ax^n este anx^{n-1} . Derivata functiei (1.7)
$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 1$ este $f'(x) = 12x^2 + 6x - 6$.

Teorema Rolle afirma ca daca o functie $f(x)$ continua si derivabila are valori egale in doua valori *x* distincte, atunci exista cel putin o valoare intre cele doua in care derivata $f'(x)$ este nula, i.e. tangenta la grafic este paralela cu axa *x*.

Folosim derivata si teorema Rolle pentru a stabili daca $f(x)$ are una sau trei radacini reale.

Daca $f(x)$ are trei radacini reale α_k, $f(\alpha_k) = 0$, $k = 1,2,3$, atunci cu teorema Rolle, intre oricare pereche de doua radacini consecutive (α_1, α_2) trebuie sa fie o valoare a lui *x* in care $f'(x) = 0$. Similar, trebuie sa fie un alt zero al lui $f'(x)$ si intre α_2 si α_3. O *conditie necesara* pentru trei radacini reale ale ecuatiei $f(x) = 0$ este ca
$f'(x) = 0$ sa aiba doua radacini. Aceasta conditie este necesara, dar nu si suficienta pentru a garanta trei radacini reale ale ecuatiei $f(x) = 0$. Acest lucru poate fi vazut in Figura 1.1.

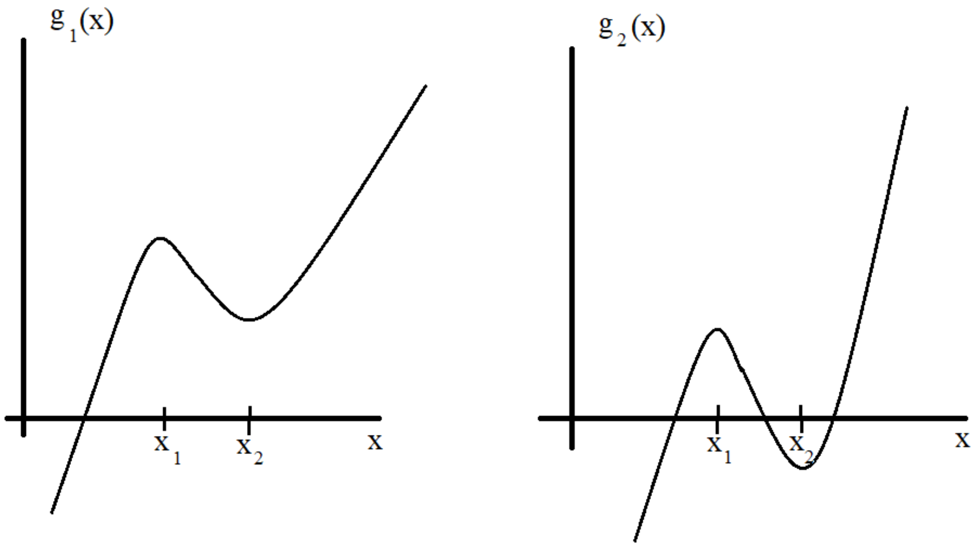

Figura 1.1

Pentru fiecare din cele doua functii $g_1(x)$ si $g_2(x)$, derivata este nula in ambele puncte x_1 si x_2 . In mod evident, functia $g_2(x)$ are trei radacini reale, iar functia $g_1(x)$ are o singura radacina reala. Este usor de observant diferenta cruciala dintre cele doua functii: $g_1(x_1)$ si $g_1(x_2)$ au acelasi semn, in timp ce $g_2(x_1)$ si $g_2(x_2)$ au semen diferite.

Daca $g(x)$ si $g'(x)$ sunt nule in acelasi punct, graficul doar atinge axa *x*. Cand se intampla acest lucru, valoarea lui *x* este radacina dubla si trebuie numarata de doua ori in lista radacinilor.

Acum, suntem in masura sa decidem numarul radacinilor reale ale ecuatiei:

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 1 = 0$$

Ecuatia $f'(x)=0$ cu $f'(x)=12x^2+6x-6$ are solutiile $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}$. Valorile functiei in aceste puncte sunt: $f(x_1)=4$ si $f(x_2)=-\frac{11}{4}$, deci au semene diferite. Acest lucru indica ca ecuatia $f(x)=4x^3+3x^2-6x-1=0$ are trei radacini reale, una in intervalul $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ si cate una in fiecare parte a acestui domeniu.

Aceasta tehnica poate fi aplicata si unei ecuatii polinomiale de grad mai mare. Ecuatia $f'(x)=0$ va avea si ea un grad mai mare si va fi mai dificil de rezolvat.

Sirul lui Rolle!

Pentru a ilustra ce se poate si ce nu se poate face cu aceasta tehnica, consideram un caz mai general.

$$f(x)=x^7+5x^6+x^4-x^3+x^2-2=0$$

1. Este o ecuatie polinomiala de gradul sapte; numarul radacinilor reale este impar 1, 3, 5 sau 7.
2. $f(0)<0$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ rezulta ca trebuie sa fie cel putin o radacina pozitiva. Mai mult, numarul total de radacini reale la dreapta lui zero trebuie sa fie impar. Cum numarul total de radacini trebuie sa fie impar, vom avea numar par de radacini la stanga lui $x=0$ (0, 2, 4 sau 6).
3. $f'(x)=0$ poate fi scrisa:
$$x\left(7x^5+30x^4+4x^2-3x+2\right)=0$$
$x=0$ este o radacina. Derivata lui $f'(x)$, notata $f''(x)$ este $42x^5+150x^4+12x^2-6x+2$. In $x=0$ avem $f'(x)=0$ si $f''(0)>0$ ceea ce indica un minim in acest punct.

Asta este tot ce putem deduce cu metode simple analitice in acest caz.

Exemplu: Pentru ce valori ale lui *k* ecuatia

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + k = 0$$

are trei radacini reale?

Studiem ecuatia $f'(x) = 0$, adica $3x^2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$ ecuatie de gradul doi cu $(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 < 0$ care nu are radacini reale. Nu exista minime si maxime; in consecinta $f(x) = 0$ nu poate avea decat o radacina reala, oricare ar fi valoarea lui *k*.

Factorizarea polinoamelor

Un polinom de gradul *n* cu *r* radacini reale distincte α_k poate fi construit ca produs de factori:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r} \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

cu $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$. Daca presupunem ca toate radacinile sunt simple, atunci $m_k = 1$ si $r = n$.

Uneori, daca o radacina α este determinata printr-o procedura oarecare, chiar si ghicire, ramane sa determinam celelalte radacini. Intr-o astfel de situatie, rescriem (1.10)

$$f(x) = (x - \alpha) f_1(x) \tag{1.11}$$

unde $f_1(x)$ este un polinom de gradul $n-1$.

$$f_1(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + b_{n-3} x^{n-3} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Substituind aceasta forma in (1.11) si identificand coeficientii puterilor x^p pentru $p = n, n-1, \ldots, 1, 0$ obtinem seria de ecuatii

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} - \alpha b_{n-1} = a_{n-1}$$

$$\dots$$

$$b_0 - \alpha b_1 = a_1$$

$$-\alpha b_0 = a_0$$

Exemplu: Determinati prin incercari o radacina simpla a ecuatiei urmatoare, si apoi prin factorizare restul radacinilor.

$$f(x) = 3x^4 - x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0$$

$x = -1$ este o solutie a ecuatiei. Deci putem scrie

$$f(x) = (x+1)\left(b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0\right)$$

Prin identificarea coeficientilor

$$b_3 = 3$$

$$b_2 + b_3 = -1$$

$$b_1 + b_2 = -10$$

$$b_0 + b_1 = -2$$

$$b_0 = 4$$

Aceste ecuatii ne conduc la: $b_3 = 3$, $b_2 = -4$, $b_1 = -6$ si $b_0 = 4$.

$$f(x) = (x+1)\, f_1(x) = (x+1)\left(3x^3 - 4x^2 - 6x + 4\right)$$

Observam ca $f_1(2) = 0$, deci $x-2$ este factor pentru $f_1(x)$, care poate fi scris:

$$f_1(x) = (x-2)\, f_2(x) = (x-2)\left(c_2 x^2 + c_1 x + c_0\right)$$

Prin identificare $c_2 = 3$

$$c_1 - 2c_2 = -4$$

$$c_0 - 2c_1 = -6$$

$$-2c_0 = 4$$

Din aceste ecuatii $c_2 = 3$, $c_1 = 2$, $c_0 = -2$; $f_2(x) = 3x^2 + 2x - 2$ ecuatie de gradul doi cu radacinile $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$

In concluzie, cele patru radacini ale ecuatiei $f(x) = 0$ sunt: -1, 2, $\frac{1}{3}\left(-1 + \sqrt{7}\right)$ si $\frac{1}{3}\left(-1 - \sqrt{7}\right)$

Proprietati ale radacinilor

O ecuatie polinomiala poate fi scrisa in una din formele:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r} = 0$$

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) = 0$$

De unde putem deduce relatii intre coeficientii ecuatiei si radacinile ecuatiei.

De exemplu daca egalam coeficientii lui x^0 din prima si a treia expresie avem:

$$a_n(-\alpha_1)(-\alpha_2)(-\alpha_3) \cdots (-\alpha_n) = a_0$$

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \qquad (1.12)$$

Comparand coeficientii lui x^{n-1} obtinem:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad (1.13)$$

Comparand coeficientii celorlalte puteri ale lui *x* se obtin celelalte relatii Viete .

In cazul ecuatiei de gradul doi $ax^2+bx+c=0$

$$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{b}{a} \qquad \alpha_1\alpha_2=\frac{c}{a}$$

Exemplu: Determinati ecuatia cubica cu radacinile -4, 3si 5

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

$$-4+3+5=-\frac{a_2}{a_3} \qquad (-4)\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot(-4)=\frac{a_1}{a_3} \qquad (-4)\cdot 3\cdot 5=-\frac{a_0}{a_3}$$

Daca $a_3=1$, atunci $a_2=-4$, $a_1=-17$ si $a_0=60$

$$x^3-4x^2-17x+60=0$$

1.2 Identitati trigonometrice

Multe dintre aplicatiile matematicii in fizica au de a face cu comportari periodice si sinusoidale; fapt pentru care deprinderile de a manipula astfel de functii sunt esentiale. Pentru a sublinia natura unghiulara a argumentului functiei sinus, vom folosi notatia θ pentru argumentul functiei.

Identitatea de baza satisfacuta de functiile sinusoidale $\sin\theta$ si $\cos\theta$ este:

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \tag{1.15}$$

Daca $\sin\theta$ si $\cos\theta$ definesc coordonatele unui punct de pe un cerc de raza unu, atunci Pitagora stabileste acest rezultat.

Alte formule pot fi derivate din (1.15) prin impartire cu diverse puteri ale lui $\sin\theta$ si $\cos\theta$:

$$1+tg^2\theta=\sec^2\theta \ , \quad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta} \tag{1.16}$$

$$ctg^2\theta+1=\cos ec^2\theta \ , \ \cos ec\theta=\frac{1}{\sin\theta} \tag{1.17}$$

Identitati trigonometrice pentru unghiuri compuse

Baza pentru constructia unor astfel de expresii sunt functiile sinusoidale ale sumei si diferentei a doua unghiuri. Pentru a demonstra aceste relatii folosim constructia din figura 1.2. Aceasta prezinta doua sisteme de axe *Oxy* si $Ox'y'$ cu aceeasi origine, rotite cu un unghi A. Punctul P se afla pe cercul unitate, centrat in originea comuna *O* si are coordonatele $\cos(A+B)$, $\sin(A+B)$ in raport cu *Oxy* si coordonatele $\cos B$, $\sin B$ in raport cu $Ox'y'$. Prin P se duc paralele la axele celor doua sisteme de coordonate. Apoi, paralele *MR*, *RN* la axele $Ox'y'$ sunt duse prin R, punctul cu coordonatele $(0,\sin(A+B))$ in sistemul *Oxy*.

Coordonatele lui P in sistemul $Ox'y'$ sunt:

i) $\cos B = x' = TN + NP = MR + NP = OR\sin A + RP\cos A$

$$= \sin(A+B)\sin A + \cos(A+B)\cos A$$

ii) $\sin B = y' = OM - TM = OM - NR = OR\cos A - RP\sin A =$

$$= \sin(A+B)\cos A - \cos(A+B)\sin A$$

Daca inmultim relatia i) cu sinA si relatia ii) cu cosA si le adunam obtinem:

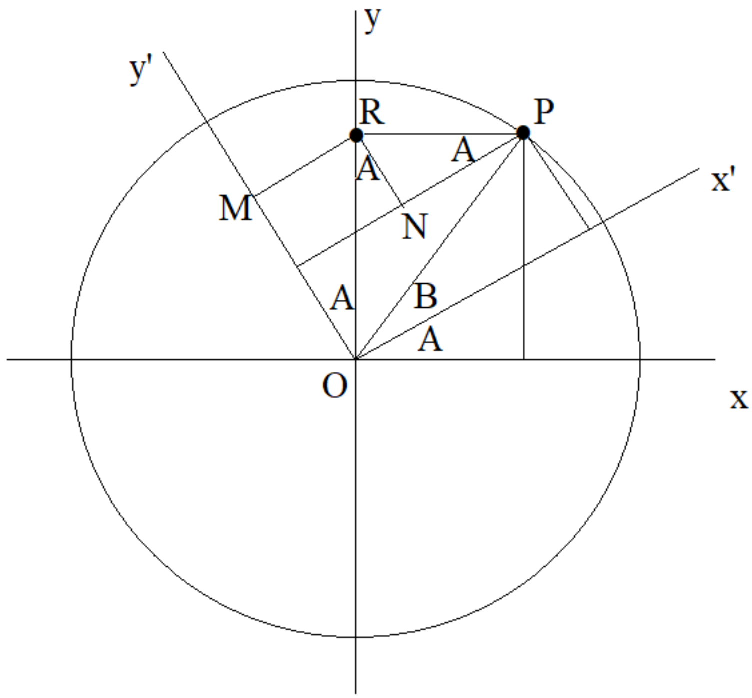

Figura 1.2

$$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)\left(\sin^2 A+\cos^2 B\right)$$

$$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)$$

Analog, daca inmultim ii) cu sinA si o scadem din i) inmultita cu cosA obtinem:

$$\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)\left(\cos^2 A+\sin^2 A\right)$$

$$\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)$$

Inlocuind B cu –B in aceste relatii si avand in vedere paritatea functiilor trigonometrice, obtinem $\sin(A-B)$ si $\cos(A-B)$. Rezultatele pot fi sumate in formulele:

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B \tag{1.18}$$

$$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B \tag{1.19}$$