Exemplu de calcul al integralei definite cu definitia:

$f(x) = x^2$ o integram pe intervalul $[0,b]$

Consideram partitia:

$$0 = x_0 < x_1 = \frac{b}{n} < x_2 = \frac{2b}{n} < \ldots < x_{k-1} = \frac{(k-1)b}{n} < x_k = \frac{kb}{n} \ldots < x_n = b$$

Si punctele intermediare:

$$\xi_1 = \frac{b}{n},\ \xi_2 = \frac{2b}{n}\ \ldots\ \xi_k = \frac{kb}{n} \ldots\ \xi_n = \frac{nb}{n} = b$$

$$\int_0^b x^2 dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \zeta_k^2 \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{kb}{n}\right)^2 \left(\frac{b}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n} + \left(\frac{2b}{n}\right)^2 \frac{b}{n} + \ldots \left(\frac{nb}{n}\right)^2 \frac{b}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{n}\right)^3 \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = b^3 \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{b^3}{3}$$

Teorema de medie: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$. Atunci, există cel puțin un punct $c \in [a,b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c),\ \ c \in [a,b] \tag{13}$$

Interpretare geometrică:

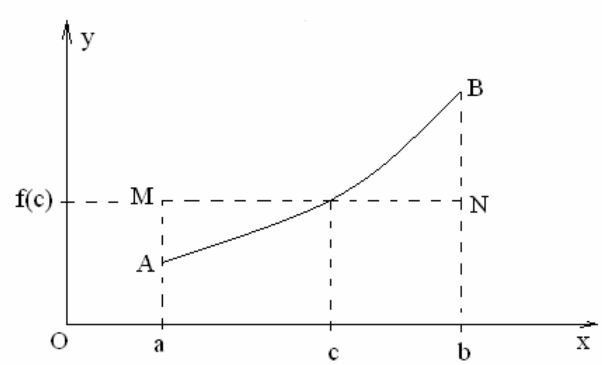

Figura 4.3

Pe graficul funcției continue $y = f(x)$, există punctul $C(c, f(c))$, astfel încât ariile $ABba$ şi $MNba$ sunt egale.

Numărul $M\left(f\left(x\right)\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx$ se numeşte *valoare medie* a funcției $f\left(x\right)$ pe $\left[a,b\right]$.

Exemplu: Calculați valoarea medie a funcției $f\left(x\right) = \sin x$ pe $\left[0,\pi\right]$.

$$M\left(\sin x\right) = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi}\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = \frac{2}{\pi}$$

Fie $f\left(x\right)$ o funcție continuă pe un interval închis $\left[a,b\right]$. Integrala definită nu depinde de variabila de integrare:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \int_a^b f\left(t\right)dt$$

Considerăm un punct arbitrar $x \in \left[a,b\right]$ şi construim o nouă funcție:

$$F\left(x\right) = \int_a^x f\left(t\right)dt \tag{14}$$

Aceasta este definită $\forall x \in \left[a,b\right]$, deoarece dacă există integrala lui $f\left(x\right)$ pe $\left[a,b\right]$, există şi integrala lui $f\left(x\right)$ pe $\left[a,x\right]$ pentru $\forall x \in \left[a,b\right]$.

Prima teoremă fundamentală de calcul: Fie $f\left(x\right)$ o funcție continuă pe un interval închis $\left[a,b\right]$. Atunci, funcția $F\left(x\right) = \int_a^x f\left(t\right)dt$ este derivabilă în orice punct $x \in \left[a,b\right]$ şi $F'\left(x\right) = f\left(x\right)$. Cu alte cuvinte, derivata integralei definite în raport cu limita sa superioară este egală cu valoarea integrandului în punctul limită superioară a integralei.

$$\left(\int_a^x f\left(t\right)dt\right)' = f\left(x\right), \quad \forall x \in \left[a,b\right] \tag{15}$$

Demonstrație: Fie $\Delta x \neq 0$, astfel încât $x + \Delta x \in \left[a,b\right]$. Creşterea corespunzătoare a funcției este:

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_x^a f(t)\,dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \overset{\text{teorema de medie}}{=} (x+\Delta x - x)\, f(x+\theta\Delta x)$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x+\theta\Delta x), \quad \theta \in [0,1]$$

$F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta x} = f(x)$ datorită continuităţii lui $f(x)$.

Exemple:

$$\left(\int_1^x \ln t\,dt\right)' = \ln x$$

Exemple de functii interesante:

- □ Functia eroare din statistica:

$$erf(x) \overset{def}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$$\lim_{x\to\infty} erf(x) = 1$$

- □ Functiile Fresnel din optica:

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(t^2\right) dt$$

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(t^2\right) dt$$

$$C'(x) = \cos\left(x^2\right)$$

A doua teoremă fundamentală de calcul: Fie $f(x)$ o funcţie continuă pe un interval închis $[a,b]$. Atunci, $f(x)$ are o primitivă pe $[a,b]$ şi în consecinţă $f(x)$ are integrală nedefinită.

Demonstraţie: Deoarece $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$, există funcţia $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x \in [a,b]$, cu $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Deci, $F(x)$ este o primitivă a lui $f(x)$ pe $[a,b]$. Integrala nedefinită a funcţiei $f(x)$ pe $[a,b]$ poate fi reprezentată în forma:

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C \qquad (16)$$

Teorema Newton-Leibniz: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$ şi fie $F(x)$ o primitivă a lui $f(x)$ pe $[a,b]$, atunci:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (17)$$

Demonstrație:

$$\text{Fie } \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b]$$

$\Phi(x)$ este o primitivă pentru $f(x) \Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \quad \forall x \in [a,b]$$

$$x = a \Rightarrow \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a),$$

$$x = b \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

$$t \to x \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Exemple:

$$\int_2^4 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_2^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 6$$

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$$

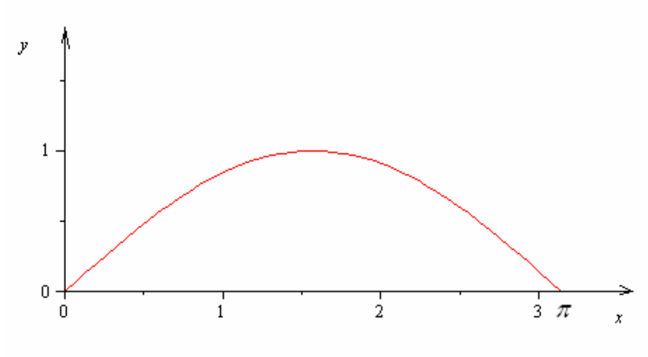

Figura 4.4 $f(x)=\sin x$

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = 0$$

Observaţie: Integrala reprezintă suma ariilor de sub curbă, deasupra axei *Ox*, minus ariile de sub axa *Ox*.

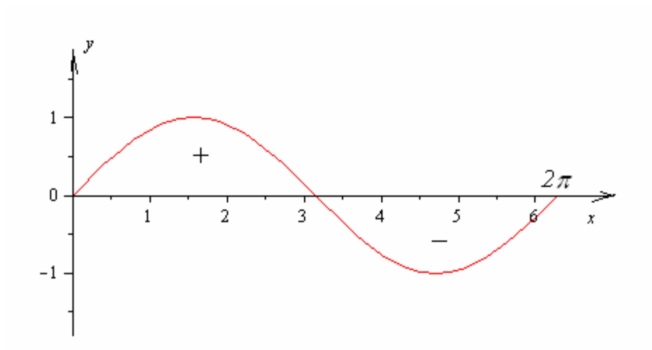

Figura 6.5 $f(x)=\sin x$

Integrarea prin substituţie

Considerăm integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ în care $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$ şi fie $x=\varphi(t)$. Presupunem că $\varphi(t)$ satisface condiţiile:

- □ $\varphi(t)$ ia valori între *a* şi *b* atunci când *t* variază pe $[\alpha,\beta]$ a.î. $\varphi(\alpha)=a$ şi $\varphi(\beta)=b$.
- □ $\varphi'(t)$ este continuă pe $[\alpha,\beta]$.

Atunci:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt \tag{18}$$

Exemple:

1) $$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,, \quad a>0$$

$$x = a\sin t$$
$$dx = a\cos t dt$$

$$0 = a\sin t \quad \Rightarrow \quad t=0$$
$$a = a\sin t \quad \Rightarrow \quad t=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\; dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\; dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\; dt$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right) = \frac{\pi a^2}{4}$$

2) $$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$$

$$x = e^t$$
$$dx = e^t dt$$

$$1 = e^t \quad \Rightarrow \quad t=0$$
$$e = e^t \quad \Rightarrow \quad t=1$$

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_0^1 \frac{t^2}{e^t}e^t dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Uneori este convenabil să folosim substituția $t=\psi\left(x\right)$ în loc de $x=\varphi(t)$.

3) $$\int_0^1 \left(2x^3-1\right)\sqrt{x^4-2x+1}\; dx$$

$$t = x^4-2x+1$$
$$dt = \left(4x^3-2\right)dx = 2\left(2x^3-1\right)dx$$

$$\int_0^1 \left(2x^3-1\right)\sqrt{x^4-2x+1}\; dx = \frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^0 = -\frac{1}{3}$$

Observație: Fie $f(x)$ o funcție integrabilă pe un interval închis simetric $[-a,a]$ cu $a>0$.
Atunci:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{daca } f(x) \text{ este para} \\ 0\,, & \text{daca } f(x) \text{ este impara} \end{cases}$$

Exemplu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\, e^{\cos x} dx = 0 \quad \text{deoarece integrandul este funcție impară}$$

Integrarea prin părți

Fie funcțiile $u(x)$ şi $v(x)$ cu derivate $u'(x)$ şi $v'(x)$ continue pe $[a,b]$. Atunci are loc:

$$\int_a^b u\ dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\ du \tag{19}$$

Exemple:

1) $\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x\ dx$

$$u = \pi - x \qquad dv = \sin x\ dx$$
$$du = -dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x\ dx = -(\pi - x)\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x\ dx = -(\pi - x)\cos x\Big|_0^{\pi} - \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

2) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

$$u = \ln x \qquad dv = \frac{dx}{x^2}$$
$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = -\frac{1}{x}$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e - \frac{1}{x}\Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

Integrale improprii

Până acum domeniul de integrare al unei funcții era un interval mărginit. Anumite aplicații din fizică duc la integrarea unor funcții pe domenii nemărginite.

Definiție: O *integrală improprie,* definită prin

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{20}$$

se spune că este convergentă dacă limita există şi divergentă dacă limita nu există.

Exemple

1) Integrala improprie $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ converge şi este egală cu $\frac{\pi}{2}$.

Într-adevăr, $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} arctg\ x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} arctg\ b = \frac{\pi}{2}$

2) Integrala improprie $\int_0^{+\infty}\cos x\ dx$ este divergentă.

Într-adevăr,

$$\int_0^{+\infty}\cos x\ dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \cos x\ dx = \lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\sin b$$ limită ce nu există.