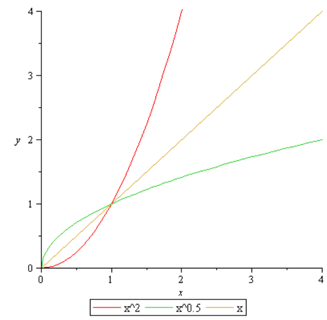
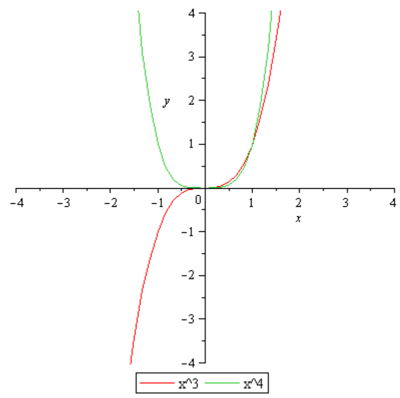
Funcțiile *elementare de bază* sunt:

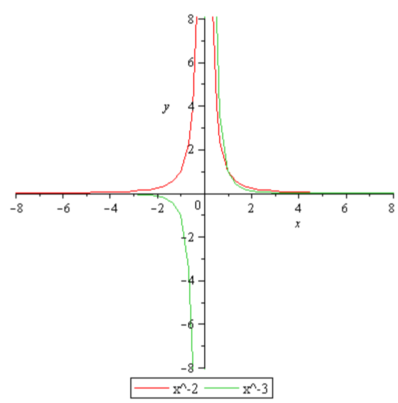
1) Funcția putere $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$



Dacă exponenții sunt numere întregi pozitive, atunci funcția putere este definită pe toată dreapta reală. De exemplu:



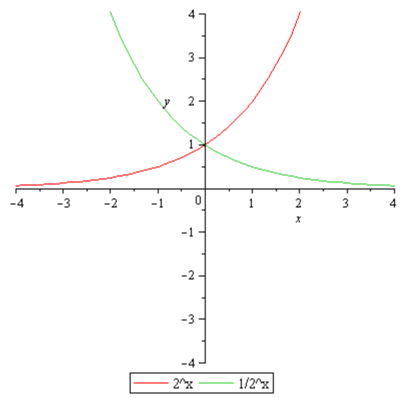
Dacă exponenții sunt numere întregi negative, atunci funcția putere este definită pe dreapta reală, fără zero. De exemplu:



Dacă $\alpha = \pm \frac{p}{q}$ cu p,q întregi pozitivi, atunci funcția putere este definită pe $\mathbb{R}$ pentru q impar și pe $[0, +\infty)$ pentru q par.

2) Funcția exponențială $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$

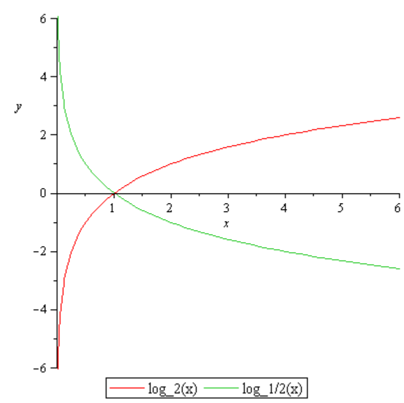
Această funcție este monoton crescătoare pentru $a > 1$ și descrescătoare pentru $a \in (0,1)$. Pentru bază supraunitară, $2 \in (1, +\infty)$ în exemplul de mai jos, funcția este crescătoare, iar pentru bază subunitară, $1/2 \in (0,1)$ în exemplul de mai jos, funcția este descrescătoare.



3) Funcția logaritmică $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

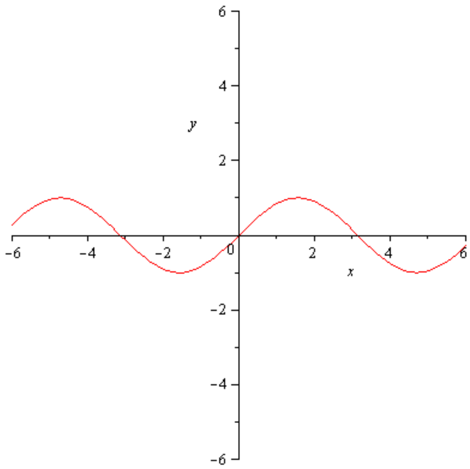
Această funcție este monoton crescătoare pentru $a > 1$ și descrescătoare pentru $a \in (0,1)$.

Observație: În figura de mai jos baza logaritmului este o dată supraunitară, anume $2 \in (1, +\infty)$, deci funcția logaritmică considerată va fi una crescătoare și apoi subunitară adică $\frac{1}{2} \in (0,1)$ și funcția va fi una descrescătoare.

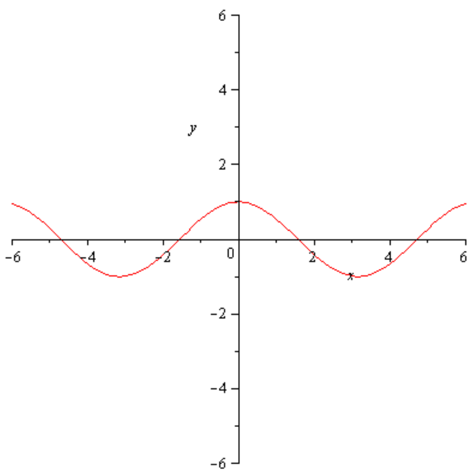


4) Funcțiile trigonometrice

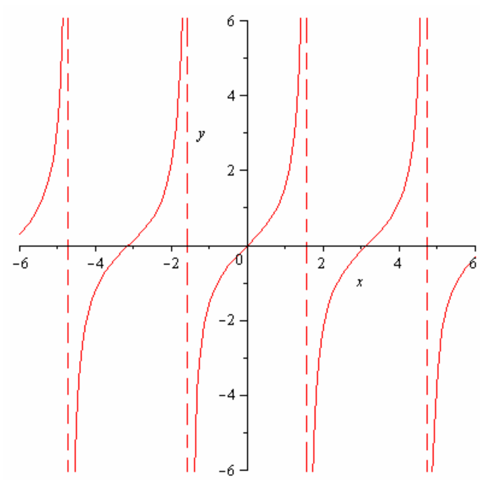
a) $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, o funcție periodică cu perioada $T = 2\pi$



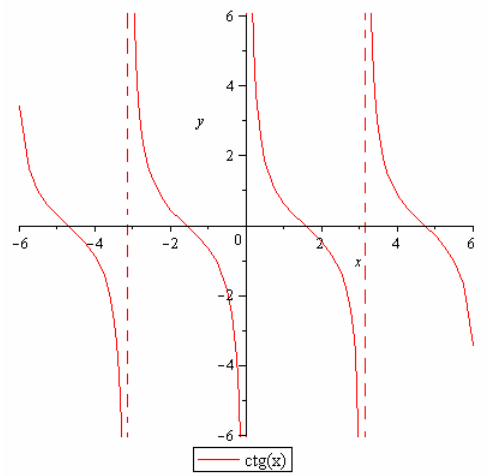
b) $y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, o funcție periodică cu perioada $T = 2\pi$



c) $y = tg\ x$, $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$, $T = \pi$



d) $y = ctg\ x$, $x \in \mathbb{R} - \{n\pi, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$, $T = \pi$



5) Funcțiile trigonometrice inverse:

O funcție este inversbilă dacă este bijectivă. Pentru analiza bijectivității unei funcții reamintim câteva definiții.

a. f injectivă $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f),\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

b. f surjectivă $\Leftrightarrow \forall y \in$ domeniului de valori $\exists x \in D(f)$ a.î. $f(x) = y$

c. f bijectivă $\Leftrightarrow$ f injectivă şi surjectivă

Funcțiile trigonometrice listate mai sus, nu au proprietatea de injectivitate. Pentru a le putea inversa, se consideră o restricție a acestor funcții pe domenii pe care acestea vor fi injective deci si bijective. In acest sens se va considera:

$$\sin_R x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1]$$

$$\cos_R x : [0, \pi] \rightarrow [-1,1]$$

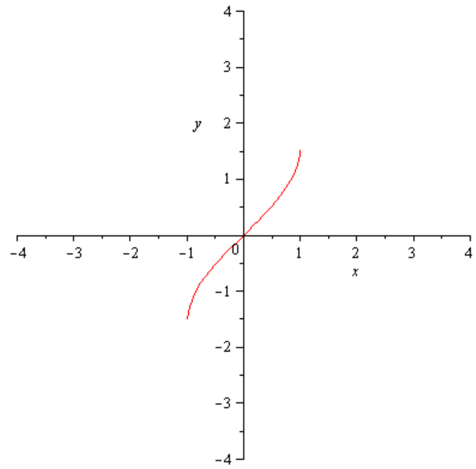
$$tg_R x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$ctg_R x : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

a) $y = \arcsin x$, $x \in [-1, +1]$

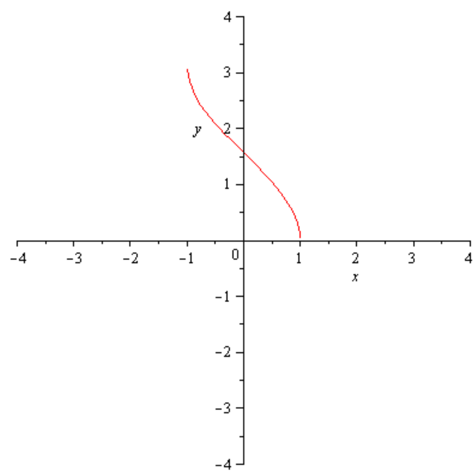
$$\sin_R x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1]$$

$$arc\sin x:[-1,1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$



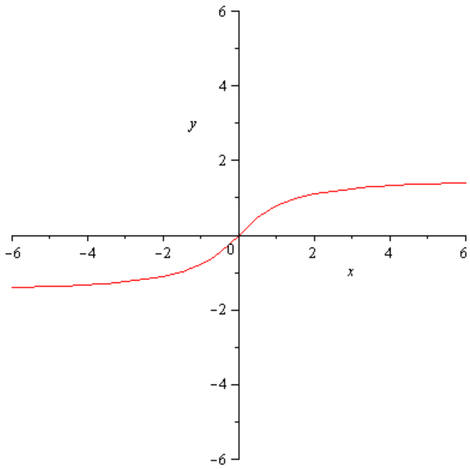
b) $y=\arccos x$, $x\in[-1,+1]$

$$\cos_R x:[0,\pi]\rightarrow[-1,1]$$
$$arc\cos x:[-1,1]\rightarrow[0,\pi]$$



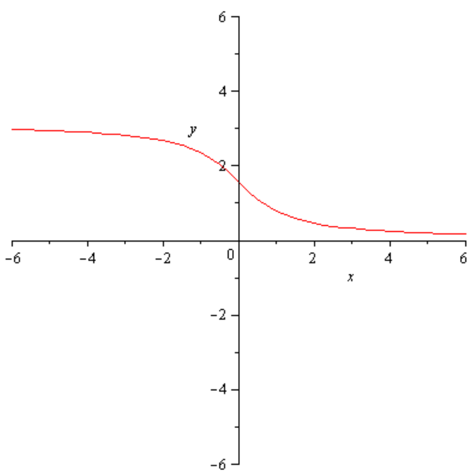
c) $y=arctgx$, $x\in\mathbb{R}$

$$tg_R x:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow\mathbb{R}$$
$$arctg\ x:\mathbb{R}\rightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$



d) $y = arcctgx$, $x \in \mathbb{R}$

$$ctg_R x : (0,\pi) \to \mathbb{R}$$
$$arcctg\ x : \mathbb{R} \to (0,\pi)$$



Obsevație: Funcțiile obținute din acestea, printr-un număr finit de operații aritmetice şi prin compuneri funcție de funcție, se numesc *funcții elementere*.

Operații cu funcții continue într-un punct: Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcții definite pe o vecinătate a punctului x_0. Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sunt continue în x_0, atunci suma $f(x)+g(x)$, diferența $f(x)-g(x)$, produsul $f(x)\cdot g(x)$ şi raportul $f(x)/g(x)$ cu $g(x_0)\neq 0$ sunt continue în x_0.

Bibliografie :

1.M.Krasnov, A.Kiselev, G.Makarenko, E.Shikin, *Mathematical Analysis for Engineers* (MIR, Moscow 1989).

2. Aramă, T.Morozan, Culegere de probleme de calcul diferențial şi integral (Ed. Tehnică 1964).