1.3 Şiruri de numere reale. Limite de şiruri

Teorema 2 (*Unicitatea limitei*)

Dacă limita unui şir $\{a_n\}$ există atunci aceasta este unică.

Demonstrație: Fie *A* o limită a şirului $\{a_n\}$ şi fie $B \neq A$. Pentru a demonstra că *B* nu poate fi limită pentru $\{a_n\}$, considerăm un ε atât de mic încât $\varepsilon-$vecinătatea lui *A* şi $\varepsilon-$vecinătatea lui *B* să nu se intersecteze. De exemplu, putem considera $\varepsilon = |B - A|/3$.

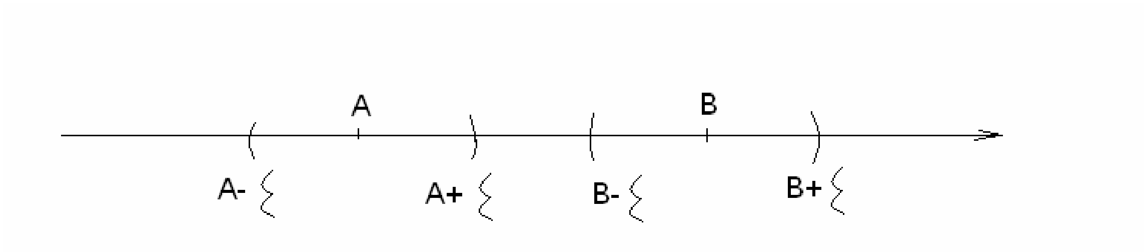

Figura 1.8 Unicitatea limitei

Deoarece $A = \lim_{n\to\infty} a_n$, doar un număr finit de termeni a_n se pot afla în afara intervalului deschis $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Atunci, intervalul deschis $(B-\varepsilon, B+\varepsilon)$ conține cel mult un număr finit de termeni a_n şi deci *B* nu poate să fie limită pentru şirul $\{a_n\}$.

Şiruri mărginite

Un şir $\{a_n\}$ se numeşte:

a) *mărginit superior* dacă există un număr *M* astfel încât $a_n \leq M$, $\forall n$.

b) *mărginit inferior* dacă există un număr *m* astfel încât $a_n \geq m$, $\forall n$.

c) *mărginit* dacă $\{a_n\}$ este mărginit superior şi inferior, adică dacă există numerele *m* şi *M* astfel încât $m \leq a_n \leq M$ pentru $\forall n$.

Observație: Toți termenii unui şir mărginit sunt conținuți în intervalul închis $[m, M]$ de pe dreapta reală.

Exemple: Şirul $\{n\} = 1,2,3,\ldots,n,\ldots$ este mărginit inferior

Şirul $\{a_n\}$ cu $a_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ mărginit deoarece $1 \le a_n \le 2$, $\forall n$.

Altă definiție a mărginirii: un şir $\{a_n\}$este *mărginit* dacă există un număr $K > 0$ astfel încât

$$|a_n| \le K\,,\ \forall n \tag{36}$$

Folosind simboluri logice putem rescrie această definiție:

$$\{a_n\}\text{mărginit} \Leftrightarrow \exists K > 0\,,\ \forall n\ \ |a_n| \le K$$
$$\{a_n\}\text{nemărginit} \Leftrightarrow \forall K > 0\,,\ \exists n\ \ |a_n| > K$$

Exemplu: Arătați că şirul $\{2^n\}$ este nemărginit.

Intr-adevăr, pentru $\forall K > 0$, $\exists n$ astfel încât $2^n > K$, adică $n > \log_2 K$. Atunci, şirul $\{2^n\}$ este nemărginit.

Definiție: Un şir se numeşte *divergent* la ∞ şi scriem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ dacă, pentru orice $M > 0$, oricât de mare, există un număr $N = N(M)$ astfel încât:

$$|a_n| > M\,,\quad \forall n > N$$

Un şir $\{a_n\}$ astfel încât $\forall M > 0$, $\exists N\ \ \forall n > N$, $a_n > M$ ($a_n < -M$) este divergent la $+\infty$ (sau la $-\infty$). In aceste situații scriem :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$$

Teorema 3: Orice şir $\{a_n\}$ convergent este mărginit, adică există numerele *m* şi *M* astfel încât

$$m \le a_n \le M\,,\quad \forall n$$

Demonstrație: Fie $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar. Atunci există *N* astfel încât intervalul deschis $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ să conțină toți termenii a_n cu $n > N$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_N$ sunt singurii termeni ai şirului ce se pot afla în exteriorul intervalului :

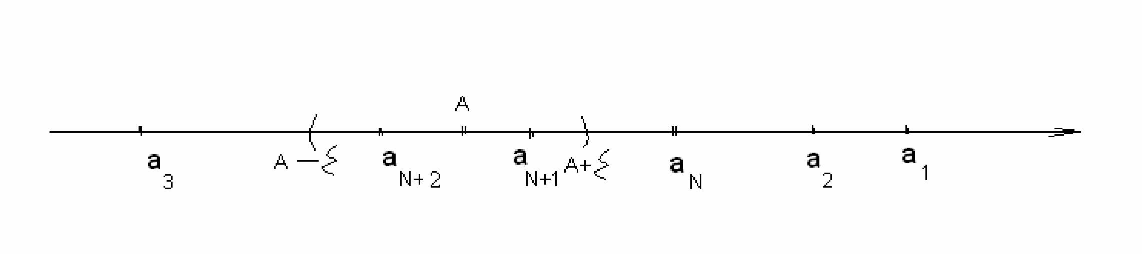

Figura 1.9 Dispunerea termenilor şirului convergent

Astfel, în exteriorul intervalului există doar un număr finit de termeni şi notăm cu $\tilde{a}$ cel mai mic dintre aceştia, iar cu $\hat{a}$ cel mai mare dintre aceştia. Considerăm:

$$m = \min\{\tilde{a}, A-\varepsilon\}$$
$$M = \max\{\hat{a}, A+\varepsilon\}$$

Atunci, intervalul închis $[m, M]$ conţine termenii $a_1, a_2, \ldots, a_N$ şi intervalul deschis $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Deoarece toţi termenii şirului a_n cu $n > N$ sunt în intervalul $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, atunci intervalul închis $[m, M]$ conţine toţi termenii şirului $\{a_n\}$. Rezultă că şirul este mărginit.

Observaţie: Teorema 3 spune că mărginirea este o condiţie necesară pentru convergenţă, însă aceasta nu este şi suficientă.

Exemplu: Şirul

$$1, 0, 1, 0, 1, \ldots \tag{37}$$

este mărginit dar nu este convergent.

Pentru a arăta că şirul dat este divergent presupunem contrariul, adică şirul (37) are limita *A*. Atunci pentru orice ε, de exemplu $\varepsilon = 1/4$, există *N* astfel încât

$$|a_n - A| < \frac{1}{4}, \qquad \forall n > N$$

Adică trebuie să aibă loc

$$|0 - A| = |A| < \frac{1}{4} \quad \text{şi} \quad |1 - A| < \frac{1}{4} \qquad \forall n > N$$

$$\Rightarrow \qquad 1 = |1 - A + A| \le |1 - A| + |A| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{absurd}$$

Presupunerea noastră de convergenţă este falsă. Şirul este divergent.

Operații cu şiruri convergente

Teorema 4: Fie $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ două şiruri convergente la A şi B respectiv, adică

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

Atunci următoarele limite există:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B \tag{38}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B} \quad \text{dacă } b_n \neq 0 \text{ pentru orice } n \text{ şi } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.$$

Demonstrăm prima operație cu limite de şiruri.

Demonstrație: Fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,

$$\exists N_1 \text{ astfel încât } |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_1 \tag{39}$$

Similar, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

$$\exists N_2 \text{ astfel încât } |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_2 \tag{40}$$

Considerăm $N = \max\{N_1, N_2\}$. Atunci pentru $\forall n > N$ are loc:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Astfel, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ a.î. $\forall n > N \Rightarrow |(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon$

Cu definiția limitei, rezultă că $A + B$ este limita şirului $\{a_n + b_n\}$.

- regula produsului

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, şirul este mărginit deci $\exists K > 0$, a.î. $|b_n| \le K$ pentru $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$|a_n \cdot b_n - A \cdot B| = |a_n \cdot b_n - A \cdot b_n + A \cdot b_n - A \cdot B| = |b_n(a_n - A) + A(b_n - B)| \le$$

$$\le |b_n(a_n - A)| + |A(b_n - B)| = |b_n| \cdot |(a_n - A)| + |A| \cdot |(b_n - B)| \le$$

$$\leq K \cdot |a_n - A| + |A| \cdot |b_n - B|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considerăm $\varepsilon > 0$ şi fie $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2K}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2|A|}$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, există N_1 şi N_2 a.î. $|a_n - A| < \varepsilon_1 \quad \forall n > N_1$ şi $|b_n - B| < \varepsilon_2 \quad \forall n > N_2$. Fie $N = \max\{N_1, N_2\}$. Atunci, pentru orice $n > N$ are loc:

$$|a_n \cdot b_n - A \cdot B| < K \cdot \varepsilon_1 + |A| \cdot \varepsilon_2 = K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |A| \cdot \frac{\varepsilon}{2|A|} = \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ a.î. $\forall n > N \Rightarrow |(a_n \cdot b_n) - (A \cdot B)| < \varepsilon$

Cu definiția limitei, rezultă că $A \cdot B$ este limita şirului $\{a_n \cdot b_n\}$.

Exerciții:

□ Fie şirul:

$$a_n = \frac{\alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \ldots + \alpha_k}{\beta_0 n^p + \beta_1 n^{p-1} + \ldots + \beta_p}$$

Să se arate că $$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & k < p \\ \dfrac{\alpha_0}{\beta_0}, & k = p \\ \infty, & k > p \end{cases} \qquad (41)$$

Regula câtului din teorema precedentă nu poate fi aplicată direct pentru că nici numitorul nici numărătorul nu converge la o limită finită. Pentru a ridica nedeterminarea $\dfrac{\infty}{\infty}$ se dă factor comun pe n^k la numărător şi pe n^p la numitor şi se obține:

$$a_n = \frac{n^k\left(\alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{n} + \ldots + \dfrac{\alpha_k}{n^k}\right)}{n^p\left(\beta_0 + \dfrac{\beta_1}{n} + \ldots + \dfrac{\beta_p}{n^p}\right)}$$

Dacă $k = p$, atunci

$$a_n = \frac{\alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{n} + \ldots + \dfrac{\alpha_k}{n^k}}{\beta_0 + \dfrac{\beta_1}{n} + \ldots + \dfrac{\beta_p}{n^p}}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_i}{n^i} = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\beta_i}{n^i} = 0$ rezultă cu regula sumei şi a câtului că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\alpha_0}{\beta_0}$

Dacă $k < p$, atunci:

$$a_n = \frac{1}{n^{p-k}} \cdot \frac{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n^k}}{\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_p}{n^p}}$$

Rezultă cu regula produsului că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \cdot \frac{\alpha_0}{\beta_0} = 0$

Dacă $k > p$, atunci:

$$a_n = n^{k-p} \cdot \frac{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n^k}}{\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_p}{n^p}}$$

Rezultă cu regula produsului că $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \cdot \frac{\alpha_0}{\beta_0} = \infty$

□ Calculați: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-5}{3n^2+4}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-3}{n^3+4n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$

Regula cleştelui: Fie $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ şi $\{c_n\}$ trei şiruri de numere reale care verifică inegalitățile:

$$a_n \le b_n \le c_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dacă $\{a_n\}$ şi $\{c_n\}$ sunt convergente la acelaşi număr *A*, atunci şi $\{b_n\}$ este convergent la aceeaşi limită *A*.

Arătați că $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = 0$

Fie $a_n = -\frac{1}{n^2}$, $b_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$ şi $c_n = \frac{1}{n^2}$. Întrucât $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ şi $a_n \le b_n \le c_n$, aplicând regula cleştelui $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

□ Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

$$0 < \frac{n}{2^n} = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1+n+\frac{(n-1)n}{2}+\ldots+1} < \frac{n}{\frac{(n-1)n}{2}} = \frac{2}{n-1}$$

$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$ Cum $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n-1} = 0 \overset{R.c.}{\Rightarrow}$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

□ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n!} = 0$,

$$0 < \frac{n^2}{n!} = \frac{n^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n} < \frac{n^2}{(n-2)(n-1)n}$$

$$0 < \frac{n^2}{n!} < \frac{n^2}{(n-2)(n-1)n} \qquad \text{Cum } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n-2)(n-1)n} = 0 \overset{R.c.}{\Rightarrow} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$$

□ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n} < \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 3\cdot 3\cdot 3} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$0 < \frac{2^n}{n!} < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \qquad \text{Cum } \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 0 \overset{R.c.}{\Rightarrow} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

□ Calculați limitele şirurilor cu termenul general:

$$a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \qquad\qquad a_n = \frac{3^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, \frac{n+1-n}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + 1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 1\right)}{5^{n+1}\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1} + 1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\, \frac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 1}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{5}$$

Bibliografie :

1.M.Krasnov, A.Kiselev, G.Makarenko, E.Shikin, *Mathematical Analysis for Engineers* (MIR, Moscow 1989).

2. Aramă, T.Morozan, Culegere de probleme de calcul diferențial şi integral (Ed. Tehnică 1964).