1.2 *Numere reale*

Valori absolute pentru numere reale

Dreapta reală

Numerele reale pot fi reprezentate şi cu ajutorul *dreptei reale*. Considerăm o dreaptă, pentru care fixăm direcția, originea O şi distanța unitate e.

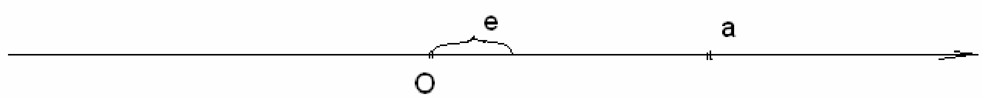

Figura 1.5 Dreapta reală

Fiecărui număr real $\pm a$ $(a > 0)$ i se asociază un punct pe dreaptă aflat la distanța a de origine, în dreapta sau în stânga lui O, funcție de semnul $+$ sau semnul $-$ din fața lui a. Desigur, numărului $a = 0$ i se asociază punctul arbitrar origine.

Definiție: Dreapta a cărui puncte sunt în corespondență unu-la-unu cu elementele mulțimii numerelor reale se numeşte *dreapă reală*.

Fie a şi b două numere reale (puncte) care satisfac inegalitatea $a < b$. Cu ajutorul lor putem defini următoarele mulțimi numite *intervale*:

$[a,b]$ toate numerele reale x astfel încât $a \le x \le b$ interval închis.
(a,b) toate numerele reale x astfel încât $a < x < b$ interval deschis.
$[a,b)$ toate numerele x reale astfel încât $a \le x < b$ interval semideschis.
$(a,b]$ toate numerele x reale astfel încât $a < x \le b$ interval semideschis.

şi intervalele infinite:

$(a,+\infty)$ mulțimea numerelor reale x cu $x > a$
$[a,+\infty)$ mulțimea numerelor reale x cu $x \ge a$
$(-\infty,b)$ mulțimea numerelor reale x cu $x < b$
$(-\infty,b]$ mulțimea numerelor reale x cu $x \le b$

$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Exerciții: $|x-1|\le 0.01$, $|x+2|\ge 3$, $\frac{1}{2}\le|x|\le 4$, $|x-1|+|x|>1$

Vecinătăți

Fie x_0 un punct pe dreapta reală şi $\delta>0$ un număr real. O multime V este *vecinatate* pentru x_0 daca exista $\varepsilon>0$ astfel incat $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subset V$.

Intervalul $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, simetric relativ la x_0 se numeşte $\delta-$vecinătate pentru x_0 .

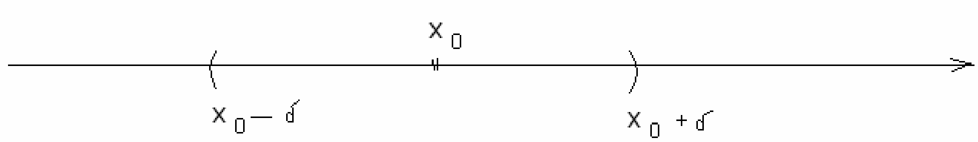

Figura 1.6 δ-vecinătate

$\delta-$vecinătatea lui x_0 este mulțimea numerelor reale x care satisfac inegalitatea $|x-x_0|<\delta$ sau echivalent $x_0-\delta<x<x_0+\delta$.

Mulțimi mărginite şi nemărginite

Fie E o mulțime de numere reale. Mulțimea E se numeşte:

a) *mărginită superior* dacă există un număr b astfel încât $x\le b,\forall x\in E$
b) *mărginită inferior* dacă există un număr a astfel încât $a\le x,\forall x\in E$
c) *mărginită* dacă E este mărginită superior şi inferior, adică dacă există a şi b astfel încât $a\le x\le b,\forall x\in E$. Mai mult, mulțimea E este mărginită dacă E este conținută în intervalul închis $[a,b]$.

Exemple:

$E=(-\infty,1]$ este mărginită superior
$\mathbb{N}$ mulțimea numerelor naturale este mărginită inferior
O mulțime care nu este mărginită superior (inferior) se numeşte *nemărginită superior* (*inferior*) .

Exemplu: $\mathbb{N}$ este nemărginită superior.

Supremum şi Infimum

Fie E o mulțime de numere reale mărginită superior, adică există un număr b astfel încât $x \le b, \forall x \in E$. Numărul b se numeşte *majorant* pentru E. Orice număr mai mare decât b este şi el majorant pentru E.

Definiție: Numărul M se numeşte *supremum* pentru E dacă au loc:

(i) $\forall x \in E, x \le M$

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, oricât de mic, există un număr $x^* \in E$ astfel încât $M - \varepsilon < x^* \le M$.

Cu alte cuvinte, supremum pentru mulțimea E este cel mai mic majorant al mulțimii E. Notăm $M = \sup E$. Dacă E este nemărginită superior, $\sup E = +\infty$.

Fie E o mulțime de numere reale mărginită inferior, adică există un număr a astfel încât $a \le x, \forall x \in E$. Numărul a se numeşte *minorant* pentru E. Orice număr mai mic decât a este şi el minorant pentru E.

Definiție: Numărul m se numeşte *infimum* pentru E dacă au loc:

(i) $\forall x \in E, x \ge m$

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, oricât de mic, există un număr $x^* \in E$ astfel încât $m \le x^* < m + \varepsilon$.

Cu alte cuvinte, infimum pentru mulțimea E este cel mai mare minorant al mulțimii E. Notăm $m = \inf E$. Dacă E este nemărginită inferior, $\inf E = -\infty$.

Exemple: $E = [a,b] \Rightarrow \quad \inf E = a \quad \sup E = b$

$E = (a,b) \Rightarrow \quad \inf E = a \quad \sup E = b$

Observație: Supremum şi infimum aparțin mulțimii în primul exemplu şi nu aparțin mulțimii în al doilea exemplu.

Exemplu:

$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} \qquad \inf E = 0 \qquad \sup E = 1$$

Teoremă: Orice mulțime nevidă de numere reale care este mărginită superior are supremum şi orice mulțime nevidă de numere reale care este mărginită inferior are infimum.

1.3 Şiruri de numere reale. Limite de şiruri

Fie o lege de corespondență care asociază la fiecare număr natural $n = 1,2,\ldots$ un număr real a_n. In acest mod am definit un şir de numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sau pe scurt un şir $\{a_n\}$. Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se numesc termenii şirului.

Exemple:

(i) $\{n\} = 1,2,3,\ldots,n,\ldots$

(ii) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

(iii) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots$

(iv) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$ (29)

Definiție: Un număr A se numeşte limita şirului $\{a_n\}$ dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr natural N (dependent de ε) astfel încât inegalitatea:

$$|a_n - A| < \varepsilon \tag{30}$$

are loc pentru $\forall n > N$.

Notație: $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ sau $a_n \underset{n\to\infty}{\to} A$ şi spunem că şirul $\{a_n\}$ converge la A.

Folosind simboluri logice putem rescrie definiția limitei astfel:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon \tag{31}$$

Noțiunea de limită este uşor de interpretat geometric, dacă aşezăm termenii şirului $\{a_n\}$ pe dreapta reală:

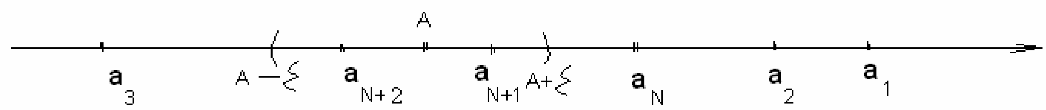

Figura 1.7 Interpretare geometrică pentru convergența unui şir.

Inegalitatea $|a_n - A| < \varepsilon$ este echivalentă cu inegalitățile $A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$, adică termenii şirului se află în $\varepsilon-$vecinătatea lui *A*. Cu alte cuvinte, *A* este limita şirului $\{a_n\}$ dacă, pentru orice $\varepsilon-$vecinătate a lui A, există un număr natural *N* astfel încât toți termenii şirului a_n cu $n > N$ sunt conținuți în această orice $\varepsilon-$vecinătate a lui A, adică în intervalul deschis $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. De observat că numărul finit de termeni $a_1, a_2, \ldots, a_N$ se pot afla în afara intervalului $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, aceştia necontând la stabilirea convergenței.

Şirul care are toți termenii egali cu numărul *A* se numeşte *şir staționar* şi are limita *A*.

Un şir se numeşte **convergent** dacă are limită finită şi este **divergent** în caz contrar.

Exemplu: Fie şirul $\{a_n\}$ cu termenul $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. Desigur, pentru valori mari ale lui *n* fracția se apropie de numărul unu.

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \tag{32}$$

Atunci putem presupune că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \tag{33}$$

Pentru a demonstra această limită, considerăm un $\varepsilon > 0$ arbitrar şi arătăm că $\exists N$ astfel încât $\forall n > N$ să avem

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{34}$$

Din inegalitatea $\frac{1}{n} < \varepsilon$ obținem $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Atunci, pentru orice număr natural N care excede pe $\frac{1}{\varepsilon}$ şi pentru toți $n > N$ are loc $\frac{1}{n} < \varepsilon$, adică relatia (34) este adevărată. Conform definiției limitei, avem $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Observație: In general numărul *N* este dependent de ε, adică $N = N(\varepsilon)$. In exemplul precedent, dacă $\varepsilon = 0.1$, putem considera $N = 10$ sau cu orice număr mai mare decît 10. Dacă $\varepsilon = 0.01$, atunci $N = 100$ sau cu un număr mai mare decât 100.
Numărul *N* din definiția limitei nu este definit în mod unic de către ε, în sensul că dacă inegalitatea din definiție are loc pentru $n > N_1$ atunci ea are loc şi pentru toți $n > N_2$ cu $N_2 > N_1$. In demonstrarea convergenței unui şir este suficient să alegem un număr *N* astfel încât $|a_n - A| < \varepsilon$ pentru orice $n > N$. Nu este necesar să-l determinăm pe cel mai mic *N* care satisface această condiție.

Exerciții:

□ Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = \frac{n+1}{5n+2}$ are limita $\frac{1}{5}$.

Trebuie să arătăm că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon)$ a.î. să aibă loc inegalitatea $\left|a_n - \frac{1}{5}\right| < \varepsilon$ pentru $\forall n > N(\varepsilon)$. În acest sens prelucrăm modulul din inegalitate şi apoi rezolvăm inegalitatea în *n*.

$$\left|a_n - \frac{1}{5}\right| = \left|\frac{n+1}{5n+2} - \frac{1}{5}\right| = \frac{3}{5(5n+2)}$$

$$\frac{3}{5(5n+2)} < \varepsilon \qquad \frac{3}{5\varepsilon} < 5n+2 \qquad n > \frac{3}{25\varepsilon} - \frac{2}{5}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = \left[\frac{3}{25\varepsilon} - \frac{2}{5}\right],\ \text{a.i. } \forall n > N \Rightarrow \left|a_n - \frac{1}{5}\right| < \varepsilon \overset{def}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{5}$$

□ Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = \frac{n^2}{2n^2+2}$ are limita $\frac{1}{2}$. Să se determine rangurile de la care începând toți termenii şirului diferă de $\frac{1}{2}$ cu mai puțin de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$.

Trebuie să arătăm că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon)$ a.î. să aibă loc inegalitatea $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ pentru $\forall n > N(\varepsilon)$. În acest sens prelucrăm modulul din inegalitate şi apoi rezolvăm inegalitatea în *n*.

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n^2}{2n^2+2} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n^2 - n^2 - 1}{2n^2+2}\right| = \frac{1}{2n^2+2}$$

$$\frac{1}{2n^2+2} < \varepsilon \qquad 2n^2 + 2 > \frac{1}{\varepsilon} \qquad n^2 - \left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right) > 0 \quad n > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon} - 1}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = \left[\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon} - 1}\right],\ \text{a.i. } \forall n > N \Rightarrow \left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \overset{def}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

Dacă $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $N(\varepsilon) = \left[\sqrt{5-1}\right] = 2 \ \Rightarrow$ termenii $a_3, a_4, \ldots$ diferă de limita $\frac{1}{2}$ cu mai puțin de $\frac{1}{10}$.

Dacă $\varepsilon = \frac{1}{100}$, $N(\varepsilon) = \left[\sqrt{50-1}\right] = 7 \ \Rightarrow$ termenii $a_8, a_9, \ldots$ diferă de limita $\frac{1}{2}$ cu mai puțin de $\frac{1}{100}$.

□ Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^3+1} = 0$

Trebuie să arătăm că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon)$ a.î. să aibă loc inegalitatea $|a_n - 0| < \varepsilon$ pentru $\forall n > N(\varepsilon)$.

$$|a_n - 0| = \left|\frac{3n^2}{n^3+1}\right| = \frac{3n^2}{n^3+1} = \frac{3n^2}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{3}{n\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} < \frac{3}{n}$$

$$\frac{3}{n} < \varepsilon \qquad n > \frac{3}{\varepsilon}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = \left[\frac{3}{\varepsilon}\right],\ \text{a.i. } \forall n > N \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon \overset{def}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

□ Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-2)^n}{3^n} = 0$

Trebuie să arătăm că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon)$ a.î. să aibă loc inegalitatea $|a_n - 0| < \varepsilon$ pentru $\forall n > N(\varepsilon)$.

$$\left|\frac{2^n + (-2)^n}{3^n} - 0\right| = \frac{\left|2^n + (-2)^n\right|}{\left|3^n\right|} = \frac{\left|2^n + (-2)^n\right|}{3^n} \le \frac{\left|2^n\right| + \left|(-2)^n\right|}{3^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$2\left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \lg\left(\frac{2}{3}\right)^n < \lg\frac{\varepsilon}{2} \qquad n\lg\left(\frac{2}{3}\right) < \lg\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$n > \frac{\lg\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\lg\left(\frac{2}{3}\right)} \quad \Rightarrow \quad N(\varepsilon) = \left[\frac{\lg\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\lg\left(\frac{2}{3}\right)}\right]$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) = \left[\frac{\lg\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\lg\left(\frac{2}{3}\right)}\right],\ \text{a.i. } \forall n > N \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon \overset{def}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Teorema 1 (*Criteriul de convergență Cauchy*)
Pentru ca şirul $\{a_n\}$ să fie convergent este necesar şi suficient ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe numărul natural *N* astfel încât $\forall n > N$, $\forall m > N$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \tag{35}$$

Un şir care satisface enunţul acestei teoreme se numeşte *şir Cauchy*.

Altă formulare pentru criteriul Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \text{ a.i. } \forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N} \text{ avem } \left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon \tag{35b}$$

Exerciții:

□ Să se demonstreze convergența pentru şirurile:

1. $a_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{3^n}$

Vom utiliza criteriul Cauchy în formularea (35b), adică arătăm că:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \text{ a.i. } \forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N} \text{ avem } \left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$$

Cum $a_{n+p} = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{3^n} + \frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}}$

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|\frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)x}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}}\right| + \left|\frac{\cos(n+2)x}{3^{n+2}}\right| + \ldots + \left|\frac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{p-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^p}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^p\right) < \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3^n} < \varepsilon \qquad 3^n > \frac{1}{2\varepsilon} \qquad n \lg 3 > \lg \frac{1}{2\varepsilon} \qquad n > \frac{\lg \frac{1}{2\varepsilon}}{\lg 3}$$

În concluzie, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) = \left[\frac{\lg \frac{1}{2\varepsilon}}{\lg 3}\right]$ a.i. $\forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N}$ avem $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$, deci cu criteriul Cauchy şirul este convergent.

2. $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

Vom utiliza criteriul Cauchy, adică arătăm că:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \text{ a.i. } \forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N} \text{ avem } \left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$$

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

Dar,

$$\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+2)^2} = \frac{1}{(n+2)(n+2)} < \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$\ldots$

$$\frac{1}{(n+p)^2} = \frac{1}{(n+p)(n+p)} < \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}$$

Adunăm aceste relații şi obținem:

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$

Rezolvăm inegalitatea cu ε:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Rezultă că $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ a.i. $\forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N}$ avem $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$. Atunci, cu criteriul Cauchy, şirul este convergent.

□ Să se arate că şirul următor este divergent:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Arătăm că nu este satisfăcut criteriul Cauchy pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$ şi $p = n$. Într-adevăr ar trebui să existe un $N(\varepsilon)$ a.î. $\forall n > N(\varepsilon)$ să avem:

$$|a_{2n} - a_n| < \frac{1}{2}$$

Dar, $$|a_{2n} - a_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} >$$
$$> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Atunci şirul este divergent.

Bibliografie

1.M.Krasnov, A.Kiselev, G.Makarenko, E.Shikin, *Mathematical Analysis for Engineers* (MIR, Moscow 1989).

2.Elemente de analiza matematica, clasa a XI-a, Mircea Ganga, Editura Mathpress 2005.

3.Matematica M1. Manual pentru clasa a XI-a, Marcel Tena, Dinu Serbanescu, Marian Andronache, Editura Art, 2010