Limita unei funcții într-un punct

Definiție: (cu şiruri) Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0, cu o posibilă excepție în x_0. Şi fie $\{x_n\}$ cu $x_n \in \Omega$ şi $x_n \neq x_0$, un şir de numere convergent la x_0. Atunci, un număr A este limita funcției $f(x)$ în punctul x_0 dacă pentru orice şir $\{x_n\} \to x_0$, şirul corespunzător imagine $\{f(x_n)\}$ este convergent la A.

Exemplu:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{definită pe } \mathbb{R} - \{0\}$$

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad f(x_n) = \sin n\pi = 0$$

$$x_n' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad f(x_n') = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

Am considerat două şiruri $\{x_n\}$ şi $\{x_n'\}$ convergente la $x_0 = 0$ pentru care şirurile corespunzătoare imagine au limite diferite $\{f(x_n)\} \to 0$ şi $\{f(x_n')\} \to 1$. Conform definiției cu şiruri, rezultă că funcția nu are limită în $x_0 = 0$.

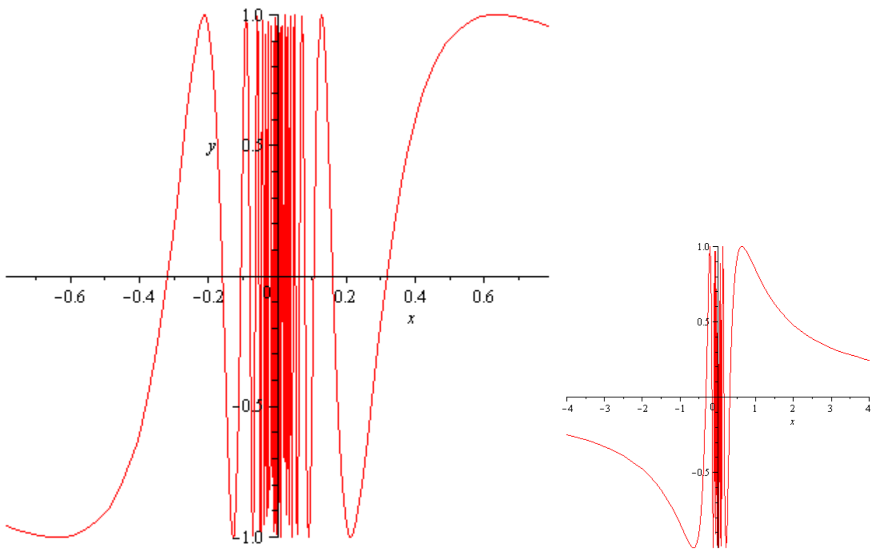


Figura 1.16 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Unicitatea limitei: Dacă o funcție $f(x)$ care are limita A în punctul x_0, atunci limita este unică.

Definiție: O funcție $f(x)$ este *mărginită* pe o vecinătate a unui punct x_0 dacă există $M > 0$ și $\delta > 0$ astfel încât

$$|f(x)| \leq M \ , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \tag{48}$$

vecinătate pe care funcția este definită.

Teoremă: Fie $f(x)$ o funcție care are limită finită în x_0. Atunci, $f(x)$ este mărginită pe o vecinătate a lui x_0, adică $\exists M > 0$ și $\exists \delta > 0$ astfel încât

$$|f(x)| \leq M \ , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Demonstrație:

Fie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \ \Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0$ de exemplu $\varepsilon = 1$**,** $\exists \delta > 0$ astfel încât

$$|f(x) - A| < 1 \quad \text{pentru } x \neq x_0 \text{ și } |x - x_0| < \delta$$

Dar, $\quad 1 > |f(x) - A| \geq \big||f(x)| - |A|\big| \geq |f(x)| - |A| \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)| < |A| + 1$

Fie $M = |A| + 1$ dacă funcția nu este definită în x_0 și fie $M = \max\{|A| + 1, |f(x_0)|\}$ dacă funcția este definită în x_0.

$$\Rightarrow \qquad |f(x)| \leq M \ , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Observație: Conform teoremei, existența limitei finite a unei funcții implică mărginirea acesteia. Reciproca nu este totdeauna adevărată, adică o funcție poate să fie mărginită pe o vecinătate a lui x_0 dar să nu aibă limită în x_0. De exemplu, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ este mărginită pe o vecinătate a lui $x_0 = 0$ deoarece $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ dar $f(x)$ nu are limită în $x_0 = 0$.

Limite și inegalități

Urmează două reguli de comparare a limitelor de funcții.

1: Fie $f(x) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in \Omega$, Ω o vecinătate a punctului x_0 , cu o excepție posibilă în x_0 și presupunem că $f(x)$ și $\varphi(x)$ au limită în x_0 . Atunci:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$$

Cu alte cuvinte, putem trece la limită în inegalități.

Caz particular: $f(x)=0$ În acest caz, dacă $\varphi(x)$ este pozitivă, atunci şi limita sa va fi pozitivă.

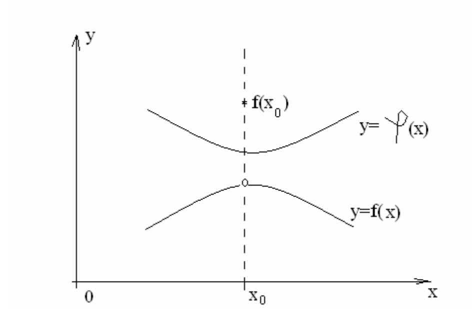


Figura 1.17

2: Fie $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$, $\forall x\in\Omega$, Ω o vecinătate a punctului x_0, cu o excepție posibilă în x_0 şi presupunem că $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ au limita A în x_0. Atunci şi $f(x)$ are limita A în x_0 .

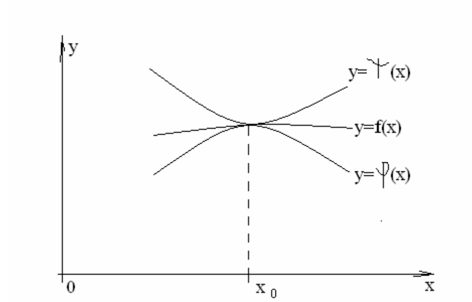


Figura 1.18

Exemplu:

$$\varphi(x)=-|x| \qquad f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \psi(x)=|x|$$

$$-|x|\le x\cos\frac{1}{x}\le|x| \qquad \lim_{x\to0}\left(-|x|\right)=\lim_{x\to0}|x|=0 \qquad \Rightarrow\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}=0$$

Observație: Limita funcției $\cos\frac{1}{x}$ pentru $x\to0$ nu există. Înmulțind funcția cu x situația se schimbă.

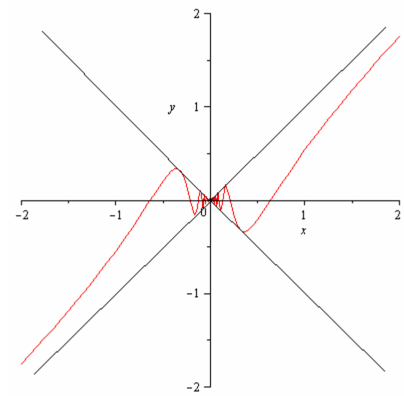


Figura 1.19 $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

1.5 Limita unei funcții când variabila tinde la infinit

Fie $f(x)$ o funcție definită pe toată dreapta reală astfel încât să putem calcula valorile funcției pentru *x* oricât de mare.

Definiție: Spunem că numărul A este limita funcției $f(x)$ când x tinde la infinit şi scriem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \tag{49}$$

dacă $\forall\varepsilon > 0$ există un număr $N > 0$ a.î. $|f(x) - A| < \varepsilon$ pentru $\forall x$ cu $|x| > N$.

Cazuri particulare:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ a.î. } |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x, x > N$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ a.î. } |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x, x < -N$$

Interpretare geometrică: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ înseamnă, fiind dată o bandă orizontală, oricât de îngustă, între dreptele $y = A - \varepsilon$ şi $y = A + \varepsilon$, există o dreaptă $x = N > 0$ a.î. pentru toți $x > N$ graficul lui $y = f(x)$ să fie conținut în bandă. Spunem că curba $y = f(x)$ tinde asimptotic la dreapta $y = A$ pentru $x \to +\infty$.

Dreapta $y = A$ este asimptota orizontală la $+\infty$ a funcției.

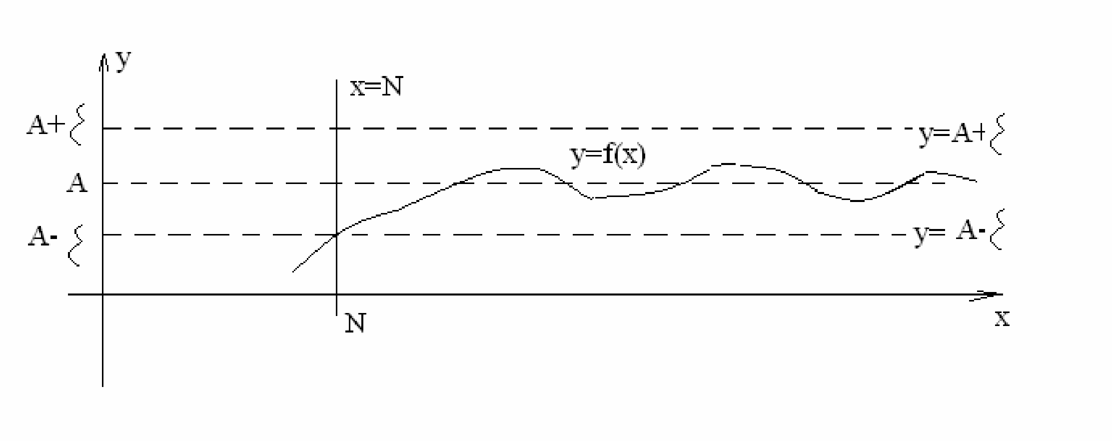


Figura 1.20

Exemplu:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{x^2+1} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

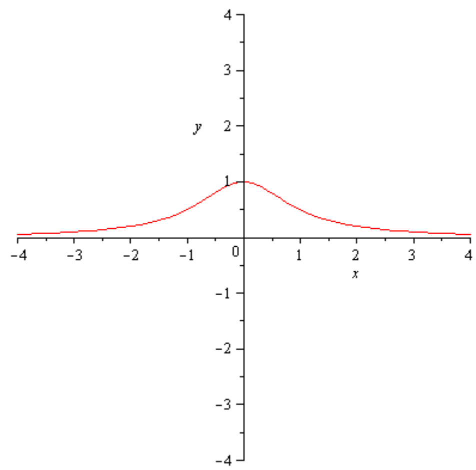


Figura 1.21 $\quad f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+1}$

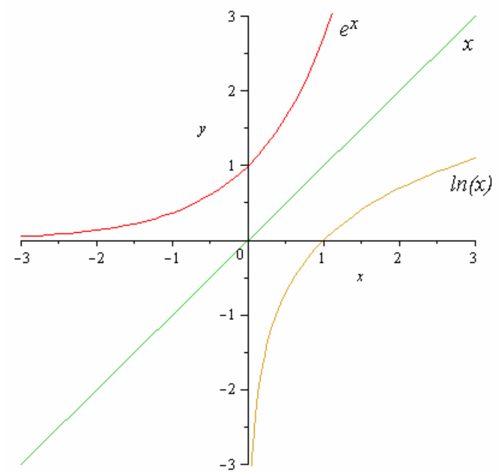
$$\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=0 \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N\left(\varepsilon\right)=?\ \forall x,\ \left|x\right|>N \Rightarrow \left|f\left(x\right)-0\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{x^2+1}-0\right|<\varepsilon \iff \frac{1}{x^2+1}<\varepsilon \iff x^2+1>\frac{1}{\varepsilon} \iff x^2-\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)>0$$

$$x\in\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1},+\infty\right) \iff \left|x\right|>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1} \Rightarrow N=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\left(\varepsilon\right)=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}\ \ \forall x,\ \left|x\right|>N \Rightarrow \left|f\left(x\right)-0\right|<\varepsilon \overset{def}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$$

Limite importante: $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$



Exerciții: Să se calculeze următoarele limite:

1. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

3. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+x^2-\left(1-x+x^2\right)}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}}=1$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$$

Cum $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left[\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-2}+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-3}+\ldots+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)+1\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-2}+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-3}+\ldots+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)+1} = \frac{1}{n}$$

1.6 Noțiunea de infinitezimal

Fie $\alpha(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0, cu o posibilă excepție în x_0.

Definiție: Funcția $\alpha(x)$ este o funcție *infinit mică* sau un *infinitezimal*, pentru $x \to x_0$ dacă $\alpha(x)$ are în punctul x_0 limita zero, adică $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$.

Exemplu: $\alpha(x) = x-1$ este un infinitezimal pentru $x \to 1$, deoarece $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$

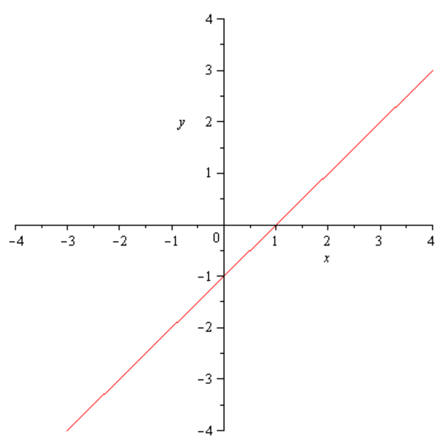


Figura 1.22 $\alpha(x) = x-1$

Altă definiție: $\alpha(x)$ *infinitezimal*, pentru $x \to x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ a.î. $|\alpha(x)| < \varepsilon$ pentru $\forall x, x \neq x_0$ şi $|x - x_0| < \delta$. (50)

Observație: Analog, pot fi definiți infinitezimali pentru $x \to \infty$. De exemplu:

- $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ este un infinitezimal pentru $x \to \infty$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

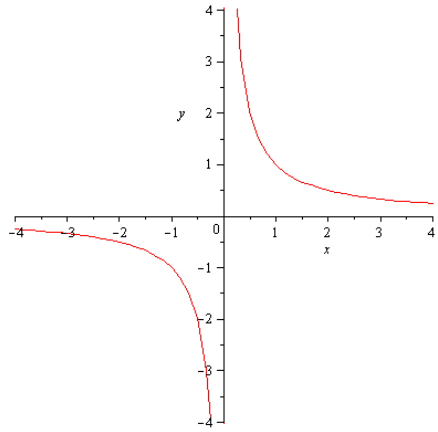


Figura 1.23 $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$

□ $\alpha(x)=e^{-x}$ este un infinitezimal pentru $x\to+\infty$, deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

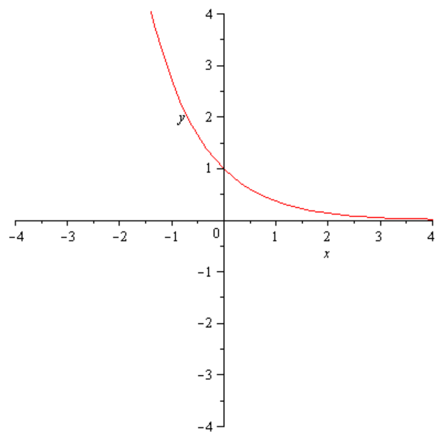


Figura 1.24 $\alpha(x)=e^{-x}$

Infinitezimali. Proprietăți.

1. Dacă $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ sunt infinitezimali pentru $x\to x_0$, atunci şi suma $\alpha(x)+\beta(x)$ este infinitezimal pentru $x\to x_0$.

2. Dacă $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x\to x_0$ şi dacă o funcție $f(x)$ este mărginită pe o vecinătate a lui x_0, atunci produsul $\alpha(x)f(x)$ este un infinitezimal pentru $x\to x_0$.

Exemplu: Funcția $y=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x\neq 0$ poate fi considerată ca un produs de funcții $\alpha(x)=x$ şi $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

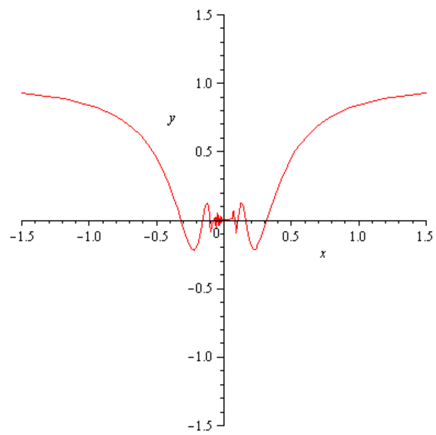


Figura 1.25 $y = x \sin \frac{1}{x}$

Funcţia $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to 0$ şi $f(x)$ este mărginită pe orice vecinătate a punctului $x_0 = 0$. Atunci, cu proprietatea 2, $y = x \sin \frac{1}{x}$ este un infinitezimal pentru $x \to 0$ şi are loc:

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Remarcă: Dacă o funcţie $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$ şi dacă o funcţie $f(x)$ are limită finită în x_0, atunci produsul $\alpha(x) f(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$.

3. Dacă o funcţie $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$ şi dacă o funcţie $f(x)$ are limită nenulă în x_0, atunci raportul $\alpha(x)/f(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Observaţie: Condiţia $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$ din proprietatea 3, este esenţială.

Exemplu: $\alpha(x) = x \quad f(x) = x^2$

$\alpha(x)$ infinitezimal pentru $x \to 0$
$f(x)$ are limită nulă în $x = 0$, adică $f(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to 0$

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \text{ nu este un infinitezimal pentru } x \to 0.$$

Observaţie: In general, raportul a doi infinitezimali nu este un infinitezimal.