Şiruri monotone

Un şir $\{a_n\}$ se numeşte:

a) crescător dacă $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1} \le \ldots$.

b) descrescător dacă $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \ldots$.

c) monoton dacă $\{a_n\}$ este fie crescător fie descrescător.

Un şir $\{a_n\}$ crescător este *mărginit* dacă este mărginit superior, adică dacă există un număr M a.î. $a_n \le M,\ \forall n$ şi toţi termenii şirului sunt conţinuţi în intervalul închis $[a_1, M]$.

Un şir $\{a_n\}$ descrescător este *mărginit* dacă este mărginit inferior, adică dacă există un număr m a.î. $a_n \ge m,\ \forall n$ şi toţi termenii şirului sunt conţinuţi în intervalul închis $[m, a_1]$.

Teorema 5(Weierstrass): Orice şir monoton şi mărginit are limită.

Demonstraţie:

Deoarece şirul $\{a_n\}$ este mărginit, termenii şirului formează o mulţime care are supremum şi infimum. Fie M supremum pentru mulţime şi arătăm că $\lim_{n\to\infty} a_n = M$ cu condiţia ca şirul să fie crescător.

Din definiţia lui supremum pentru $\forall \varepsilon > 0$ există a_N a.î.

$$M - \varepsilon < a_N \le M$$
$$0 \le M - a_N < \varepsilon$$

Deoarece s-a presupus $\{a_n\}$ crescător avem

$$0 \le M - a_n \le M - a_N < \varepsilon, \quad \forall n > N$$
$$0 \le M - a_n < \varepsilon, \quad \forall n > N$$
$$|a_n - M| < \varepsilon, \quad \forall n > N$$

Ceea ce stabileşte că M este limita şirului $\{a_n\}$.

In mod asemănător se poate arăta că $\lim_{n\to\infty} a_n = m$ cu condiţia ca $\{a_n\}$ să fie descrescător şi mărginit şi m să fie infimum pentru mulţimea termenilor.

Exerciții:

1. Arătați cu teorema Weierstrass că şirul $a_n = \frac{2n+1}{n}$ este convergent.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \Rightarrow a_n \text{ descrescator}$$

$$0 < a_n = 2 + \frac{1}{n} \le 3 \Rightarrow a_n \text{ marginit}$$

Cu teorema Weierstrass şirul este convergent.

2. Arătați cu teorema Weierstrass că şirul $a_n = q^n$ cu $|q| < 1$ este convergent.

a) $q \in (0,1)$

Cum $a_{n+1} = q \cdot a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ şir descrescător.

Rămâne să arătăm că este mărginit inferior.

Acest lucru este evident deoarece $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Cu teorema Weierstrass şirul este convergent. Atunci, fie $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ şi trecem la limită în relația de recurență $l = q \cdot l \Rightarrow l - l \cdot q = 0 \Rightarrow l(1-q) = 0 \Rightarrow l = 0$

b) $q = 0$

Cum $a_n = 0$ şir staționar $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

c) $q \in (-1,0)$

Notăm $q = -p$ cu $p \in (0,1)$.

Cum $a_n = q^n = (-p)^n = (-1)^n p^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

3. Arătați cu teorema Weierstrass că şirul $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$ este convergent.

- *monotonie*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \ldots - \frac{1}{n+n}$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

Deci, şirul este crescător. Rămâne să arătăm că este mărginit superior.

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

Deci şirul este mărginit. Cu teorema Weierstrass şirul este convergent.

4. Arătați cu teorema Weierstrass că şirul $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \ldots + \frac{1}{n^2}$ este convergent.

- *monotonie*

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \ldots - \frac{1}{n^2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

Deci, şirul este crescător. Rămâne să arătăm că este mărginit superior.

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \ldots + \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot n} <$$

$$< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

Deci şirul este mărginit. Cu teorema Weierstrass şirul este convergent.

Observație: Pentru ca un şir să fie convergent nu este necesar ca şirul să fie monoton.

Exemplu: Şirul $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ nu este monoton dar converge la zero.

In cele ce urmeaza ne ocupam de un sir remarcabil.

Arătați cu teorema Weierstrass că şirul $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este convergent.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + C_n^3 \frac{1}{n^3} + \ldots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \ldots + C_n^n \frac{1}{n^n}$$

$$= \frac{n!}{(n-0)!0!} + \frac{n!}{(n-1)!1!} \frac{1}{n} + \frac{n!}{(n-2)!2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n!}{(n-3)!3!} \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n!}{(n-n)!n!} \frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{n-1}{n}\frac{1}{2!}+\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{n^{k-1}}\frac{1}{k!}+$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))\ldots(n-(n-1))}{n^{n-1}}\frac{1}{n!}$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}+$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}$$

$$\le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

Dar, $\frac{1}{k!}\le\frac{1}{2^{k-1}}, \quad \forall k\in\mathbb{N}^*$

Intr-adevar, cu inductie avem:

$P(1)$: $\frac{1}{1!}\le\frac{1}{2^{1-1}}$

$P(k)$: $\frac{1}{k!}\le\frac{1}{2^{k-1}}$

Demonstram $P(k+1)$: $\frac{1}{(k+1)!}\le\frac{1}{2^k}$

$$\frac{1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!(k+1)}\overset{P(k)}{\le}\frac{1}{2^{k-1}(k+1)}\le\frac{1}{2^{k-1}\bullet 2}=\frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow\ a_n\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)<1+2=3$$

Deci $a_n\le 3$, a_n marginit superior. Ramane sa aratam ca este crescator. Pentru aceasta trebuie sa aratam ca $a_{n-1}<a_n$, adica:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}<1+\frac{1}{n}$$

Pentru a demonstra aceasta inegalitate folosim inegalitatea mediilor:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}, \qquad a_i>0$$

$$\sqrt[n]{1 \bullet \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \le \frac{1+1+\frac{1}{n-1}+1+\frac{1}{n-1}+\ldots+1+\frac{1}{n-1}}{n} = \frac{n+(n-1)\frac{1}{n-1}}{n} = 1+\frac{1}{n}$$

In concluzie sirul este crescator si cu teorema Weierstrass şirul este convergent. Mai mult,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e, \quad x_n \to \pm\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\frac{2n+3}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n+3}{n+1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}} = e^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n^2+1}\right)^{n^2-3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n^2+1}\right)^{(-n^2+1)\frac{n^2-3n}{-n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-n^2+1}\right]^{\frac{n^2-3n}{-n^2+1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{-n^2+1}} = e^{-1}$$

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+2}{n+1}-1\right)^{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{3n+1} = \ldots = e^3$

1.4 Funcţii de o variabilă. Limita unei funcţii într-un punct

Funcţia este un obiect matematic determinat de următoarele elemente: X o mulţime de numere reale x şi o lege de corespondenţă, o regulă care asociază la fiecare număr $x \in X$ un număr real şi numai unul, notat y dintr-o mulţime Y. In acest fel am definit o funcţie pe X şi scriem:

$$f : X \to Y \quad y = f(x) \quad \text{sau} \quad y = y(x), \; x \in X \tag{42}$$

Mulţimea X se numeşte *domeniu de definiţie* al funcţiei, iar mulţimea Y a valorilor y pe care le ia funcţia, se numeşte *domeniu de valori* sau *codomeniu.* Domeniul de definiţie se notează şi cu $D(f)$.

$x =$ variabilă independentă sau argument
$y =$ variabilă dependentă

O funcție este **bine definită** dacă sunt date:
(i) domeniul de definiție X
(ii) o lege care asociază la fiecare $x \in X$ o valoare bine determinată, unică $y = f(x)$.

Două funcții f şi g sunt *egale* dacă $D(f) = D(g)$ şi identitatea $f(x) = g(x)$ rămâne adevărată pentru toți $x \in D(f) = D(g)$.

Exemple de funcții:

a) un şir de numere reale $\{a_n\}$ este o funcție definită pe mulțimea numerelor naturale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, astfel

$$f(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) $$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \tag{43}$$

Domeniul de definiție: $(-\infty, +\infty)$
Domeniul de valori: $\{-1, 0, +1\}$

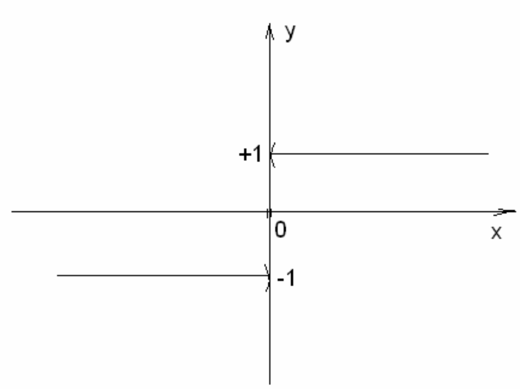

Figura 1.10 $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

c) $y = [x]$ unde x este un număr real şi $[x]$ partea întreagă, este cel mai mare întreg care nu-l excede pe x. Domeniul de definiție: $\mathbb{R}$
Domeniul de valori: $\mathbb{Z}$

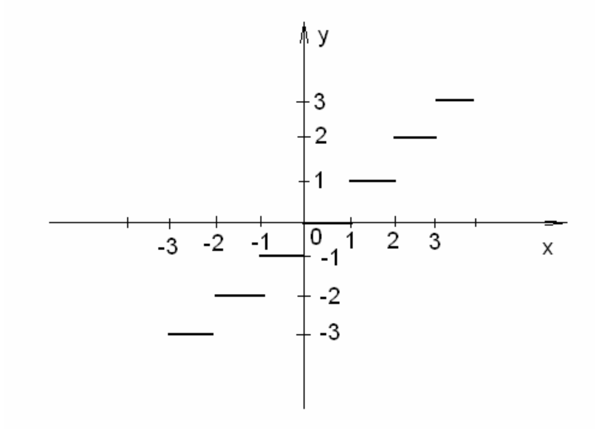

Figura 1.11 $f(x)=[x]$

Reprezentări pentru funcții

O funcție poate fi specificată printr-o formulă, printr-un grafic sau printr-un tabel. Respectiv, vom vorbi despre o reprezentare analitică, grafică sau tabelară.

a) *reprezentarea analitică* O funcție $y=f(x)$ este reprezentată analitic dacă este definită printr-o formulă care specifică la ce operații trebuie supus fiecare $x \in D(f)$ pentru a obține valoarea funcției în acel punct, notată cu *y*.
De exemplu, funcțiile:

$$y=\frac{x}{x^2+1} \quad \text{pentru } x \in (-\infty,+\infty)$$

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad \text{pentru } x \in [-1,+1]$$

sunt reprezentate analitic.

Observație: Nu orice formulă definește o funcție. De exemplu:

$$y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-4}$$

nu definește o funcție deoarece pentru orice număr real *x* cel puțin un radical nu are valori reale.

O funcție poate fi definită prin formule diferite pe porțiuni diferite ale domeniului de definiție.
De exemplu,

$$f(x)=\begin{cases}3, & x<0\\ 3+2x, & x\geq 0\end{cases}$$

b) *reprezentarea grafică* Graficul unei funcții $y=f(x)$ constă în mulțimea punctelor cu coordonatele (x,y) unde x este în domeniul de definiție a lui f şi $y=f(x)$. Punctele (x,y) au coordonatele conectate de ecuația $y=f(x)$.

$$G_f=\{(x,f(x))|x\in D(f)\}$$

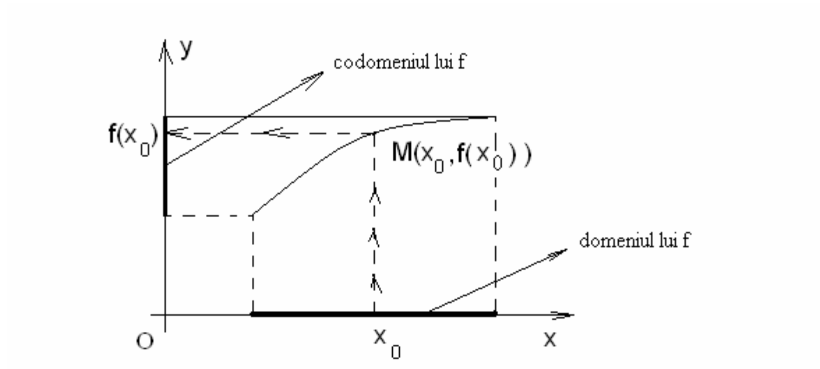

Figura 1.12 Graficul unei funcții $y=f(x)$.

Spunem că o funcție are reprezentare grafică dacă este specificată prin graficul ei.

Observație: Nu toate funcțiile pot fi reprezentate grafic. De exemplu, funcția Dirichlet

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases} \tag{44}$$

nu admite reprezentare grafică.

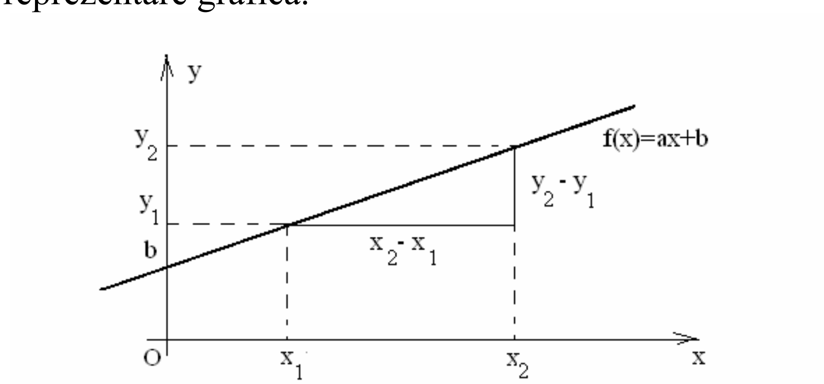

Figura 1.13 $f(x)=ax+b$

Caz particular: Funcția liniară este o funcție definită analitic de formula:

$$f(x) = ax + b \tag{45}$$

în care a şi b sunt constante. Graficul acestei funcții este o dreaptă. Constantele a şi b sunt panta dreptei şi intersecția cu axa Oy (ordonata). Reciproc, orice dreaptă care nu este verticală (paralelă cu axa Oy) este graficul unei funcții liniare. Dacă cunoaştem două puncte de pe dreaptă (x_1, y_1) şi (x_2, y_2), atunci putem calcula panta dreptei:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{46}$$

c) *reprezentare tabelară* O funcție poate fi specificată printr-un tabel. De exemplu, dacă măsurăm temperatura aerului la fiecare oră, timp de 24 de ore, atunci fiecărui moment de timp $t = 0,1,2,\ldots,24$ îi corespunde un număr T. Notăm funcția astfel obținută $T = f(t)$.

t	0	1	2	3	4	5	...	24
T	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4			T_{24}

Exerciții: Să se stabilească domeniul maxim de definiție al funcțiilor:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2}}$

Condiție de existență: $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2} \geq 0$

x	$-\infty$ -1 1 2 3 $+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+ + + + + + + + + + + +0 − − − − − − − − −0 + + + + + +
$x^2 - x - 2$	+ + + + + + + +0 − − − − − − − − −0 + + + + + + + + + +
$\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2}$	+ + + + + + + | − − − −0 + + + | − − − −0 + + + + + +

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup [1, 2) \cup [3, \infty)$$

b) $f(x) = \lg\left[\lg(3 - x) - 1\right]$

Condiții de existență: $3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$

$$\text{şi } \lg(3-x)-1>0 \;\Rightarrow\; \lg(3-x)>\lg 10 \;\Rightarrow\; x<-7$$

$$D(f)=(-\infty,-7)$$

Limite de functii

Conceptul de limită este fundamental în analiza matematică. Limita unei funcții într-un punct este o generalizare a limitei unui şir de numere. In esență, funcția *f* are limita *A* în punctul x_0, dacă pentru orice punct *x* suficient de apropiat de x_0, imaginea lui *x* prin funcția *f*, este suficient de apropiată de *A*. Notam:

$$f(x)\to A \quad \text{atunci când } x\to x_0$$

Exemplu: Dacă $f(x)=x+3$, atunci $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=7$, deoarece dacă înlocuim numere apropiate de 4 în funcție, atunci $f(x)$ va fi aproape de 7.

În cele ce urmează vom da definiția riguroasă a limitei unei funcții într-un punct. Aceasta e greu de digerat, dar după exemple va deveni mai umană.

Definiție: (Cauchy) Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0, cu o posibilă excepție în x_0. Atunci, un număr *A* este limita funcției $f(x)$ în punctul x_0, dacă pentru $\forall\varepsilon>0$, oricât de mic, $\exists\delta>0$ (dependent de ε) astfel încât

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{47}$$

pentru toți *x* cu $|x-x_0|<\delta$ şi $x\neq x_0$.

Notație: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

Cu simboluri logice , definiția limitei poate fi rescrisă:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta(\varepsilon)>0,\ \forall x, x\neq x_0,\ |x-x_0|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-A|<\varepsilon$$

Observații:

- □ În definiția dată apare valoarea absolută. Deoarece $|x-y|$ înseamnă distanța dintre punctele *x* şi *y* pe dreapta reală, $|x-x_0|<\delta$ înseamnă că distanța dintre *x* şi x_0 este mai mică decât δ.

- □ Ce sunt ε şi δ în această definiție? Cantitatea ε ne spune cât de aproape vrem să fie $f(x)$ de limita *A*, iar cantitatea δ ne spune cât de aproape de x_0 trebuie să-l alegem pe *x* ca să obținem acest lucru. Ca să demonstrăm că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, alegem ε şi-l determinăm pe δ.

Exemplu:

$$f(x)=2x+3 \qquad x_0=1 \qquad \lim_{x\to 1} f(x)=5$$

Intr-adevăr, fie $\varepsilon>0$ un număr arbitrar. Inegalitatea din definiție este:

$$|(2x+3)-5|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |2x-2|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2|x-1|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Considerăm $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/2$ şi avem $|x-1|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-5|<\varepsilon$. Asfel, conform definiției, numărul 5 este limita funcției $f(x)=2x+3$ în punctul $x_0=1$**.** Pentru orice $\varepsilon>0$, avem $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/2$ care pentru $|x-1|<\delta$ ne garantează

$$|(2x+3)-5|<\varepsilon .$$

Interpretare geometrică pentru limita unei funcții într-un punct:

Funcția $y=f(x)$ are limita *A* în punctul *x₀* dacă pentru orice bandă orizontală, oricât de îngustă, dintre dreptele $y=A-\varepsilon$ şi $y=A+\varepsilon$, există $\delta>0$ astfel încât graficul lui $y=f(x)$ se află în bandă pentru orice $x\neq x_0$ din $\delta-$vecinătatea lui x_0.

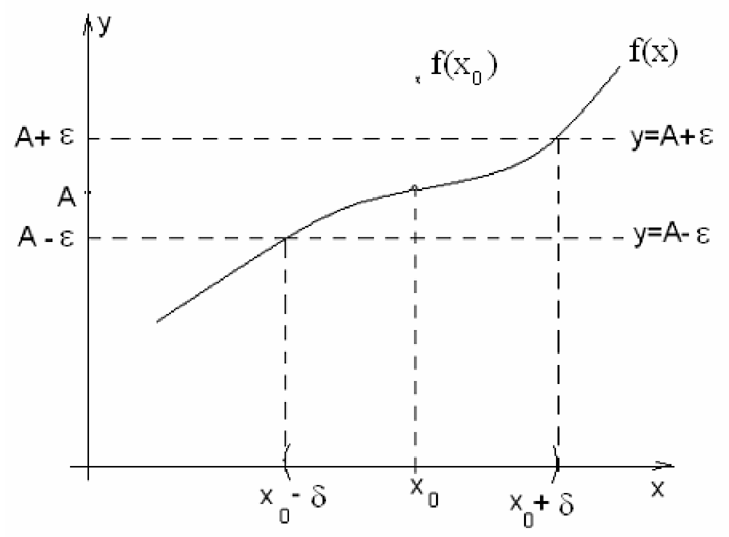

Figura 1.14

Exerciții:

Folosind definiția limitei într-un punct, să se demonstreze că:

- $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) = ?$ a.î. $\forall x, x \neq 0,\ |x-0| < \delta \Rightarrow |f(x)-0| < \varepsilon$

$$|f(x)-0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 - \varepsilon < 0 \Leftrightarrow$$
$$x \in \left(-\sqrt{\varepsilon}, +\sqrt{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}$$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ a.î. $\forall x, x \neq 0,\ |x-0| < \delta \Rightarrow |f(x)-0| < \varepsilon$ deci cu def. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

- $\lim_{x\to \frac{5}{2}} (2x+1) = 6$

$\lim_{x\to \frac{5}{2}} f(x) = 6 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) = ?$ a.î. $\forall x, x \neq \frac{5}{2},\ \left|x - \frac{5}{2}\right| < \delta \Rightarrow |f(x)-6| < \varepsilon$

$|f(x)-6| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x+1-6| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x-5| < \varepsilon \Leftrightarrow 2\left|x-\frac{5}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|x-\frac{5}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ a.î. $\forall x, x \neq \frac{5}{2},\ \left|x-\frac{5}{2}\right| < \delta \Rightarrow |f(x)-6| < \varepsilon$ deci cu definitia $\lim_{x\to \frac{5}{2}} 2x+1 = 6$

Observaţii:

1) In general, valoarea lui δ depinde de ε, adică $\delta = \delta(\varepsilon)$.

2) Atunci când determinăm limita unei funcţii într-un punct x_0 *nu* ţinem cont de ce se întâmplă în punctul x_0.

Limita funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 este independentă de valoarea funcţiei în punctul x_0. Mai mult, funcţia poate să nu fie definită în x_0.

Orice două funcţii egale pe o vecinătate a lui x_0, cu o posibilă excepţie în x_0, unde acestea pot fi diferite sau chiar nedefinite, au aceeaşi limită pentru $x \to x_0$ sau nu au limită.

Numărul limită A furnizează informaţii despre comportarea funcţiei într-o vecinătate a punctului x_0.

Exemple:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x}$

$f(x) = \frac{x}{x} = 1$, $\forall x \neq 0$ şi nu este definită în $x = 0$

Din definiţia limitei funcţiei în punctul $x = 0$, punctul $x = 0$ este exclus.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$, $\quad \forall x \neq 2$ şi nu este definită în $x = 2$

Din definiţia limitei funcţiei în punctul $x = 2$, punctul $x = 2$ este exclus.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+2)}{(x-1)} = 4$

4) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$ unde, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

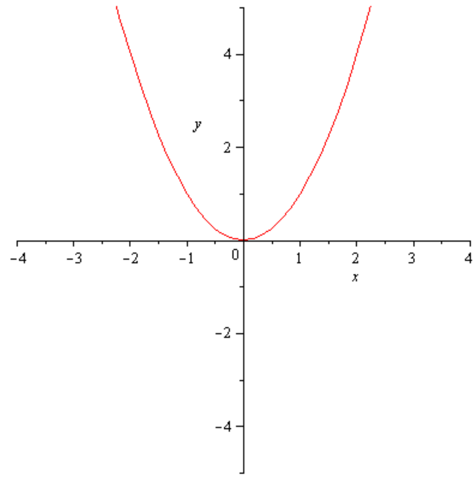

Figura 1.15

Funcția $g(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ este egală cu $f(x)$ peste tot, mai puțin în $x=0$ şi $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=0$$

Dacă funcția conține termeni iraționali, în multe situații raționalizarea se poate realiza printr-o schimbare de variabilă.

Exerciții:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

Facem schimbarea de variabilă $1+x=y^6$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}=\frac{3}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

Facem schimbarea de variabilă $x=y^{12}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^3-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y+1)(y^2+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{(y+1)(y^2+1)}{y^2+y+1}=\frac{4}{3}$$