3.2 Ecuațiile tangentei şi normalei la o curbă

Tangenta Fie o curbă definită prin funcția $y = f(x)$ şi fie $M_0(x_0, f(x_0))$ un punct pe curbă. Presupunem că $f(x)$ are derivată în x_0 şi determinăm ecuația tangentei la curbă în punctul M_0.

Ecuația unei drepte care trece printr-un punct $M_0(x_0, y_0)$ este:

$$y - y_0 = k_T(x - x_0)$$

unde k_T este panta dreptei.

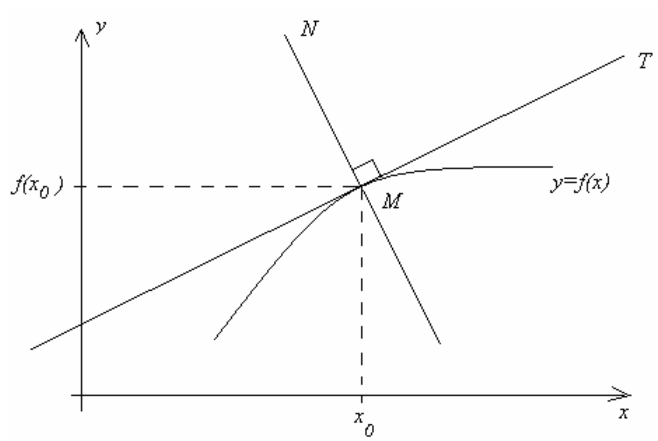

Figura 3.2

Panta k_T a tangentei la curba $y = f(x)$ în punctul M_0 este egală cu derivata $f'(x_0)$, astfel ecuația tangentei ia forma:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{cu} \quad y_0 = f(x_0) \tag{4}$$

Normala la o curbă într-un punct dat este dreapta care trece prin punct şi este perpendiculară pe tangenta la curbă în acest punct. Perpendicularitatea implică o relație între panta k_N a normalei şi panta k_T a tangentei, anume:

$$k_N = -\frac{1}{k_T} \quad \text{sau} \quad k_N = -\frac{1}{f'(x_0)}, \quad f'(x_0) \neq 0$$

Ecuația normalei la curba $y = f(x)$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ este:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0 \tag{5}$$

Observație: Dacă $f'(x_0)=0$, ecuația normalei este $x=x_0$

Exemplu: Scrieți ecuațiile tangentei şi normalei la curba $y=x^2$ în punctele $M(2,4)$ si $O(0,0)$.

$$f(x)=x^2 \qquad f'(x)=2x$$

$f'(2)=4$

Ecuația tangentei:

$$y-4=4(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=4x-4$$

Ecuația normalei:

$$y-4=-\frac{1}{4}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$$

$f'(0)=0$

Ecuația tangentei:

$$y-0=0(x-0) \quad \Rightarrow \quad y=0$$ şi coincide cu axa Ox

Ecuația normalei:

Cum $f'(0)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$ şi coincide cu axa Oy

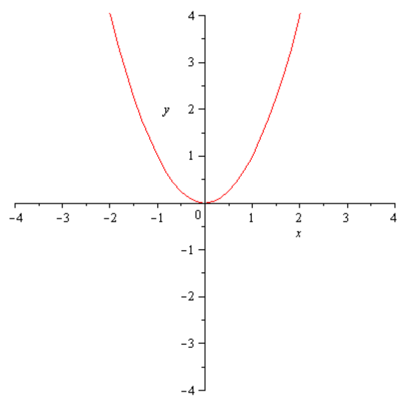

Figura 3.3 $f(x)=x^2$

Exerciții:

- ☐ Să se scrie ecuația tangentei la curba a cărei ecuație este $f(x)=\ln x+x^2-1$, în punctul (e,e^2).

$$y-e^2=f'(e)(x-e)$$

Cum $f'(x)=\frac{1}{x}+2x \quad \Rightarrow \quad y-e^2=\left(\frac{1}{e}+2e\right)(x-e)$

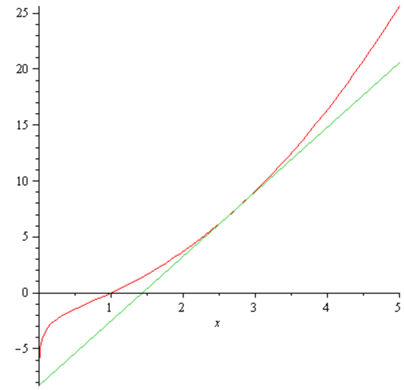

Figura 3.4 $f(x)=\ln x+x^2-1$ şi tangenta la grafic în punctul $\left(e,e^2\right)$.

□ Să se scrie ecuația normalelor la parabola care are ecuația $y=x^2-4x+5$, în punctele de intersecție ale acesteia cu dreapta de ecuație $y=x+1$.

Punctele de intersecție ale parabolei cu dreapta se determină rezolvând sistemul format cu cele două ecuații de definiție.

$$\begin{cases} y=x^2-4x+5 \\ y=x+1 \end{cases} \qquad x_1=1 \qquad x_2=4$$

Funcția parabolă are derivata: $f'(x)=2x-4$

Ecuația normalei este: $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$, atunci în cele două puncte de intersecție vom avea:

$$y-f(1)=-\frac{1}{f'(1)}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y-2=-\frac{1}{-2}(x-1) \qquad y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$y-f(4)=-\frac{1}{f'(4)}(x-4) \quad \Rightarrow \quad y-5=-\frac{1}{4}(x-4) \qquad y=-\frac{1}{4}x+6$$

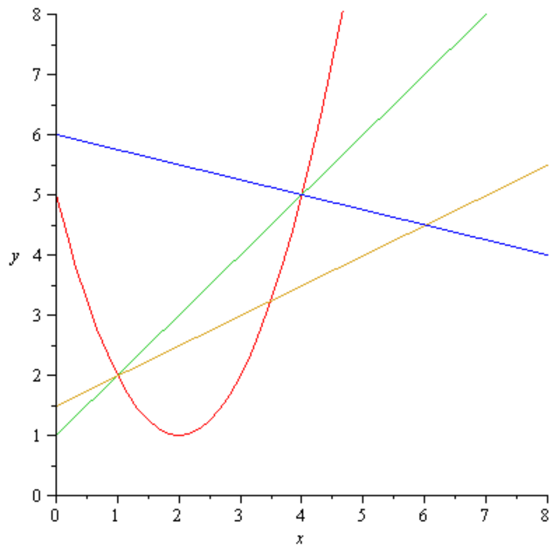

Figura 3.5 $y = x^2 - 4x + 5$ şi $y = x + 1$ şi normalele la parabolă.

3.3 O aplicație a derivatei în mecanică

Fie $s = s(t)$ legea mişcării rectilinii a unui punct material. Aceasta precizează distanța parcursă de punctul material funcție de timpul *t*. Fie cresterea Δt a timpului si cresterea corespunzatoare a functiei distanta:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

Adica, distanța parcursă de punctul material în intervalul de timp Δt (crestera functiei distanta corespunzatoare cresterii argumentului timp).
Raportul $\Delta s / \Delta t$ defineşte *viteza medie* în intervalul Δt. *Viteza instantanee* a punctului material se defineşte ca limită a vitezei medii în intervalul Δt pentru $\Delta t \to 0$, adică

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t) \tag{6}$$

In concluzie, viteza $v(t)$ este egală cu derivata spațiului *s* în raport cu timpul *t*, adică $v(t) = s'(t)$.

Exemple:
1. Considerăm legea mişcării rectilinii $s = t^2$, unde *s* este distanța în metri şi *t* este timpul în secunde. Calculați viteza la $t = 3s$.

$$v = s'(t) = 2t, \quad v(t) = 2t, \quad v(3) = 2 \cdot 3 = 6\ m/s$$

2. De Halloween, un student lasă să cadă un dovleac de pe acoperişul Universităţii, de la aproximativ 20 m înălţime. Legea de mişcare pentru obiecte în apropierea suprafeţei pământului este:

$$y = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{g}{2}(t - t_0)^2$$

Pentru dovleacul nostru considerăm o axă verticală cu zero la nivelul solului şi orientarea pozitivă în sus. În aceste condiţii ecuaţia de mişcare a dovleacului este:

$$y = 20 - 5t^2$$

Dovleacul loveşte solul atunci când: $20 - 5t^2 = 0$ Rezolvând ecuatia obţinem $t = 2$. Deci dovleacului îi trebuiesc 2 s să atingă solul. Viteza medie a acestuia va fi $\frac{20m}{2s} = 10\ m/s$. Un spectator va fi probabil mai interesat de viteza instantanee cu care dovleacul loveşte solul. Pentru a determina această viteză, mai întâi derivăm legea de mişcare:

$$y' = -10t \qquad y'(2) = -10 \cdot 2 = -20\ m/s$$

3.4 Derivate laterale

Derivata la dreapta a funcţiei $y = f(x)$ în punctul *x* este:

$$f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x > 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{sau} \quad f_d'(x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{7}$$

iar derivata la stânga a funcţiei $y = f(x)$ în punctul *x* este:

$$f'(x-0) = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x < 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{sau} \quad f_s'(x_0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{8}$$

Proprietate: Pentru ca $f'(x)$ să existe este necesar şi suficient ca funcţia $y = f(x)$ să aibă derivate laterale în punctul *x* şi acestea să coincidă, adică

$$f'(x+0) = f'(x-0) = f'(x) \tag{9}$$

Exemplu: $f(x) = |x|$

Considerăm $x = 0$ $\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}$

Derivatele laterale în $x=0$:

$$f'(0+0)=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta x>0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$$

$$f'(0-0)=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta x<0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$$

Derivatele laterale sunt diferite. In consecință, $f(x)=|x|$ nu are derivată în $x=0$. Geometric, nu există tangentă la curba $y=|x|$ în punctul $O(0,0)$.

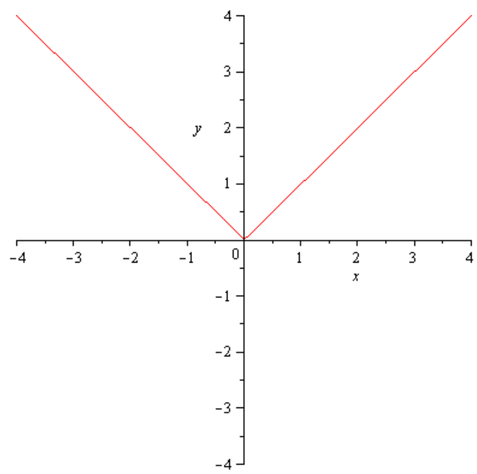

Figura 3.6 $f(x)=|x|$

Exerciții:

Să se studieze derivabilitatea următoarelor funcții in punctele indicate:

1. $$f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x), & x\in\left(-\frac{1}{2},0\right] \\ 2x, & x\in(0,+\infty)\end{cases} \qquad x_0=0$$

$$f_d'(0)=\lim_{x\to 0,x>0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0,x>0}\frac{2x-0}{x-0}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0,x>0}2=2$$

$$f_s'(0)=\lim_{x\to 0,x<0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0,x<0}\frac{\ln(1+2x)-0}{x-0}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0,x<0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0,x<0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0,x<0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\ln e^2=2$$

Cum $f_s'(0)=f_d'(0) \Rightarrow \exists f'(0)=2$.

2. $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+2}, & x\in[0,2]\\ \frac{9}{8}x+\frac{7}{4}, & x\in(2,+\infty)\end{cases} \qquad x_0=2$$

$$f_d'(2)=\lim_{x\to 2,x>2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2,x>2}\frac{\frac{9}{8}x+\frac{7}{4}-4}{x-2}=\lim_{x\to 2,x>2}\frac{\frac{9}{8}x-\frac{18}{8}}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2,x>2}\frac{\frac{9}{8}(x-2)}{x-2}=\frac{9}{8}$$

$$f_s'(2)=\lim_{x\to 2,x<2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2,x<2}\frac{\sqrt{x^2+5x+2}-4}{x-2}=\lim_{x\to 2,x<2}\frac{x^2+5x+2-16}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5x+2}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2,x<2}\frac{x^2+5x-14}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5x+2}+4\right)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2,x<2}\frac{(x-2)(x+7)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5x+2}+4\right)}=\lim_{x\to 2,x<2}\frac{x+7}{\sqrt{x^2+5x+2}+4}=\frac{9}{8}$$

Cum $f_s'(2)=f_d'(2) \Rightarrow \exists f'(2)=\frac{9}{8}$.