2.2 Funcții compuse

Fie E o mulțime de numere reale şi fie $u = \varphi(x)$ o funcție definită pe E. Notăm cu E_1 mulțimea de valori a funcției u pentru $x \in E$. Mai mult, fie $y = f(u)$ o funcție definită pe E_1. Atunci, la fiecare $x \in E$ îi corespunde un $u \in E_1$, care la rândul său este asociat cu o valoare $y = f(u)$. Astfel, valoarea y este o funcție de x şi este definită pe E. Spunem că y este o *funcție compusă* de x şi scriem

$$y = f[\varphi(x)] \tag{10}$$

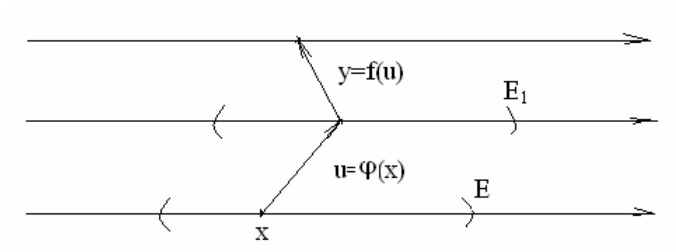

Figura 2.2

Exemple:

$u = \sin x$ şi $y = e^u$ atunci $y = e^{\sin x}$ este o funcție compusă de x.

$u = 10x$ şi $y = \sin u$ atunci $y = \sin(10x)$ este o funcție compusă de x.

Teorema 1: Dacă $u = \varphi(x)$ are $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$ şi dacă $y = f(u)$ este o funcție continuă în punctul $u = A$, atunci funcția compusă $y = f[\varphi(x)]$ are limita $f(A)$ în punctul x_0, adică

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(A)$$

sau echivalent:

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right] \tag{11}$$

Observație: Această ultimă relație indică regula de calcul a limitei unei funcții compuse.

Exemplu:

$$\lim_{x \to o} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Intr-adevăr, $y = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ este o funcție compusă din $y = \ln u$ şi $u = (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Deoarece $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ şi $y = \ln u$ este continuă în $u = e$, teorema 1 implică

$$\lim_{x \to o} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1$$

Teorema 2: Fie $u = \varphi(x)$ o funcție continuă în x_0 şi fie $y = f(u)$ o funcție continuă în $u_0 = \varphi(x_0)$. Atunci, funcția compusă $y = f[\varphi(x)]$ este continuă în x_0.

2.3 Puncte de discontinuitate

Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate a punctului x_0. Dacă $f(x)$ este continuă în x_0, atunci:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

sau în termeni de limite laterale

$$\lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definiție: O funcție $f(x)$ are o *discontinuitate* în punctul x_0 dacă $f(x)$ nu este continuă în x_0 şi x_0 se numeşte *punct de discontinuitate*.

Observație: Funcția poate să nu fie definită în punctul de discontinuitate.

Clasificarea punctelor de discontinuitate

Definiție: Punctul x_0 este *punct de discontinuitate care poate fi înlăturată* pentru funcția $f(x)$ dacă funcția are limite laterale egale în x_0 dar diferite de $f(x_0)$, adică

$$\lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

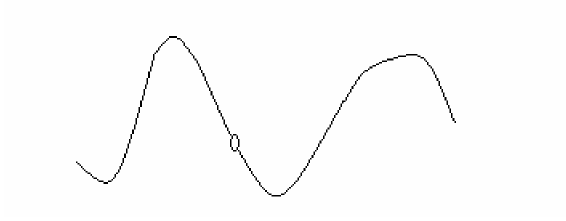

Figura 2.3

Observație: Este suficient să modificăm funcția doar în punctul x_0 astfel încât funcția să devină continuă în punctul x_0 .
Dacă $f(x)$ are în punctul x_0 o discontinuitate care poate fi înlăturată, atunci funcția:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & x=x_0 \end{cases}$$

numită *prelungita prin continuitate* a funcției $f(x)$ în x_0, este continuă în punctul x_0. Discontinuitatea din x_0 a fost înlăturată modificând valoarea lui $f(x)$ în punctul x_0.

Exemplu:
$$f(x)=\begin{cases} |x|, x\neq 0 \\ 1, x=0 \end{cases}$$

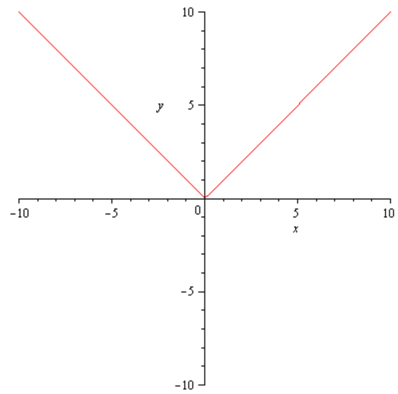

Figura 2.4

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x)=\lim_{x\to 0, x>0} f(x)=0\neq 1=f(0)$$

$\Rightarrow$ $x=0$ este discontinuitate care poate fi înlăturată. Dacă modificăm funcția în $x=0$, considerând $f(0)=0$, atunci $F(x)=|x|$ este continuă în $x=0$.

Definiție: Dacă limitele laterale ale lui $f(x)$ în x_0 sunt finite și diferite, adică

$$\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x)\neq \lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x)$$

Atunci punctul x_0 este o discontinuitate în care funcția are *un salt*. Saltul funcției în punctul x_0 este: $f(x_0+0)-f(x_0-0)$.

Exemplu: $f(x)=\dfrac{2}{1+e^{1/x}}$, $x\neq 0$ și $f(0)=1$
Această funcție are salt în $x=0$ deoarece:

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x)=2 \text{ și } \lim_{x\to 0, x>0} f(x)=0$$

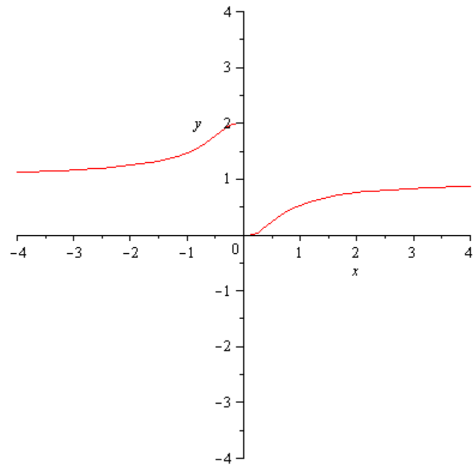

Figura 2.5

Punctele de discontinuitate care pot fi înlăturate şi punctele în care funcţia are salt se numesc *puncte de discontinuitate de speţa I*. Toate celelalte sunt *puncte de discontinuitate de speţa II*. In punctele de discontinuitate de speţa I limitele laterale există şi sunt finite. In punctele de discontinuitate de speţa II, limita la stânga şi (sau) limita la dreapta fie nu există fie sunt infinite.

Exemple: 1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ punctul $x=0$ este o discontinuitate de speţa II, limitele laterale în $x=0$ sunt infinite.

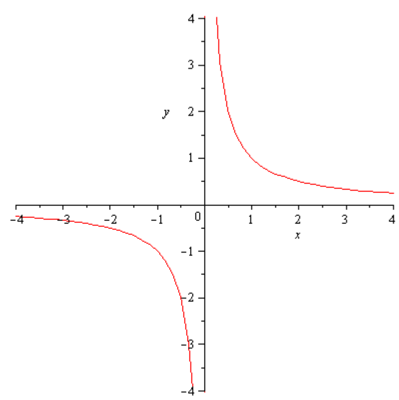

Figura 2.6 $f(x)=1/x$

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = -\infty \qquad \text{şi} \qquad \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = +\infty$$

2. $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ punctul $x=0$ este o discontinuitate de speţa II, limitele laterale nu există în $x=0$.

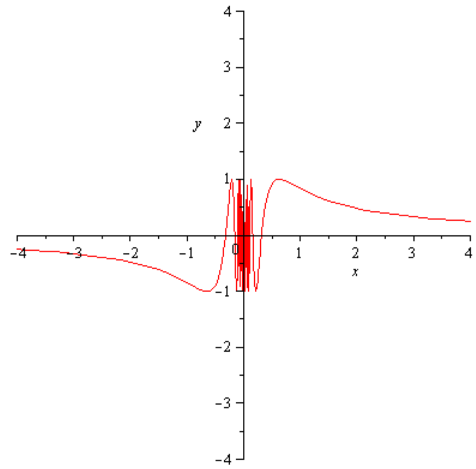

Figura 2.7 $f(x)=\sin(1/x)$

3. Pentru funcția Dirichlet, toate punctele reale sunt discontinuități de speța II.

Continuitate laterală

Definiție: Spunem că funcția $f(x)$ este *continuă la stânga* în x_0, dacă

$$\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x)=f(x_0)$$

şi este *continuă la dreapta* în x_0, dacă $\lim\limits_{x\to x_0, x>x_0} f(x)=f(x_0)$

Proprietate: $f(x)$ este continuă în x_0 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ este continuă la stânga şi la dreapta în x_0.

Exerciții:

- Să se studieze continuitatea funcțiilor:

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x+2}}}, & x\neq -2 \\ 0, & x=-2 \end{cases}$

Cum în orice punct $x\neq -2$ funcția este continuă, ne rămâne să verificăm continuitatea funcției în $x=-2$.

$$\lim_{x\to -2, x<-2}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x+2}}}=1 \qquad \lim_{x\to -2, x>-2}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x+2}}}=0$$

Limitele laterale fiind diferite, rezultă că funcția nu are limită în $x=-2$ şi deci nu poate fi continuă. Însă $f(-2+0)=f(-2)$, deci funcția este continuă la dreapta în $x=-2$. Punctul $x=-2$ este o discontinuitate de speța I, discontinuitate cu salt.

2. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

Cum în orice punct $x\neq 0$ funcția este continuă, ne rămâne să verificăm continuitatea funcției în $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \neq 1 = f(0) \Rightarrow \text{ funcția nu este continuă în } x=0.$$

Punctul $x=0$ este o discontinuitate de spețа I, discontinuitate ce poate fi înlăturată.

3. $f(x)=\begin{cases} arctg\dfrac{\pi}{2-x}, & x\neq 2 \\ \alpha, & x=2 \end{cases}$

Cum în orice punct $x\neq 2$ funcția este continuă, ne rămâne să verificăm continuitatea funcției în $x=2$.

$$\lim_{x\to 2, x<2} arctg\frac{\pi}{2-x} = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to 2, x>2} arctg\frac{\pi}{2-x} = -\frac{\pi}{2}$$

Limitele laterale fiind diferite, rezultă că funcția nu are limită în $x=2$ şi deci nu poate fi continuă. Punctul $x=2$ este o discontinuitate de spețа I, discontinuitate cu salt.

4. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

Este necesar să studiem continuitatea funcției numai în origine.

$$\lim_{x\to 0, x<0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0, x<0} \frac{\sin x}{-x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Limitele laterale fiind diferite, rezultă că funcția nu are limită în $x=0$ şi deci nu poate fi continuă. Este o discontinuitate de spețа I, discontinuitate cu salt.

□ Fie $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in[0,1] \\ 3ax+3, & x\in(1,2] \end{cases}$

Să se determine constanta *a*, astfel încât funcția să fie continuă pe segmentul $[0,2]$. Să se reprezinte grafic funcția obținută.

Pe intervalele $[0,1)$ şi $(1,2]$ funcția este continuă. Impunem condiția de continuitate în $x=1$.

$$\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = \lim_{x\to 1, x>1} f(x) = f(1)$$

Calculăm cele două limite laterale:

$$\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = \lim_{x\to 1, x<1} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1, x>1} f(x) = \lim_{x\to 1, x>1} (3ax+3) = 3a+3$$

Cum $f(1) = 2$, pentru continuitate avem $3a+3=2 \quad a = -\frac{1}{3}$

2.4 Continuitate pe un interval închis

O funcție $f(x)$ este continuă pe un interval deschis (a,b) dacă $f(x)$ este continuă în fiecare punct al intervalului. Notăm mulțimea tuturor funcțiilor continue pe un interval deschis (a,b) cu $C(a,b)$.

O funcție $f(x)$ este continuă pe un interval închis $[a,b]$ dacă $f(x)$ este continuă pe un interval deschis (a,b) şi dacă funcția este continuă la stânga în *b* şi la dreapta în *a*. Notăm mulțimea tuturor funcțiilor continue pe un interval închis $[a,b]$ cu $C[a,b]$.

Teorema 1: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$ şi fie $f(a)$ şi $f(b)$ două numere cu semne diferite. Atunci există cel puțin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = 0$.

Interpretare geometrică: Dacă $f(a)f(b) < 0$, atunci punctele $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$ sunt în semiplane diferite relativ la axa *x* şi graficul funcției continue $f(x)$ intersectează axa *x* în cel puțin un punct.

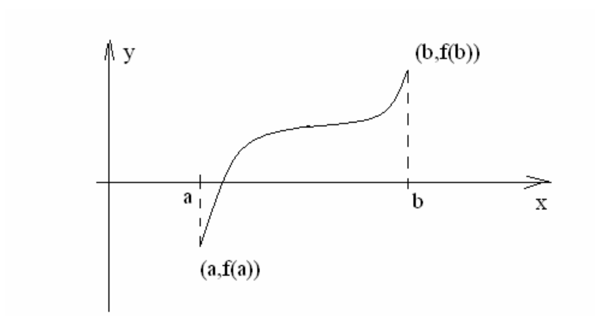

Figura 2.8

Aplicație: Considerăm o ecuație polinomială de grad impar cu coeficienți reali.

$$P_{2n+1}(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n+1} = 0$$

Presupunem $a_0 > 0$.

$$\lim_{x\to +\infty} P_{2n+1}(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} P_{2n+1}(x) = -\infty$$

Deoarece funcția polinomială este continuă pe $\mathbb{R}$, polinomul $P_{2n+1}(x)$ se anulează în cel puțin un punct. In concluzie, polinomul de grad impar cu coeficienți reali are cel puțin o rădăcină reală.

Observație: Teorema 1 poate fi folosită pentru a determina dacă un polinom sau o funcție are rădăcini reale, iar în caz afirmativ să determinăm valorile aproximative ale acestora.

Exemplu:

$$P_3(x) = x^3 + x - 1$$

Polinomul are grad impar, deci are cel puțin o rădăcină reală.

$$P_3(0) = -1 < 0 \qquad P_3(1) = +1 > 0$$

La capetele intervalului $[0,1]$ polinomul $P_3(x)$ ia valori cu semne opuse $\overset{Teorema1}{\Rightarrow}$ polinomul are o rădăcină reală în $(0,1)$.

Mijlocul intervalului este $\xi_1 = \dfrac{1}{2}$ și $P_3\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{8} < 0 \qquad P_3(1) = 1 > 0$

$\Rightarrow$ rădăcina căutată este în intervalul $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

Mijlocul acestui nou interval este $\xi_2 = \dfrac{3}{4}$ și $P_3\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{11}{64} > 0 \quad P_3\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{8} < 0$

$\Rightarrow$ rădăcina căutată este în intervalul $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$

Procesul poate continua şi obținem un şir de intervale deschise cu lungimi din ce în ce mai mici. Cu fiecare pas eroarea absolută în stabilirea rădăcinii scade.

Exerciții: Să se arate că ecuațiile de mai jos au cel puțin o soluție pe intervalul indicat.

a) $x^4 + 3x + 1 = 0$ pe $[-1,0]$

Considerăm $f(x) = x^4 + 3x + 1$ continuă pe $[-1,0]$. Cum $f(-1) = -1$ şi $f(0) = 1$. Atunci, cu teorema 1 $f(x)$ se anulează cel puțin o dată pe $[-1,0]$.

b) $e^x + x = 0$ pe $[-1,1]$

Considerăm $f(x) = e^x + x$ continuă pe $[-1,1]$. Cum $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$ şi $f(1) = e + 1 > 0$. Atunci, cu teorema 1 $f(x)$ se anulează cel puțin o dată pe $[-1,1]$.

c) $\sin x + \cos x - 1 = 0$ pe $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Considerăm $f(x) = \sin x + \cos x - 1$ continuă pe $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Cum $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ şi $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1$. Atunci, cu teorema 1 $f(x)$ se anulează cel puțin o dată pe $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

d) $\ln\left(1 + x^2\right) + x - 1 = 0$ pe $[0,1]$

Considerăm $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right) + x - 1$ continuă pe $[0,1]$. Cum $f(0) = -1$ şi $f(1) = \ln 2 > 0$. Atunci, cu teorema 1 $f(x)$ se anulează cel puțin o dată pe $[0,1]$.

Teorema 2 (a valorilor intermediare)**:**

Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$ şi fie $f(a) = A$ şi $f(b) = B$. Dacă C este orice număr dintre A şi B, atunci există cel puțin un punct $\alpha \in (a,b)$ astfel încât $f(\alpha) = C$. Cu alte cuvinte, dacă $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$ atunci ia toate valorile intermediare dintre $f(a)$ şi $f(b)$, adică funcția are proprietatea lui Darboux.

Demonstrație:
Considerăm funcția $\varphi(x) = f(x) - C$ şi fixăm $A < B$ şi $A < C < B$. Funcția $\varphi(x)$ este continuă pe $[a,b]$ şi

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$$

$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$$

$\overset{Teorema 1}{\Rightarrow}$ $\exists \alpha \in (a,b)$ atfel încât $\varphi(\alpha) = f(\alpha) - C = 0 \;\Rightarrow\; f(\alpha) = C$

Interpretare geometrică: Este evidențiată în figura de mai jos.

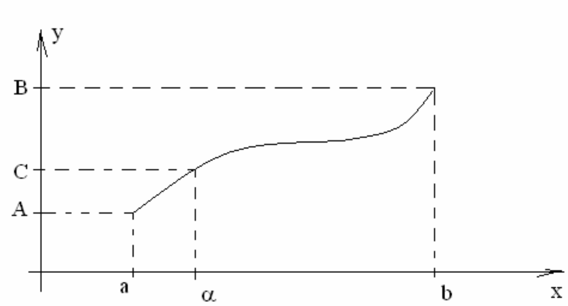

Figura 2.9

Teorema 3 Dacă $f(x)$ este o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ este mărginită pe intervalul închis $[a,b]$, adică există un număr $K>0$ astfel încât

$$|f(x)| \leq K, \quad \forall x \in [a,b]$$

Observație: Ipoteza de continuitate pe interval *închis* este foarte importantă în enunțul acestei teoreme. De exemplu, funcția $f(x)=\frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$ este continuă pe $(0,1]$ dar nu este mărginită pe $(0,1]$.

Teorema 4 Dacă $f(x)$ este o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ își atinge infimum și supremum pe $[a,b]$, adică $\exists \xi, \eta \in [a,b]$ astfel încât:

$$f(\xi) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$f(\eta) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

În această situație $f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta)$, $\forall x \in [a,b]$.

Exemplu:

1. $f(x)=x$, $x \in (-1,1)$

$f(x)=x$ continuă pe $(-1,1)$

Nu-și atinge supremum $\sup\limits_{x\in(-1,1)} x = 1$, adică nu există $x_0 \in (-1,1)$ astfel încât $f(x_0)=1$. Analog, nu-și atinge infimum $\inf\limits_{x\in(-1,1)} x = -1$.

2.5 Continuitate uniformă (opțional)

Funcțiile continue pe un interval închis au proprietatea de continuitate uniformă.

Fie $f(x)$ o funcție continuă pe intervalul (a,b). Atunci, pentru orice $x_0 \in (a,b)$ și pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta > 0$ astfel încât $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pentru $\forall x \in (a,b)$ cu $|x - x_0| < \delta$.

Valoarea lui δ poate depinde atât de ε cât și de x_0, adică $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. Se poate ca pentru un $\varepsilon > 0$ dat, δ să fie diferit pentru diferiți $x_k \in (a,b)$ și să nu existe un δ care să fie valabil pentru toți $x_k \in (a,b)$. Cerința de existență a unui $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ pentru toți $x_k \in (a,b)$ este mai puternică decât cerința de continuitate punctuală pentru $f(x)$ pe (a,b).

Definiție: O funcție $f(x)$ este *uniform continuă* pe (a,b) dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{14}$$

pentru $\forall x', x'' \in (a,b)$ cu $|x' - x''| < \delta$.

Cu simboluri logice definiția precedentă se rescrie:

$f(x)$ uniform continuă pe $(a,b) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall x', x'' \in (a,b)$, $|x' - x''| < \delta$ $\Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Exemplu: $f(x) = x$ este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.
Intr-adevăr, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$, $\forall x', x'' \in (a,b)$, $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Observație: Dacă o funcție $f(x)$ este uniform continuă pe (a,b), atunci aceasta este continuă şi punctual pe (a,b). Reciproca nu este adevărată.

Exemple:

1. $f(x) = x^2$ este continuă pe $\mathbb{R}$ dar nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.
Pentru a arăta că *f* nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}$, va trebui să arătăm că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall \delta(\varepsilon) > 0$, există $x', x'' \in \mathbb{R}$ cu proprietățile:

$$|x' - x''| < \delta \quad \text{şi} \quad |f(x') - f(x'')| > \varepsilon$$

Fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$ şi $\delta > 0$ oarecare. Considerăm:

$$x' = \sqrt{n+1} \quad \text{şi} \quad x'' = \sqrt{n}$$

$$|x' - x''| = \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \left|\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Această distanță, prin alegerea lui *n*, poate fi făcută mai mică ca orice $\delta > 0$.

$$\left|f(x')-f(x'')\right| = \left|x'^2 - x''^2\right| = |n+1-n| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \forall n$$

În concluzie, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$ şi

$$\forall \delta > 0,\ \exists x' = \sqrt{n+1},\ x'' = \sqrt{n} \text{ cu } \left|x'-x''\right| < \delta \text{ si } \left|f(x')-f(x'')\right| > \varepsilon$$

şi $f(x) = x^2$ nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}$,

2. $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$

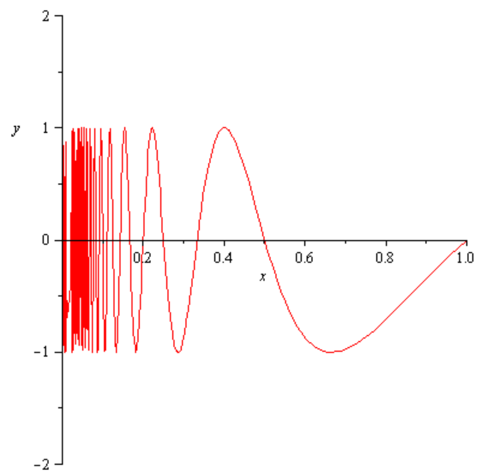

Figura 2.10 $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$

Această funcție este continuă pe $(0,1)$, dar nu este uniform continuă pe $(0,1)$.

Într-adevăr, fie $x_n' = \frac{1}{n}$ şi $x_n'' = \frac{2}{2n+1}$.

$$\left|x_n' - x_n''\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right| = \frac{1}{n(2n+1)}$$

Prin alegerea lui *n*, această diferență poate fi făcută mai mică decât orice $\delta > 0$. Dar

$$\left|f(x_n')-f(x_n'')\right| = \left|\sin n\pi - \sin\frac{\pi}{2}(2n+1)\right| = 1 > \varepsilon, \text{ pentru } \forall \varepsilon < 1$$

În concluzie, pentruu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ şi $\forall \delta > 0$ există punctele $x_n', x_n'' \in (0,1)$ astfel încât $|x' - x''| < \delta$ şi $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon$. Cu definiția $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ nu este uniform continuă pe $(0,1)$.

Trecerea de la continuitatea punctuală, la continuitatea uniformă se face cu teorema următoare.

Teoremă: Dacă o funcție $f(x)$ este continuă pe un interval închis $[a,b]$, atunci funcția este uniform continuă pe $[a,b]$.

Exemplu: $f(x) = x^2$ este uniform continuă pe $[a,b]$.

$f(x)$ uniform continuă pe $[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) = ?$, $\forall x', x'' \in [a,b]$, $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = |(x' - x'')\cdot(x' + x'')| = |x' - x''|\cdot|x' + x''|$$

Deoarece,

$$0 \le |x'| \le \max\{|a|,|b|\} \overset{not}{=} M$$

$$0 \le |x''| \le \max\{|a|,|b|\} \overset{not}{=} M$$

$$|x' + x''| \le |x'| + |x''| \le 2M$$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| = |x' - x''|\cdot|x' + x''| \le |x' - x''|\cdot 2M < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x' - x''| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Intr-adevăr, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2M}$, a.î. $\forall x', x'' \in [a,b]$, $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Exercițiu: Să se studieze continuitatea uniformă a funcției $f(x) = \sin x^2$ pe $\mathbb{R}$.

Capitolul 3 Calcul diferențial. Funcții de o singură variabilă

3.1 Noțiunea de derivată

Fie $y = f(x)$ o funcție definită pe (a,b) şi fie $x \in (a,b)$. Considerăm creşterea Δx a argumentului astfel încât $x + \Delta x \in (a,b)$. Creşterea Δx a argumentului va produce o creştere Δy a funcției $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0$$

Pentru *x* fixat, raportul precedent este o funcție de Δx adică $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(\Delta x)$.

Definiție: Dacă limita raportului $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pentru $\Delta x \to 0$ există, aceasta se numeşte *derivata funcției* $y = f(x)$ în punctul *x* şi se notează $f'(x)$ sau $y'(x)$ sau y'_x. Astfel, prin definiție avem:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

Observație: Derivabilitatea implică continuitate. Într-adevăr,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x = f'(x) \cdot 0 = 0$$

Exemple:

1. $y = x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \Delta x$ $\quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

Atunci, $y = x^2$ are derivată $y'(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. $y = e^x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \Delta x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Facem schimbarea de variabilă $y = e^{\Delta x} - 1$

Atunci $1 + y = e^{\Delta x} \Rightarrow \ln(1+y) = \Delta x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \lim_{y \to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = e^x \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{1}{y}\ln(1+y)} = e^x \lim_{y \to 0} \frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = e^x \frac{1}{\ln e} = e^x$$

Atunci, $y = e^x$ are derivată $y'(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Altă definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită în x_0 şi pe o vecinătate Ω a punctului x_0. Considerăm în definiția (1) $x = x_0$ şi $\Delta x = x - x_0$. Atunci:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

Observație: Spunem că o funcție $f(x)$ are derivată pe (a,b) dacă derivata $f'(x)$ există în fiecare punct $x \in (a,b)$.

Interpretarea geometrică a derivatei

Considerăm graficul funcției $y = f(x)$, definită pe (a,b) şi alegem două puncte $M(x, f(x))$ şi $P(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ pe acest grafic. Considerăm apoi, dreapta care trece prin punctele *M* şi *P*.

Presupunem că punctul *P* se deplasează pe curba $y = f(x)$, spre *M*, adică $\Delta x \to 0$. Atunci dreapta *MP* se deplasează până ce devine tangentă la curba $y = f(x)$ în *M*, adică dreapta *MT*. Panta *k* a dreptei *MP* este:

$$k = tg\ \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Panta $tg\ \alpha$, a tangentei *MT* la curba $y = f(x)$ în *M*, este limita pantei dreptei *MP* pentru $P \to M$ sau $\Delta x \to 0$, adică

$$tg\ \alpha = \lim_{P \to M} tg\ \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \tag{3}$$

Derivata $f'(x)$ este panta tangentei la curba $y = f(x)$ în punctul de abscisă *x*.

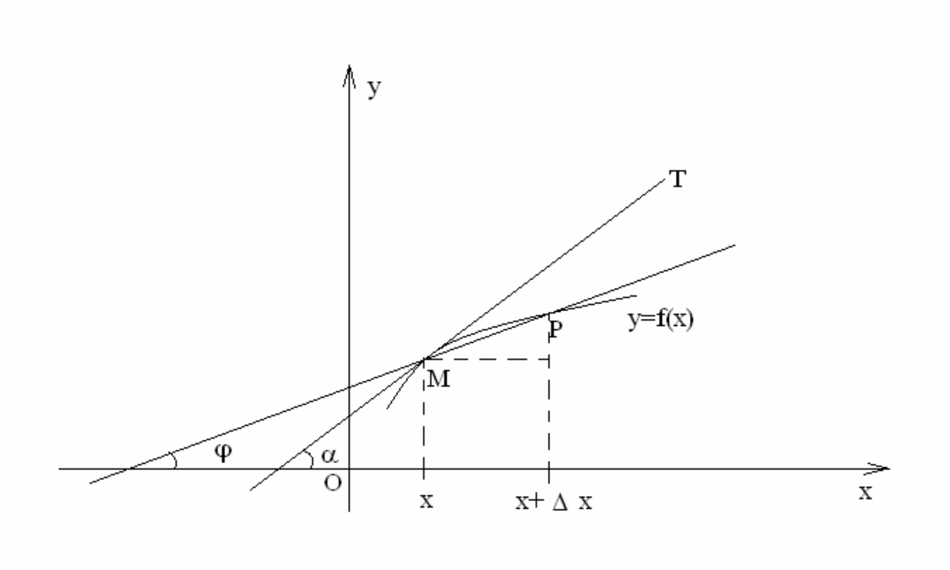

Figura 3.1

Exerciții:

Pornind de la definiție, să se calculeze derivatele următoarelor funcții, în punctele specificate:

□ $f(x)=\sqrt{5x+1} \qquad x_0=3$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{5x+1}-4\right)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}{(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{5x+1-16}{(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{5x-15}{(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{5(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{5}{\sqrt{5x+1}+4}=\frac{5}{8}$$

□ $f(x)=\ln\left(x^2+5x\right) \qquad x_0=1$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(x^2+5x\right)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(x^2+5x\right)-\ln 6}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1} \ln\left(\frac{x^2+5x}{6}\right)^{\frac{1}{x-1}} \overset{1^\infty}{=} \ln \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x^2+5x}{6}-1\right)^{\frac{1}{x-1}} =$$

$$= \ln \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x^2+5x-6}{6}\right)^{\frac{6}{x^2+5x-6}\cdot\frac{x^2+5x-6}{6}\cdot\frac{1}{x-1}} = \ln e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{6(x-1)}}$$

$$= \ln e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+6)}{6(x-1)}} = \ln e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+6}{6}} = \ln e^{\frac{7}{6}} = \frac{7}{6}$$

□ $f(x) = tg\ x \qquad x_0 = \frac{\pi}{4}$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx-1}{x-\frac{\pi}{4}} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

Facem schimbarea de variabilă $y = x - \frac{\pi}{4}$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{tg\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{tgy+tg\frac{\pi}{4}}{1-tgy\cdot tg\frac{\pi}{4}}-1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{tgy+1}{1-tgy}-1}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{tgy+1-1+tgy}{y(1-tgy)} = \lim_{y\to 0}\frac{2tgy}{y(1-tgy)} = 2$$

Bibliografie :

1.M.Krasnov, A.Kiselev, G.Makarenko, E.Shikin, *Mathematical Analysis for Engineers* (MIR, Moscow 1989).

2. Aramă, T.Morozan, Culegere de probleme de calcul diferențial şi integral (Ed. Tehnică 1964).