1.7 Noțiunea de infinit

Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate a punctului x_0, cu o posibilă excepție în x_0.

Definiție: Funcția $f(x)$ este *infinită* pentru $x \to x_0$, dacă pentru orice număr $M > 0$, oricât de mare, există un număr $\delta > 0$ astfel încât

$$|f(x)| > M \qquad (51)$$

pentru $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$

Notație: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Observație: Atunci când spunem că limita lui $f(x)$ este A, înțelegem că numărul A este finit.

Cu simboluri logice putem rescrie definiția noțiunii de infinit:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ a.î. } \forall x, x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M .$$

Cazuri particulare:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ a.î. } \forall x, x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M .$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ a.î. } \forall x, x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M .$$

Exemple:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$ este infinită pentru $x \to 0$

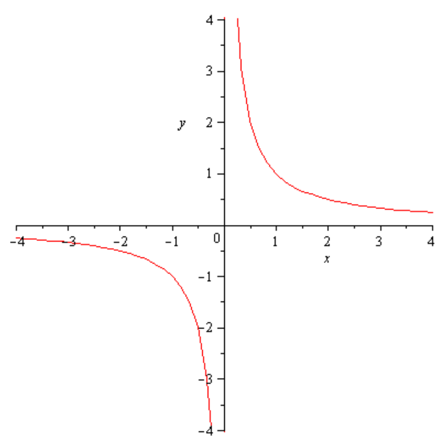


Figura 1.26 $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Intr-adevăr, fie $M > 0$, oricât de mare. Pentru ca $\left|f(x)\right| > M \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > M \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} > M$ să aibă loc este necesar şi suficient ca:

$$|x| = |x-0| < \frac{1}{M}$$

Considerăm $\delta = \frac{1}{M}$ şi avem:

$\forall M > 0$, $\exists \delta > 0,\ \delta = \frac{1}{M}$ astfel încât $\forall x, x \neq 0$, $|x-0| < \delta \Rightarrow \left|f(x)\right| > M$.

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\forall x \neq 0$ este infinită pentru $x \to 0$

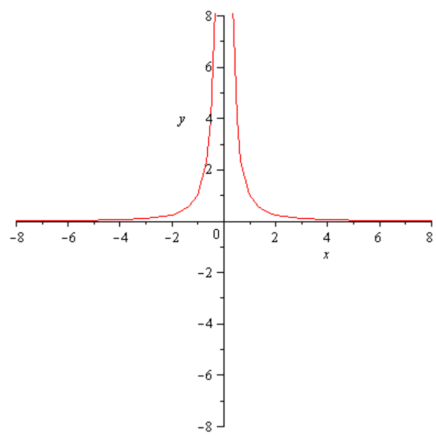


Figura 1.27 $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Intr-adevăr, fie $M > 0$, oricât de mare. $\exists \delta(M) = ?$ a.î. $\forall x, x \neq 0$ $|x-0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

Pentru ca $f(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{M} < 0$ să aibă loc este necesar şi suficient ca:

$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \quad \text{deci} \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$\forall M > 0$, $\exists \delta > 0,\ \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ astfel încât $\forall x, x \neq 0$, $|x-0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

Interpretare geometrică:

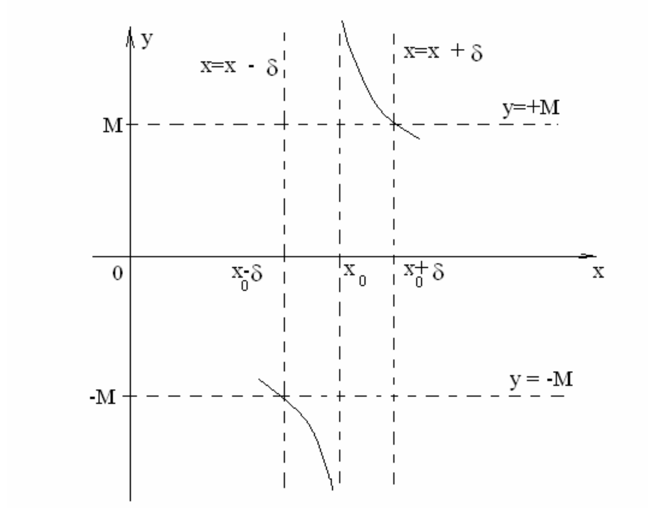


Figura 1.28

Funcția $f(x)$ este *infinită* pentru $x \to x_0$, dacă fiind dată o bandă orizontală, oricât de lată, între dreptele $y=-M$ şi $y=+M$, există două drepte verticale $x = x_0 - \delta$ şi $x = x_0 + \delta$ astfel încât graficul lui $y = f(x)$, $x \neq x_0$ se află în afara benzii orizontale pentru $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Definiție: Spunem că o funcție $f(x)$ este infinită pentru $x \to \infty$ şi scriem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ dacă pentru orice $M > 0$, oricât de mare, există un număr $N > 0$ astfel încât

$$|f(x)| > M, \quad \forall x, |x| > N \tag{52}$$

Exemplu: $f(x) = x$ este infinită pentru $x \to \infty$

Intr-adevăr, $\forall M > 0$, $\exists N > 0$, $N = M$ a.î. pentru $\forall x$, $|x| > N \Rightarrow |f(x)| > M$

Relații între infinitezimal şi infinit

Teorema 1: Dacă o funcție $f(x)$ este infinit pentru $x \to x_0$, atunci funcția $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Demonstrație:
Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar oricât de mic. Deoarece $f(x)$ este infinit pentru $x \to x_0$, atunci pentru $\forall M > 0$, fie $M = \frac{1}{\varepsilon}$, $\exists \delta > 0$ a.î.

$$\left| f(x) \right| > M = \frac{1}{\varepsilon} \text{ pentru } x \neq x_0,\ \left| x - x_0 \right| < \delta$$

Cu definiția $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ avem

$$\left| \alpha(x) \right| = \frac{1}{\left| f(x) \right|} < \frac{1}{M} = \varepsilon$$

Astfel, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ a.î. $\left|\alpha(x)\right| < \varepsilon$ pentru $\forall x, x \neq x_0$ şi $\left| x - x_0 \right| < \delta$. Deci $\alpha(x)$ infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Teorema 2: Dacă o funcție $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$ şi dacă $\alpha(x)$ este diferit de zero pe vecinătatea $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a lui x_0, cu o excepție posibilă în x_0, atunci funcția $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ este un infinit pentru $x \to x_0$.

Considerăm funcția rațională:

$$y(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}, \qquad a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0$$

raportul a două polinoame în x de grade m şi n respectiv. Pentru $|x|$ suficient de mare, numitorul este diferit de zero şi astfel raportul are sens.

$$y(x) = \frac{x^m \left(a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + \ldots + a_m \frac{1}{x^m} \right)}{x^n \left(b_0 + b_1 \frac{1}{x} + b_2 \frac{1}{x^2} + \ldots + b_n \frac{1}{x^n} \right)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n} = \begin{cases} \infty, & m > n \\ \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & m < n \end{cases}$$

Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0 cu o excepție posibilă în x_0 .

Teorema 1: Pentru ca funcția să aibă limita A în x_0 este necesar şi suficient ca funcția să admită reprezentarea:

$$f(x) = A + \alpha(x) \tag{53}$$

unde $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Exemplu: $f(x) = x$ şi $x_0 = 2$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$ si $f(x) = 2 + (x-2)$, unde 2 este numărul limită, iar $x-2$ este un infinitezimal pentru $x \to 2$.

Teorema 2: Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcții definite pe o vecinătate Ω a punctului x_0 cu o excepție posibilă în x_0 . Dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ şi $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, atunci

a) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x) \pm g(x)\right] = A \pm B$ (54)

b) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = A \cdot B$ (55)

c) $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, cu condiția ca $\lim_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$. (56)

Demonstrație: Teorema 2 b) Dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ şi $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, atunci cele două funcții admit reprezentările:

$$f(x) = A + \alpha(x) \qquad\qquad g(x) = B + \beta(x)$$

unde $\alpha(x)$, $\beta(x)$ sunt infinitezimal pentru $x \to x_0$.

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) &= \big(A + \alpha(x)\big)\big(B + \beta(x)\big) = \\ &= A\cdot B + A\cdot\beta(x) + B\cdot\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x) \end{aligned}$$

Primul termen din sumă este o constantă, iar următorii sunt infinitezimali pentru $x \to x_0$.

Exemple:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4}{x+1}=\dfrac{0^2-4}{0+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=4$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\dfrac{1}{2}$

5. $f(x)=\sin x^2$ definită pe $\mathbb{R}$, pară şi mărginită deoarece $\left|\sin x^2\right|\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Această funcție se anulează în punctele $x=\pm\sqrt{n\pi}$, $n=0,1,2,\ldots$ Considerăm două puncte consecutive, în care funcția se anulează: $\sqrt{n\pi}$ şi $\sqrt{(n+1)\pi}$ şi distanța dintre acestea:

$$d=\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}}=0$$

Putem concluziona că distanța dintre astfel de două puncte consecutive tinde la zero şi $f(x)=\sin x^2$ nu este periodică.

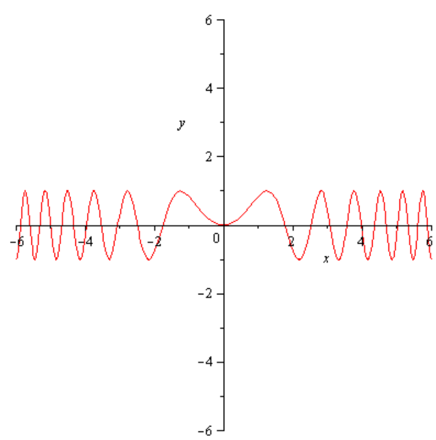


Figura 1.29 $f(x)=\sin\left(x^2\right)$

În cele ce urmează vom calcula limite de funcții în care vom utiliza limita:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\quad \text{dacă}\quad \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0\quad \text{şi}\quad \alpha(x)\neq 0\quad \text{pt.}\quad x\neq x_0$$

Exerciții:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\frac{1}{1}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{5x-3x}{2}\cos\frac{5x+3x}{2}}{5x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos 4x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\cos 4x=\frac{2}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{5}$$

În cele ce urmează vom calcula limite de funcții în care vom utiliza limita:

$$\lim_{x\to x_0}\left[1+\alpha(x)\right]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e,\quad \text{dacă}\quad \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0\quad \text{şi}\quad \alpha(x)\neq 0\quad \text{pt.}\quad x\neq x_0$$

Exerciții:

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^x\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{x+2}-1\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1-x-2}{x+2}\right)^x$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-3}\cdot\frac{-3}{x+2}x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x}{x+2}}=e^{-3}$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{ctg^2x}\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}x^2ctg^2x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{tg^2x}}=e^1=e$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{3}\cdot\frac{3}{x^2-2}x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}}=e^3$$

□ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\ln\left[(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right]^k$

$$\lim_{x\to 0} k\ln(1+kx)^{\frac{1}{kx}} = k\ln e = k$$

□ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$

Facem o schimbare de variabilă: $e^{2x}-1=y$, $e^{2x}=1+y$, $2x=\ln(1+y)$, $x=\frac{1}{2}\ln(1+y)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{3\cdot\frac{1}{2}\ln(1+y)}=\frac{2}{3}\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\ln e}=\frac{2}{3}$$

1.9 Limite laterale

Definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită pe intervalul (a,x_0). Atunci, numărul A este limita la stânga a funcției $f(x)$ în punctul x_0, dacă $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $|f(x)-A|<\varepsilon$ pentru $\forall x$ cu proprietatea $x_0-\delta<x<x_0$.

Notație: $\lim\limits_{x\to x_0, x<x_0} f(x)=A$ sau $f(x_0-0)=A$

Definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită pe intervalul (x_0,b). Atunci, numărul A este limita la dreapta a funcției $f(x)$ în punctul x_0, dacă $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $|f(x)-A|<\varepsilon$ pentru $\forall x$ cu proprietatea $x_0<x<x_0+\delta$.

Notație: $\lim\limits_{x\to x_0, x>x_0} f(x)=A$ sau $f(x_0+0)=A$

Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a lui x_0, cu o posibilă excepție în x_0.

Proprietate: Pentru ca $f(x)$ să aibă limită în x_0 este necesar şi suficient ca cele două limite laterale ale lui $f(x)$ în x_0 să existe şi să coincidă, adică:

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0} f(x) \tag{57}$$

Exemple: 1) $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

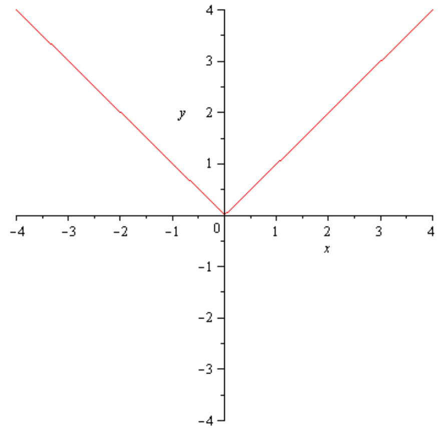


Figura 1.30

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 0 \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

2) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}, \quad x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 0 \qquad \Rightarrow nu \ \exists \ \lim_{x\to 0} f(x)$$

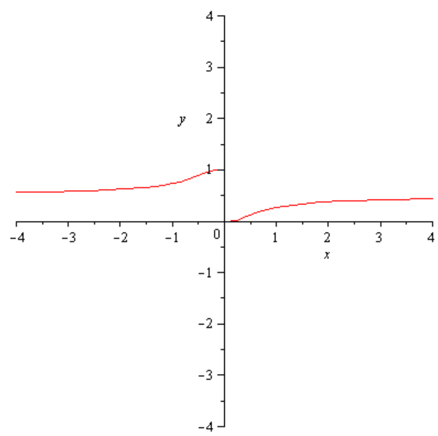


Figura 1.31 $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}, \ x \neq 0$

3) $f(x) = e^{1/x}, \quad x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = +\infty \qquad \Rightarrow nu \ \exists \ \lim_{x\to 0} f(x)$$

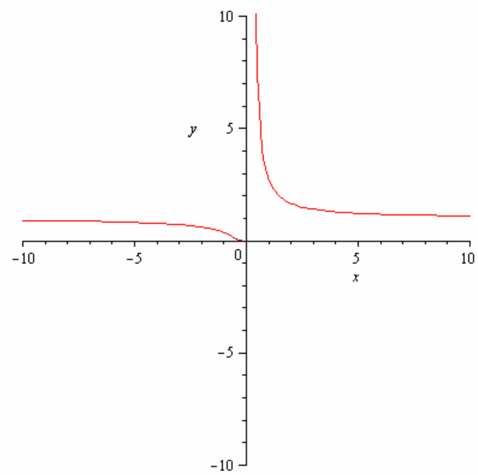


Figura 1.32 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$

Exerciții:

□ Fie $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-2}}}$, $x \neq 2$. Are funcția limită în $x_0 = 2$?

$$\lim_{x\to 2, x<2} f(x) = \lim_{x\to 2, x<2} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-2}}} = 1$$

$$\lim_{x\to 2, x>2} f(x) = \lim_{x\to 2, x>2} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-2}}} = 0$$

$$\Rightarrow nu\ \exists\ \lim_{x\to 2} f(x)$$

□ Fie $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$. Are funcția limită în $x_0 = -1$ și $x_0 = 1$?

$$\lim_{x\to -1, x<-1} f(x) = \lim_{x\to -1, x<-1} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1, x.-1} f(x) = \lim_{x\to -1, x>-1} \frac{x}{x^2-1} = +\infty \qquad \Rightarrow nu\ \exists\ \lim_{x\to -1} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = \lim_{x\to 1, x<1} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1, x>1} f(x) = \lim_{x\to 1, x>1} \frac{x}{x^2-1} = +\infty \qquad \Rightarrow nu\ \exists\ \lim_{x\to 1} f(x)$$

Capitolul 2 Continuitate

2.1 Noțiunea de continuitate într-un punct

Definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0. Funcția $f(x)$ este *continuă în x_0* dacă:

(i) $f(x)$ are limită în x_0

(ii) limita lui $f(x)$ în x_0 este egală cu valoarea funcției în punctul x_0, $f(x_0)$

Adică

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

Observație: Deoarece $x_0 = \lim\limits_{x\to x_0} x$, relația precedentă se poate rescrie

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) \tag{2}$$

Se observă că pentru o funcție continuă simbolurile *lim* şi *f* pot fi permutate.

Definiție: (cu ε, δ) Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0. Funcția $f(x)$ este *continuă în x_0* dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{3}$$

pentru $\forall x$, $x \in \Omega$, care verifică $|x - x_0| < \delta$.

Cu simboluri logice, ultima definiție poate fi rescrisă:

$f(x)$ continuă în x_0 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x \in \Omega$, $|x - x_0| < \delta$ $\Rightarrow$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Observații: In general $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ şi definiția continuității nu cere ca $x \neq x_0$.

Fie $y = f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0.

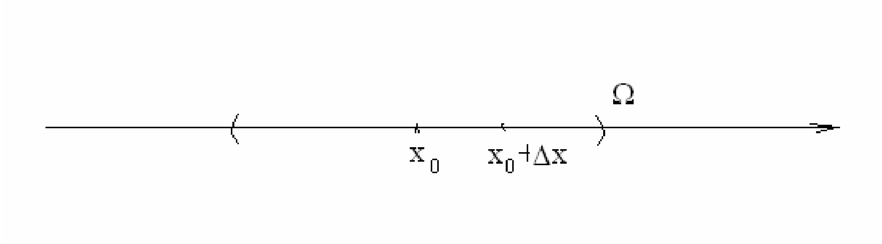


Figura 2.1

Considerăm punctul $x = x_0 + \Delta x$ din Ω, care diferă de punctul x_0 cu o cantitate pozitivă sau negativă notată Δx. Cantitatea Δx este *creşterea* argumentului x în x_0. Diferența

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \tag{4}$$

se numeşte *creşterea* funcției $f(x)$ în x_0 corespunzătoare creşterii Δx a variabilei independente x.

In termeni de creşteri, continuitatea lui $f(x)$ în x_0, adică

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{5}$$

devine

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \tag{6}$$

Sau

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \tag{8}$$

Definiție: Fie $f : \Omega \to \mathbb{R}$. $f(x)$ *continuă* în $x_0 \in \Omega$ dacă creşterea funcției $f(x)$ în x_0 corespunzătoare creşterii Δx a variabilei independente x tinde la zero pentru $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \tag{9}$$

Exemple:

1. $y = x^2$ este continuă în fiecare punct al dreptei reale.

Intr-adevăr, pentru orice creştere Δx a argumentului x în punctul x_0 avem

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 = (2x_0 + \Delta x)\Delta x$$

$\Rightarrow$ $\Delta y \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$ $\Rightarrow$ funcția este continuă în fiecare punct x_0 al dreptei reale.

2. $y = \sin x$ este continuă în fiecare punct al dreptei reale.

Intr-adevăr, pentru orice creştere Δx a argumentului x în punctul x_0 avem

$$\Delta y = \sin\left(x_0 + \Delta x\right) - \sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot \Delta x$$

$\Rightarrow$ $\Delta y \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$ $\Rightarrow$ funcția este continuă în fiecare punct x_0 al dreptei reale.

Definiție: (cu şiruri) Fie $f : E \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in E$. $f(x)$ este *continuă* în $x_0 \in E$ dacă pentru orice şir $\{x_n\}$, $x_n \in E$ convergent la x_0, şirul corespunzător imagine $\{f(x_n)\}$ converge la $f(x_0)$.

Exemplu: Funcția Dirichlet este discontinuă în orice punct.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Intr-adevăr, fie x_0 un număr irațional cu $f(x_0) = 0$ şi oricare ar fi x_0, există un şir $\{x_n\}$ de numere raționale care converge la x_0. Dar, cu definiția funcției $f(x_n) = 1$, $\forall n$

$\Rightarrow$ şirul $\{f(x_n)\} = \{1\}$ converge la unu şi deci $\{f(x_n)\}$ nu converge la $f(x_0)$

In concluzie, funcția nu este continuă în x_0 irațional. Analog se verifică faptul că funcția nu este continuă în x_0 rațional.

Proprietăți ale funcțiilor continue într-un punct

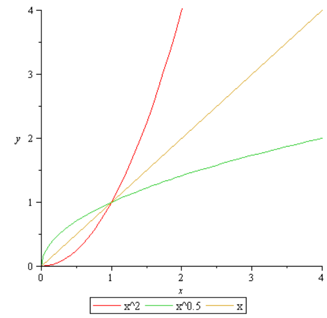
1: Dacă o funcție $f(x)$ este continuă în x_0 şi dacă $f(x_0) > A$ (sau $f(x_0) < A$), atunci $\exists \delta$ astfel încât $f(x) > A$ (sau $f(x) < A$) pentu $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

2: Dacă o funcție $f(x)$ este continuă în x_0 şi dacă $f(x_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a lui x_0 astfel încât $f(x)$ nu se anulează şi are semn constant pe toată vecinătatea.

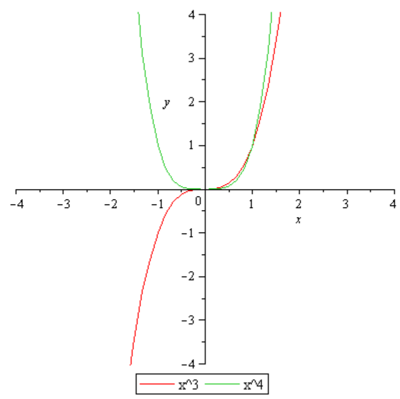
3: Funcțiile elementare de bază sunt *continue* în fiecare punct al domeniului de definiție.

Funcțiile *elementare de bază* sunt:

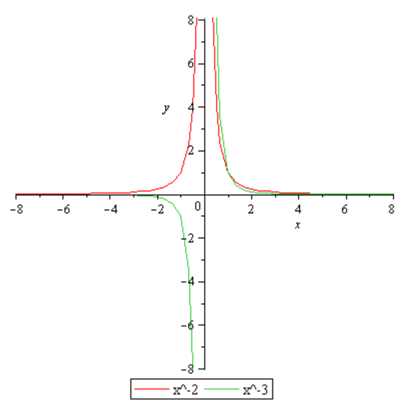
1) Funcția putere $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$



Dacă exponenții sunt numere întregi pozitive, atunci funcția putere este definită pe toată dreapta reală. De exemplu:



Dacă exponenții sunt numere întregi negative, atunci funcția putere este definită pe dreapta reală, fără zero. De exemplu:



Dacă $\alpha = \pm \dfrac{p}{q}$ cu p,q întregi pozitivi, atunci funcția putere este definită pe $\mathbb{R}$ pentru q impar și pe $[0, +\infty)$ pentru q par.

Bibliografie :

1.M.Krasnov, A.Kiselev, G.Makarenko, E.Shikin, *Mathematical Analysis for Engineers* (MIR, Moscow 1989).

2. Aramă, T.Morozan, Culegere de probleme de calcul diferențial şi integral (Ed. Tehnică 1964).