Cap IV Calcul integral

4.1 Integrala nedefinită

Definiție: O funcție $F(x)$ este o *primitivă* a funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b), dacă $F(x)$ este diferențiabilă în oricare punct din (a,b) și $F'(x)=f(x)$ sau echivalent $dF(x)=f(x)dx$, $\forall x\in(a,b)$.

Exemple:

1) $F(x)=\arcsin x$ este o primitivă a funcției

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pe intervalul } (-1,+1).$$

Intr-adevăr,

$$F'(x)=(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $F(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$ este o primitivă a funcției

$$f(x)=a^x \text{ pe intervalul } (-\infty,+\infty).$$

Intr-adevăr,

$$F'(x)=\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{a^x \ln a}{\ln a}=a^x$$

Dacă $F(x)$ este o *primitivă* a funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b), atunci și $\Phi(x)=F(x)+C$ este o *primitivă* a funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b).

Definiție: Mulțimea tuturor primitivelor unei funcții $f(x)$ pe (a,b) se numește *integrala nedefinită* a funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b) și se notează:

$$\int \underbrace{f(x)dx}_{element\ de\ integrare} \quad \text{cu } x = \text{variabilă de integrare.}$$

Dacă $F(x)$ este una din primitivele funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b), atunci:

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \quad C= \text{ constantă}$$

Observație: Dacă $f(x)$ este o funcție *continuă* pe intervalul (a,b), atunci funcția *admite primitive* pe intervalul (a,b) şi în consecință are integrală nedefinită pe (a,b).

Proprietățile integralei nedefinite:

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

Intr-adevăr, $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

Intr-adevăr, relația are loc dacă avem în vedere definiția diferențialei.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$

Intr-adevăr, $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$

4. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, $\quad A =$ ct. $\quad A \neq 0$

5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

6. $\int \left(\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \int f_k(x)dx$, $\quad A_k =$ ct.

Integralele nedefinite ale funcțiilor elementare

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\qquad \alpha \neq -1$, $x > 0$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $\qquad x \neq 0$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$

$\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\ x + C$, $x \neq n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\ x + C$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $x \in (-1, +1)$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$, $x \in (-a, +a)$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, semnul **(-)** cere $|x| > |a|$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctg\ x + C$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$, $a \neq 0$

13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a \neq 0$

Observație: Operațiile de diferențiere şi integrare sunt diferite. Subliniem că diferențiind funcții elementare totdeauna obținem funcții elementare, în timp ce integrand funcții elementare nu vom putea reprezenta totdeauna integralele nedefinite ale acestora în mulțimea funcțiilor elementare. De exemplu, integralele următoare nu pot fi reprezentate în mulțimea funcțiilor elementare deşi datorită continuității funcțiilor de sub integrală, aceste integrale nedefinite există.

$$\int e^{-x^2}dx \qquad \int \sin x^2 dx \qquad \int \cos x^2 dx$$

$$\int \frac{sinx}{x}dx\,,\ \ x\neq 0 \qquad \int \frac{cosx}{x}dx\,,\ \ x\neq 0 \qquad \int \frac{dx}{\ln x}\,,\ \ x>0\,,\ \ x\neq 1$$

a) Integrale care se reduc la integrarea funcțiilor elementare

Exemple:

1) $\int\left(\sqrt{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)^2 dx=\int\left(x^3-2+\frac{1}{x^3}\right)dx=\frac{x^4}{4}-2x+\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{x^4}{4}-2x-\frac{1}{2x^2}+C$

2) $\int\frac{(1+x)^2}{x^3+x}dx=\int\frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{(1+x^2)+2x}{x(1+x^2)}dx=$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{1}{1+x^2}dx=\ln|x|+2arctg\ x+C$$

3) $\int\frac{2\cdot 3^x+3\cdot 2^x}{5^x}dx=\int\left(2\left(\frac{3}{5}\right)^x+3\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)dx=2\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}+3\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+C$

b) Metoda substituției

Calculăm integrala nedefinită $\int f(x)dx$ a unei funcții continue $f(x)$. Presupunem că există o funcție $x=\varphi(t)$ cu derivată continuă $\varphi'(t)$ şi funcție inversă $t=\psi(x)$. Atunci putem să scriem:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Desigur, substituind în rezultatul acestei integrale în variabila *t*, pe *t* cu $t=\psi(x)$, obținem rezultatul în variabila inițială x.

Exemplu:

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$$

Considerăm: $x = t^2 - 1$
$dx = 2t\ dt$

$t = \sqrt{x+1}$

Atunci,

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = \int \frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctg\ t + C$$

Cu substituția $t = \sqrt{x+1}$, obținem:

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = 2arctg\ \sqrt{x+1} + C$$

Observație: Presupunem că în integrala $\int f(x)dx$ elementul de integrare $f(x)dx$ admite o reprezentare de forma:

$$f(x)dx = g\left[\psi(x)\right]\psi'(x)dx$$

$$f(x)dx = g\left[\psi(x)\right]d\left[\psi(x)\right]$$

Dacă $g(t)$ este uşor integrabilă, atunci

$$\int g(t)dt = F(t) + C = F\left(\psi(x)\right) + C$$

Exemple:

1) $\int \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} dx$

Considerăm $t = 2^x + 2^{-x}$, $t > 0$

$$dt = \left(2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2\right)dx$$

$$\int \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} dx = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln 2} \ln t + C = \frac{\ln\left(2^x + 2^{-x}\right)}{\ln 2} + C$$

2) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

Considerăm $t = \sqrt{e^x + 1}$ $\qquad e^x = t^2 - 1$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{e^x + 1}} e^x dx$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \int e^x \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \int \left(t^2 - 1\right) 2dt = 2\int \left(t^2 - 1\right) dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C = \frac{2}{3}\left(e^x + 1\right)^{3/2} - 2\sqrt{e^x + 1} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{e^x + 1}\left(e^x + 1 - 3\right) + C = \frac{2}{3}\left(e^x - 2\right)\sqrt{e^x + 1} + C$$

c) Integrarea prin părți

Fie funcțiile $u(x)$ şi $v(x)$ cu derivate $u'(x)$ şi $v'(x)$ continue. Atunci are loc:

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx + C$$

sau

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du + C$$

deoarece $v'(x) dx = dv$ şi $u'(x) dx = du$.

Exemple:

1) $\int (2 - 3x)\cos x \, dx$

$$u = 2 - 3x \qquad dv = \cos x \, dx$$
$$du = -3 \, dx \qquad v = \sin x$$

$$\int (2 - 3x)\cos x \, dx = (2 - 3x)\sin x + \int 3\sin x \, dx = (2 - 3x)\sin x - 3\cos x + C$$

2) $\int \ln x \, dx$

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad\qquad v = x$$

$$\int \ln x \; dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

3) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,,\quad |x| < |a|$

Considerăm $\quad u = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad\qquad dv = dx$

$$du = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \qquad\qquad v = x$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - \left(a^2 - x^2\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + C$$

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

4) $\int x^2 2^x\,dx$

$$u = x^2 \qquad\qquad dv = 2^x dx$$

$$du = 2x\;dx \qquad\qquad v = \frac{2^x}{\ln 2}$$

$$\int x^2 2^x\,dx = \frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\int x2^x\,dx$$

$$u = x \qquad\qquad dv = 2^x dx$$

$$du = dx \qquad\qquad v = \frac{2^x}{\ln 2}$$

$$\int x^2 2^x\,dx = \frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left(\frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,dx\right)$$

$$=\frac{x^2\cdot 2^x}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}\left(\frac{x\cdot 2^x}{\ln 2}-\frac{2^x}{(\ln 2)^2}\right)+C$$

5) $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$, $\quad \alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$

Considerăm $\quad u=e^{\alpha x} \qquad dv=\cos\beta x\,dx$

$$du=\alpha e^{\alpha x}dx \qquad v=\frac{\sin\beta x}{\beta}$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$$

$$u=e^{\alpha x} \qquad dv=\sin\beta x\,dx$$

$$du=\alpha e^{\alpha x}dx \qquad v=-\frac{\cos\beta x}{\beta}$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx\right)$$

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+C$$

Urmează câteva paragrafe facultative referitoare la calcularea integralelor nedefinite.

4.2 Integrarea funcțiilor raționale (facultativ)

Cea mai simplă funcție rațională este un polinom de gradul n :

$$Q_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

unde $a_0\neq 0$ şi $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$.

Un număr b este rădăcină pentru polinom $\Leftrightarrow \quad Q_n(b)=0$.

Observație: Orice polinom real $Q_n(x)$ poate fi descompus în factori în mod unic. Factorii sunt polinoame liniare $x-b$ şi polinoame pătratice x^2+px+q, în care *p*, *q* sunt coeficienți reali şi fiecare polinom pătratic este ireductibil la polinoame liniare, deoarece nu are rădăcini reale.

$$Q_n(x)=a_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots(x-l)^{\lambda}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\mu_1}\cdots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\mu_s}$$

unde exponenții $\alpha,\beta,\ldots,\lambda,\mu_1,\ldots,\mu_s$ sunt numere naturale şi are loc:

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda+2(\mu_1+\ldots+\mu_s)=n$$

Dacă $\alpha=1$, rădăcina *a* se numeşte *simplă.*
Dacă $\alpha\geq 2$, rădăcina *a* se numeşte *multiplă.*

In general, o funcție rațională reală $f(x)$, este raportul a două polinoame reale care nu au nici un factor comun.

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

O funcție rațională se numeşte *proprie* dacă numărătorul $P_m(x)$ are gradul mai mic decât numitorul $Q_n(x)$, adică $m<n$.

Dacă $m\geq n$, în urma unei împărțiri, functia $f(x)$ poate fi reprezentată astfel:

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=R_{m-n}(x)+\frac{\widetilde{P}(x)}{Q_n(x)}$$

unde $R_{m-n}(x)$ şi $\widetilde{P}(x)$ sunt polinoame reale, iar $\dfrac{\widetilde{P}(x)}{Q_n(x)}$ este funcție rațională proprie.

Funcțiile raționale simple sunt funcțiile raționale proprii de forma:

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^k},\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\quad \text{şi}\quad \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$$

unde $A,M,N,a,p,q\in\mathbb{R}$, $k\geq 2$ număr natural. Polinomul pătratic x^2+px+q nu are rădăcini reale, $p^2-4q<0$.

Teoremă: Fie funcția rațională reală *proprie* $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ şi fie

$$Q_n(x)=a_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots(x-l)^{\lambda}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\mu_1}\cdots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\mu_s}\ .$$

Atunci, $f(x)$ se descompune în mod unic într-o sumă de funcții raționale *simple*:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} +$$
$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$
$$\ldots$$
$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_s x + q_s} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_s x + q_s)^2} + \cdots + \frac{M_{\mu_s} x + N_{\mu_s}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{\mu_s}}$$

unde $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_\beta, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_{\mu_s}, N_{\mu_s} \in \mathbb{R}$ şi nu sunt toate nule.

Pentru a determina coeficienții de la numărătorii fracțiilor raționale simple, înmulțim relația precedentă cu $Q_n(x)$ şi aplicăm metoda identificării coeficienților puterilor egale a lui *x* în relația astfel obținută. Se obține un sistem liniar în necunoscutele $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_\beta, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_{\mu_s}, N_{\mu_s}$.

Exemple:

1. Descompuneți în funcții raționale simple funcția rationala:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$$
$$3x^2 - 6x + 2 = A(x^2 - 3x + 2) + B(x^2 - 2x) + C(x^2 - x)$$

$$x^2: \quad 3 = A + B + C$$
$$x^1: \quad -6 = -3A - 2B - C$$
$$x^0: \quad 2 = 2A$$

$$\Rightarrow \quad A = B = C = 1$$

$$f(x)=\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$$

2. Descompuneți în funcții raționale simple funcția rationala:

$$f(x)=\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}$$

$$x^5+3x^4+3x^3+x^2=x^2\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=x^2\left(x+1\right)^3$$

$$\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{\left(x+1\right)^2}+\frac{B_3}{\left(x+1\right)^3}$$

$$x^3+3x+1=A_1x\left(x+1\right)^3+A_2\left(x+1\right)^3+B_1x^2\left(x+1\right)^2+B_2x^2\left(x+1\right)+B_3x^2$$

$$x^3+3x+1=A_1\left(x^4+3x^3+3x^2+x\right)+A_2\left(x^3+3x^2+3x+1\right)+B_1\left(x^4+2x^3+x^2\right)+B_2\left(x^3+x^2\right)+B_3x^2$$

$x^4:\quad 0=A_1+B_1$

$x^3:\quad 1=3A_1+A_2+2B_1+B_2$

$x^2:\quad 0=3A_1+3A_2+B_1+B_2+B_3$

$x^1:\quad 3=A_1+3A_2$

$x^0:\quad 1=A_2$

$\Rightarrow\quad A_1=0\quad A_2=1\quad B_1=0\quad B_2=0\quad B_3=-3$

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{\left(x+1\right)^3}$$

3. Descompuneți în funcții raționale simple funcția rationala:

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\frac{x^3+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$x^3+x^2+1=\left(M_1x+N_1\right)\left(x^2+1\right)+M_2x+N_2$$

$$x^3+x^2+1=M_1x^3+M_1x+N_1x^2+N_1+M_2x+N_2$$

$x^3:\quad 1=M_1$

$x^2:\quad 1=N_1$

$x^1:\quad 0=M_1+M_2$

$x^0: \quad 1 = N_1 + N_2$

$\Rightarrow \quad M_1 = 1 \qquad N_1 = 1 \qquad M_2 = -1 \qquad N_2 = 0$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Integrarea funcțiilor raționale simple

1. $\int \frac{A}{x-a} dx$

$$t = x - a$$
$$dt = dx$$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dt}{t} = A \ln|t| = A \ln|x-a| + C$$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx$

$$t = x - a$$
$$dt = dx$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int t^{-k} dt = A \frac{t^{-k+1}}{-k+1} = A \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$

$$x^2 + px + q = \left[x^2 + 2x\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

Notație: $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

Substituție: $t = x + \frac{p}{2}$

$$dt = dx$$
$$x^2 + px + q = t^2 + a^2$$
$$x = t - \frac{p}{2}$$

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2} dt = M \int \frac{tdt}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2}$$

$$\varphi = t^2 + a^2$$
$$d\varphi = 2tdt$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{d\varphi}{\varphi} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{M}{2} \ln\left(t^2 + a^2\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a}$$

$$= \frac{M}{2} \ln\left(x^2 + px + q\right) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} arctg \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

Exemplu:

$$\int \frac{2 - x}{x^2 + 4x + 6} dx$$

$$x^2 + 4x + 6 = x^2 + 4x + 4 + 2 = (x + 2)^2 + 2$$
$$t = x + 2$$
$$dt = dx$$
$$\int \frac{2 - x}{x^2 + 4x + 6} dx = \int \frac{2 - (t - 2)}{t^2 + 2} dt = 4 \int \frac{dt}{t^2 + 2} - \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt$$

$$= 4 \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \ln\left(t^2 + 2\right) + C = 2\sqrt{2} arctg \frac{x + 2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + 4x + 6\right) + C$$

4. $\int \frac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^k} dx, \quad k \geq 2$

Substituție: $t = x + \frac{p}{2}$

$$dt = dx$$
$$x^2 + px + q = t^2 + a^2$$
$$x = t - \frac{p}{2}$$
$$a \overset{not}{=} \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt = M\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$$

$$\varphi = t^2+a^2$$
$$d\varphi = 2tdt$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\varphi}{\varphi^k} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{M}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_k$$

Am notat cu I_k integrala:

$$I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{t\cdot 2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{t\cdot 2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$$

$$u = t \qquad dv = \frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$$

$$du = dt \qquad v = \frac{\left(t^2+a^2\right)^{-k+1}}{-k+1}$$

$$I_k = \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\left(\frac{t}{(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{k-1}I_{k-1}\right)$$

$$I_k = \frac{t}{2a^2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}I_{k-1}$$ relație de recurență

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C$$
$$I_2 = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2} = \frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^2}I_1 = \frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^3}arctg\frac{t}{a}+C$$

Exemplu:

$$\int \frac{x+1}{\left(x^2-4x+5\right)^2}dx$$

$$x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1$$

$$t=x-2$$

$$dt=dx$$

$$\int\frac{t+3}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^2}+3\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1}+3I_2$$

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\int\frac{t^2+1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\int\frac{dt}{t^2+1}-\frac{1}{2}\int t\cdot\frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$$

$$u=t \qquad dv=\frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$$

$$du=dt \qquad v=-\frac{1}{t^2+1}$$

$$I_2=arctgt-\frac{1}{2}\left(-\frac{t}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+C$$

$$\int\frac{t+3}{\left(t^2+1\right)^2}dt=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1}+3\left(\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}\right)+C$$

Se revine la variabila x cu ajutorul substituției.
Observație: Integrala nedefinită a unei funcții raționale totdeauna există pe intervalele în care numitorul $Q_n(x)$ aste nenul, şi se exprimă cu ajutorul unui număr finit de funcții elementare, anume o sumă algebrică care are ca termeni numai polinoame, funcții raționale proprii, funcții logaritmice şi arctangente.

4.3 Intergarea funcțiilor iraționale(facultativ)

Considerăm funcții de mai multe variabile $u_1,u_2,\ldots,u_k$. Astfel, fie $R(u_1,u_2,\ldots,u_k)$ o funcție reprezentată astfel:

$$R(u_1,u_2,\ldots,u_k)=\frac{P_m(u_1,u_2,\ldots,u_k)}{Q_n(u_1,u_2,\ldots,u_k)}$$

unde $P_m(u_1,u_2,\dots,u_k)$ şi $Q_n(u_1,u_2,\dots,u_k)$ sunt polinoame de gradul *m* şi respectiv *n* în $u_1,u_2,\dots,u_k$. Acestă funcție este una rațională în $u_1,u_2,\dots,u_k$. În caz contrar, funcția este irațională.

Exemple:

1) $P_2(u_1,u_2) = A_{00} + A_{10}u_1 + A_{01}u_2 + A_{20}u_1^2 + A_{11}u_1u_2 + A_{02}u_2^2$

este polinom de gradul doi în variabilele u_1,u_2 în care coeficienții sunt numere reale şi $A_{20}^2 + A_{11}^2 + A_{02}^2 \neq 0$.

2) $f(x,y) = \dfrac{x^2+2y^3+xy}{x+x^3y^2+1}$

este funcție rațională în variabilele *x,y* deoarece este raport de două polinoame $P_3(x,y) = x^2+2y^3+xy$ şi $Q_5(x,y) = x+x^3y^2+1$.

3) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+xy+3}}{x+y}$ este funcție irațională.

Presupunem că variabilele $u_1,u_2,\dots,u_k$ sunt funcții de o variabilă *x*, adică

$$u_1 = f_1(x),\ u_2 = f_2(x),\ \dots\ u_k = f_k(x)$$

Atunci funcția $R\left[f_1(x),f_2(x),\dots,f_k(x)\right]$ este o funcție rațională în funcțiile $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$.

Exemple:

1) $f(x) = \dfrac{x^2+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+3\sqrt{x^2+x+1}}$

este funcție rațională în *x* şi $\sqrt{x^2+x+1}$, adică $f(x) = R\left(x,\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

2) $f(x) = \dfrac{\ln x+\sqrt{x^2+1}}{2+\sin x}$

este irațională în *x* şi $\sqrt{x^2+1}$ dar este funcție rațională în $\ln x$, $\sqrt{x^2+1}$ şi $\sin x$, adică $f(x) = R\left(\ln x,\sqrt{x^2+1},\sin x\right)$.

Observație: Nu toate integralele funcțiilor iraționale admit reprezentări în mulțimea funcțiilor elementare. De exemplu, integralele

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}} \quad \text{şi} \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}} \qquad k\in\left(0,1\right)$$

numite integrale eliptice nu pot fi exprimate în mulțimea funcțiilor elementare.

Prin substituții potrivite anumite integrale ale funcțiilor iraționale pot fi transformate în integrarea funcțiilor raționale. În cele ce urmează, ne ocupăm de astfel de integrale.

1) $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, unde $m\geq 2$ este număr natural şi coeficienții respectă $ad-bc\neq 0$. Substituția recomandată este

$$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Exemple:

a. $\int \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\frac{dx}{\left(2x+3\right)^2}$ $\qquad t=\sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}$

$$t^4=\frac{2x-3}{2x+3} \qquad t^4\left(2x+3\right)=2x-3 \qquad 2x\left(1-t^4\right)=3\left(1+t^4\right)$$

$$x=\frac{3}{2}\frac{1+t^4}{1-t^4} \qquad dx=\frac{3}{2}\frac{4t^3\left(1-t^4\right)+4t^3\left(1+t^4\right)}{\left(1-t^4\right)^2}dt \qquad dx=\frac{12t^3}{\left(1-t^4\right)^2}dt$$

$$\int \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\frac{dx}{\left(2x+3\right)^2}=\int t\frac{1}{\left(2\frac{3}{2}\frac{1+t^4}{1-t^4}+3\right)^2}\frac{12t^3}{\left(1-t^4\right)^2}dt$$

$$=\int t\frac{1}{3^2\left(1+t^4+1-t^4\right)^2}12t^3dt=\frac{1}{3}\int t^4dt=\frac{1}{3}\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{15}\left(\sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\right)^5+C$$

b. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}$ $\qquad t=\sqrt[12]{x}$

$$t^{12}=x \qquad 12t^{11}dt=dx \qquad \sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{t^{12}}=t^3 \qquad \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{t^{12}}=t^4 \qquad \sqrt{x}=\sqrt{t^{12}}=t^6$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}=\int \frac{12t^{11}dt}{t^3\left(t^4+t^6\right)}=12\int \frac{t^4}{1+t^2}dt=12\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=12\left(\frac{t^3}{3}-t+arctg\ t\right)+C=12\left(\frac{\sqrt[12]{x^3}}{3}-\sqrt[12]{x}+arctg\sqrt[12]{x}\right)+C$$

2) $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

i) Dacă $a>0$ substituția recomandată este $t=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{a}x$

In cazul

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x \quad \Rightarrow \quad \left(t-\sqrt{a}x\right)^2=ax^2+bx+c$$

$$t^2-2t\sqrt{a}x+ax^2=ax^2+bx+c$$

$$t^2-2t\sqrt{a}x=bx+c$$

$$x=\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}$$

$$dx=\frac{2t\left(2t\sqrt{a}+b\right)-\left(t^2-c\right)2\sqrt{a}}{\left(2t\sqrt{a}+b\right)^2}dt \qquad dx=\frac{2t^2\sqrt{a}+2tb+2c\sqrt{a}}{\left(2t\sqrt{a}+b\right)^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x=t-\sqrt{a}\ \frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}=\frac{2t^2\sqrt{a}+bt-\sqrt{a}t^2+c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b}=\frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b}$$

$$\int R\left(\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b},\frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b}\right)\frac{2t^2\sqrt{a}+2tb+2c\sqrt{a}}{\left(2t\sqrt{a}+b\right)^2}dt=\int R_1\left(t\right)dt=F\left(t\right)+C$$

Exemple:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha^2}\right)+C$$

$$t=\sqrt{x^2+\alpha^2}+x \qquad t-x=\sqrt{x^2+\alpha^2} \qquad \left(t-x\right)^2=x^2+\alpha^2$$

$$t^2-2tx=\alpha^2$$

$$x = \frac{t^2 - \alpha^2}{2t}$$

$$dx = \frac{2t2t - \left(t^2 - \alpha^2\right)2}{4t^2}dt = \frac{2t^2 + 2\alpha^2}{4t^2}dt = \frac{t^2 + \alpha^2}{2t^2}dt$$

$$\sqrt{x^2 + \alpha^2} = t - \frac{t^2 - \alpha^2}{2t} = \frac{t^2 + \alpha^2}{2t}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}dx = \int \frac{1}{\frac{t^2 + \alpha^2}{2t}} \frac{t^2 + \alpha^2}{2t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}\right) + C$$

Temă: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}\right| + C$

ii) Dacă $ax^2 + bx + c$ are două rădăcimi reale distincte x_1, x_2, atunci substituția recomandată este

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \left(x - x_1\right)t$$

sau $$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \left(x - x_2\right)t$$

In cazul

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \left(x - x_1\right)t$$

$$a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) = \left(x - x_1\right)^2 t^2 \qquad a\left(x - x_2\right) = \left(x - x_1\right)t^2$$

$$x = \frac{x_1 t^2 - ax_2}{t^2 - a}$$

$$dx = \frac{2tx_1\left(t^2 - a\right) - \left(x_1 t^2 - ax_2\right)2t}{\left(t^2 - a\right)^2}dt = \frac{2ta\left(x_2 - x_1\right)}{\left(t^2 - a\right)^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \left(\frac{x_1 t^2 - ax_2}{t^2 - a} - x_1\right)t = \frac{x_1 t^2 - ax_2 - t^2 x_1 + ax_1}{t^2 - a}t = \frac{a\left(x_1 - x_2\right)}{t^2 - a}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx = \int R\left(\frac{x_1 t^2 - ax_2}{t^2 - a}, \frac{a\left(x_1 - x_2\right)}{t^2 - a}\right)\frac{2ta\left(x_2 - x_1\right)}{\left(t^2 - a\right)^2}dt = \int R_1\left(t\right)dt$$

4.4 Integrarea funcțiilor trigonometrice(facultativ)

1) $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

Substituția recomandată este: $t = tg\dfrac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$ şi integrala dată se reduce la integrarea unei funcții raționale.

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2arctg\ t \qquad dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)\,dt$$

Exemplu:

$$\int \frac{dx}{\sin x} \qquad t = tg\frac{x}{2} \qquad x = 2arctg\ t \qquad dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

In continuare, listăm trei tipuri de integrale ce pot fi rezolvate cu substituții mai simple.

a) $\int R(\sin x)\cos x\ dx$

$$t = \sin x$$
$$dt = \cos x\ dx$$

$$\int R(\sin x)\cos x dx = \int R(t)\,dt$$

Exemplu:

$$\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$$

b)

$$\int R(\cos x)\sin x dx$$

$$t = \cos x$$
$$dt = -\sin x\ dx$$

$$\int R(\cos x)\sin x dx = -\int R(t)dt$$

Exemplu:

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx = -\int \frac{dt}{2+t} = -\ln|2+t|+C = -\ln(2+\cos x)+C$$

c) $\int R(\sin x, \cos x)dx$ unde funcția de sub integrală implică numai puteri pare în *sin*x şi *cos*x.

$$t = tgx$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x} = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$x = arctg\ t \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt$$

Exemplu:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x+2} \qquad t = tgx$$

$$x = arctg\ t \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x+2} = \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2}+4\frac{1}{1+t^2}+2}\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{dt}{t^2+4+2(1+t^2)}$$

$$= \int \frac{dt}{3t^2+6} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\, arctg\, \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

2) $\int \sin^{\alpha} x\ \cos^{\beta} x\ dx$ **,** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Considerăm două cazuri:

a) α sau β este număr pozitiv impar. De exemplu, $\beta = 2k+1$, cu $k > 0$ întreg.

$$\int \sin^{\alpha} x\ \cos^{2k+1} x\ dx = \int \sin^{\alpha} x \left(\cos^2 x\right)^k \cos x\ dx = \int \sin^{\alpha} x \left(1-\sin^2 x\right)^k \cos x\ dx$$

$$t = \sin x$$
$$dt = \cos x\ dx$$

$$\int \sin^{\alpha} x\ \cos^{2k+1} x\ dx = \int t^{\alpha}\left(1-t^2\right)^k\, dt$$

Aplicăm teorema binomială şi obținem funcții putere uşor integrabile.

Exemple:

1) $\int \sin^2 x\ \cos^5 x\ dx = \int \sin^2 x\ \cos^4 x\ \cos x\ dx = \int \sin^2 x \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x\ dx$

$$t = \sin x \qquad dt = \cos x\ dx$$

$$\int \sin^2 x\ \cos^5 x\ dx = \int t^2\left(1-t^2\right)^2 dt = \int \left(t^2 - 2t^4 + t^6\right) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

2) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x\ dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x\ dx$

$$t = \cos x \qquad dt = -\sin x\ dx$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{1-t^2}{t^2} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$$

3) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}} \cos x\ dx$

$$t = \sin x \qquad dt = \cos x\ dx$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int \frac{1-t^2}{\sqrt{t}}\,dt = \int\left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right)dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = 2\sqrt{\sin x} - \frac{2}{5}\sqrt{\sin^5 x} + C$$

b) α şi β sunt numere pozitive pare, $\alpha = 2m \quad \beta = 2n$, $m,n \in \mathbb{N}$

Manipulăm funcția de sub integrală aplicând formulele trigonometrice:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \text{pentru } m \neq n$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \qquad \text{pentru } m = n$$

□ $m \neq n$

$$\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx = \int \left(\sin^2 x\right)^m \left(\cos^2 x\right)^n dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^m \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^n dx =$$

$$= \frac{1}{2^{m+n}} \int \left(1-\cos 2x\right)^m \left(1+\cos 2x\right)^n dx$$

Aplicăm teorema binomială factorilor $\left(1-\cos 2x\right)^m$ şi $\left(1+\cos 2x\right)^n$, înmulțim polinoamele astfel obținute şi ajungem la integrale din puteri pare sau impare de $\cos 2x$. Termenilor cu puteri impare în $\cos 2x$, le aplicăm tehnica precedentă, iar termenilor cu puteri pare în $\cos 2x$, le aplicăm iar:

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$$

Continuăm procedeul până când ajungem la integrale de forma $\int \cos kx\, dx$.

□ $m = n$

$$\int \sin^{2n} x \cos^{2n} x\, dx = \int \left(\sin x \cos x\right)^{2n} dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^{2n} dx = \frac{1}{4^n}\int \sin^{2n} 2x dx$$

$$= \frac{1}{4^n}\int \left(\sin^2 2x\right)^n dx = \frac{1}{4^n}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^n dx = = \frac{1}{8^n}\int \left(1-\cos 4x\right)^n dx$$

Se aplică teorema binomială etc.

Exemple:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int \left(1-\cos 2x\right)\left(1+\cos 2x\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos 2x\right)\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{8}\int\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x-\cos 2x-2\cos^2 2x-\cos^3 2x\right)dx\\
&=\frac{1}{8}\int\left(1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x\right)dx\\
&=\frac{1}{8}\int\left[1+\cos 2x-\frac{1+\cos 4x}{2}-\left(1-\sin^2 2x\right)\cos 2x\right]dx\\
&=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x+\sin^2 2x\cos 2x\right)dx\\
&=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{2}\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+C
\end{aligned}
$$

$$
\int\sin^2 x\cos^2 xdx=\int\left(\sin x\cos x\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2xdx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx
$$

$$
=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C
$$

3) $\int\sin\alpha x\cos\beta x\,dx$, $\int\cos\alpha x\cos\beta x\,dx$, $\int\sin\alpha x\sin\beta x\,dx$, $\alpha\neq\beta$

Pentru a calcula aceste integrale sunt utile următoarele identități trigonometrice:

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha x\cos\beta x&=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)x+\sin\left(\alpha-\beta\right)x\right]\\
\cos\alpha x\cos\beta x&=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)x+\cos\left(\alpha-\beta\right)x\right]\\
\sin\alpha x\sin\beta x&=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)x-\cos\left(\alpha+\beta\right)x\right]
\end{aligned}
$$

De exemplu,

$$
\int\sin\alpha x\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\int\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)x+\sin\left(\alpha-\beta\right)x\right]dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos\left(\alpha+\beta\right)x}{\alpha+\beta}-\frac{\cos\left(\alpha-\beta\right)x}{\alpha-\beta}\right]+C
$$

$$
\int\cos 3x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos\left(3+1\right)x+\cos\left(3-1\right)x\right]dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos 4x+\cos 2x\right)dx
$$

$$
=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+C
$$

Fie $f(x)$ o funcție definită pe un interval închis $[a,b]$ şi fie

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k \ldots < x_n = b \tag{1}$$

o *partiție* pe $[a,b]$. Această partiție împarte intervalul $[a,b]$ în n subintervale.

Fie $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ lungimea subintervalului k şi fie ξ_k un punct arbitrar din subintervalul k. În această manieră construim o mulțime de puncte *intermediare* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ asociate partiției date.

Definiție: Fiind dată o partiție pe $[a,b]$ şi o mulțime de puncte intermediare pe această partiție putem evalua suma:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{2}$$

unde $f(\xi_k)$ este valoarea lui $f(x)$ în punctual intermediar $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Această sumă o numim *sumă integrală Riemann* pentru $f(x)$ determinată de partiția dată pe $[a,b]$ şi de punctele intermediare alese. Geometric, S_n reprezintă o arie.

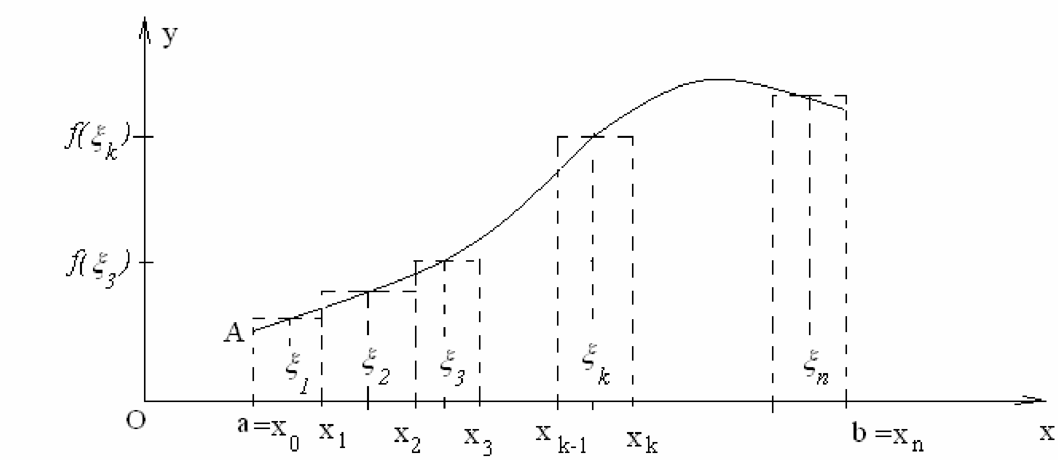

Figura 4.1

Observație: Suma Riemann depinde de modul de împărțire al intervalului $[a,b]$ în subintervale $[x_{k-1}, x_k]$ şi de alegerea punctelor intermediare ξ_k în aceste subintervale.

Fie λ cea mai mare lungime a subintervalelor $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\ldots,n$, adică $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$.

Definiție: Spunem că numărul I este limita sumelor integrale $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ atunci cand $\lambda \to 0$, pentru $f(x)$ pe $[a,b]$, dacă $\forall \varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I \right| < \varepsilon \tag{3}$$

pentru orice partiție pe $[a,b]$ cu $\Delta x_k < \delta$, $k = 1,2,\ldots,n$, adică pentru orice partiție cu $\lambda < \delta$ şi pentru orice puncte intermediare ξ_k, $k = 1,2,\ldots,n$ alese. Notăm:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{4}$$

Dacă limita există, aceasta se numeşte *integrala definită* sau *integrala Riemann* şi se notează:

$$I \overset{not}{=} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{5}$$

$a =$ limita inferioară
$b =$ limita superioară
$x =$ variabila de integrare
$f(x) =$ integrand
$f(x)dx =$ element de integrare

Important: Geometric, *I* reprezintă aria de sub graficul funcției $f(x)$.

Observația 1: Integrala definită rămâne neschimbată dacă valoarea funcției $f(x)$ se modifică într-un punct $c \in [a,b]$. Adică, dacă funcția $f(x)$ trece în funcția

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \forall x \in [a,b] - \{c\} \\ A, & x = c \end{cases}$$

unde, $A \neq f(c)$, atunci $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Această proprietate rămâne valabilă şi dacă $f(x)$ este modificat într-un număr finit de puncte din $[a,b]$.

Observația 2: In definiția integralei definite s-a considerat $a < b$. Includerea cazurilor $a = b$ şi $a > b$ se face considerând:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{pentru} \quad a = b$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{pentru} \quad a > b$$

Exemplu: Calculați $\int_a^b dx$

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \left[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots (x_n - x_{n-1}) \right] = \lim_{\lambda \to 0} (x_n - x_0) = \lim_{\lambda \to 0} (b-a) = b-a$$

Teorema 1: Dacă o funcție $f(x)$ este integrabilă (are integrală definită) pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ este mărginită pe $[a,b]$.

Remarcă: O funcție poate fi mărginită pe $[a,b]$, dar să nu fie integrabilă pe $[a,b]$.

Exemplu: Funcția Dirichlet**:**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

este mărginită pe intervalul $[0,1]$ deoarece $|f(x)| \leq 1$ pentru $\forall x \in [0,1]$, dar $f(x)$ nu este integrabilă pe $[0,1]$.

Într-adevăr, suma integrală $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$ pentru orice şir rațional de puncte intermediare ξ_k , $k = 1, \ldots, n$ devine:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = 1 - 0 = 1$$

iar pentru orice şir irațional de puncte intermediare este:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

Atunci pentru orice $\lambda = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$, oricât de mic, suma integrală S_n este egală fie cu unu fie cu zero. În această situație S_n nu are limită pentru $\lambda \to 0$, deci funcția $f(x)$ nu este integrabilă pe $[0,1]$.

Teorema 2: Dacă o funcție $f(x)$ este continuă pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$.

Exemplu: $f(x) = e^{-x^2}$ este continuă pe $[0,a]$, deci este integrabilă pe $[0,a]$, adică există integrala definită $\int_0^a e^{-x^2} dx$.

Teorema 3: Dacă o funcție $f(x)$ este monotonă pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$.

Teorema 4: Dacă funcția $f(x)$ este mărginită pe intervalul închis $[a,b]$ şi dacă $f(x)$ are un număr finit de puncte de discontinuitate pe $[a,b]$, atunci $f(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$.

Exemplu:

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

este integrabilă pe intervalul închis $[0,1]$, deoarece $|f(x)|\leq 1$, $\forall x\in[0,1]$, deci este mărginită pe $[0,1]$ şi funcția are un singur punct de discontinuitate de speța a doua în $x=0$.

Proprietăți:
Presupunem toate funcțiile continue şi deci integrabile pe un interval închis $[a,b]$.

1. Integrala definită depinde de limitele sale de integrare, inferioară şi superioară, de integrandul $f(x)$ şi este independentă de variabila de integrare:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du \tag{6}$$

2. Liniaritate:

$$\int_a^b Af(x)dx=A\int_a^b f(x)dx \tag{7}$$

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx \tag{8}$$

3. Aditivitate:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \tag{9}$$

4. Monotonie: Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcții integrabile pe $[a,b]$, pentru care are loc relația $f(x)\leq g(x)$ pe $[a,b]$, atunci:

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx \tag{10}$$

5. Dacă $f(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$ atunci şi funcţia $|f(x)|$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi are loc inegalitatea:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{11}$$

6. Fie m şi M minimul şi maximul lui $f(x)$ pe $[a,b]$. Atunci:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \tag{12}$$

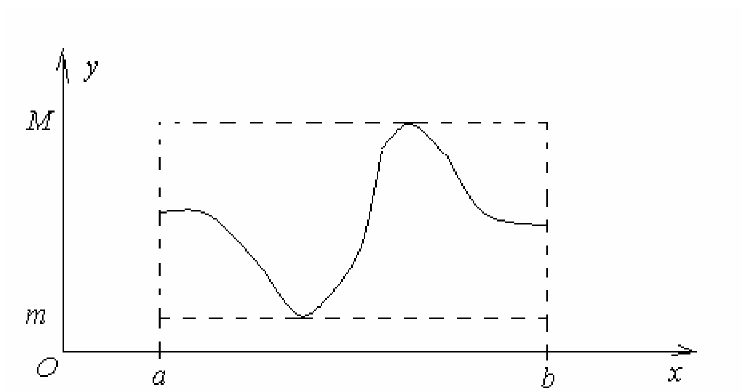

Figura 4.2

Exemplu: Evaluaţi integrala $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10+6\sin x}}$

$$m = \min_{0\le x\le 2\pi} \frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$M = \max_{0\le x\le 2\pi} \frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}}\right|_{x=\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Cu proprietatea 6 avem:

$$\frac{1}{4}(2\pi-0) \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10+6\sin x}} \le \frac{1}{2}(2\pi-0)$$

$$\frac{\pi}{2} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10+6\sin x}} \le \pi$$