*3.13 Teoremele de medie: Rolle, Lagrange, Cauchy*

**Teorema 1 (Rolle):**

Dacă o funcție $f(x)$ este:

1. continuă pe intervalul închis $[a,b]$
2. derivabilă pe intervalul deschis $(a,b)$
3. ia valori egale la capetele intervalului, adică $f(a)=f(b)$

atunci există cel puțin un punct $\xi \in (a,b)$ astfel încât $f'(\xi)=0$

**Interpretare geometrică:** între *a* şi *b* există cel puțin un punct $\xi$ în care tangenta la curba $y=f(x)$ este paralelă cu axa *x*.

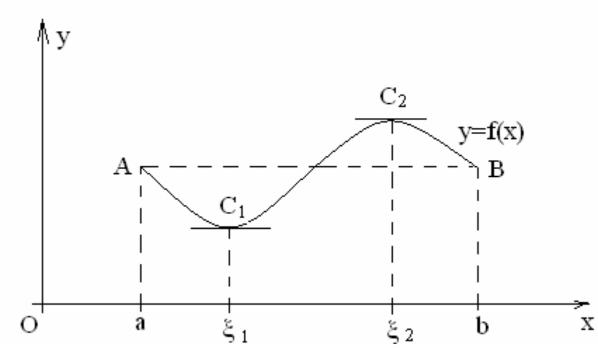


Figura 3.27

**Exemple:**

1) Arătați că funcția $f(x)=x-x^3$ verifică ipotezele teoremei Rolle pe intervalele $[-1,0]$, $[0,1]$. Determinați valori potrivite pentru $\xi$.

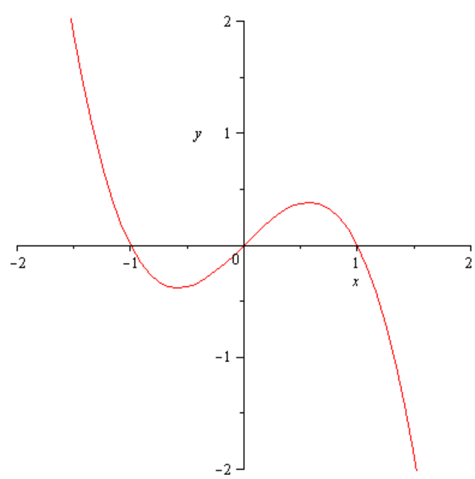


Figura 3.29 $f(x)=x-x^3$

Funcția $f(x)=x-x^3$ este elementară deci continuă şi derivabilă. $f(-1)=f(0) \overset{TR}{\Rightarrow}$ $\exists \xi \in (-1,0)$ a.î. $f'(\xi)=0$. $1-3\xi^2=0 \Rightarrow \xi=-\sqrt{\frac{1}{3}}$. Analog, $f(0)=f(1)$ şi $\xi=\sqrt{\frac{1}{3}}$.

2) $f(x)=|x|,\ \ x\in[-1,+1]$ (subliniază importanța ipotezelor teoremei)
Pentru această funcție, nu este îndeplinită ipoteza 2 a teoremei, deoarece funcția nu este derivabilă în $x=0$. Teorema lui Rolle nu este aplicabilă, şi în intervalul $(-1,+1)$ nu există nici un punct în care $f'(x)=0$.

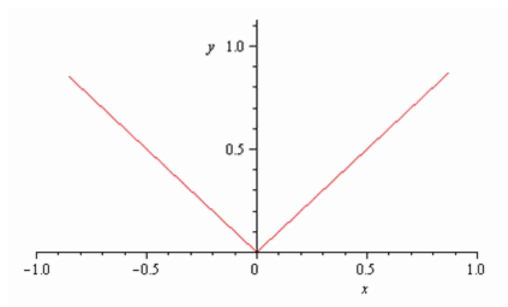

Figura 3.28 $f(x)=|x|$

**Teorema 2 (Lagrange sau a creşterilor finite)**:

Dacă o funcție $f(x)$ este:
1. continuă pe intervalul închis $[a,b]$
2. derivabilă pe intervalul deschis $(a,b)$
atunci există cel puțin un punct $\xi\in(a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\quad \xi\in(a,b) \tag{61}$$

*Observație:* Teorema Rolle este un caz particular al teoremei Lagrange şi se obține impunând $f(a)=f(b)$.

**Interpretare geometrică:**
Între *a* şi *b* există cel puțin un punct $\xi$ în care tangenta la curba $y=f(x)$ este paralelă cu segmentul *AB*, unde $A(a,f(a))$ şi $B(b,f(b))$.

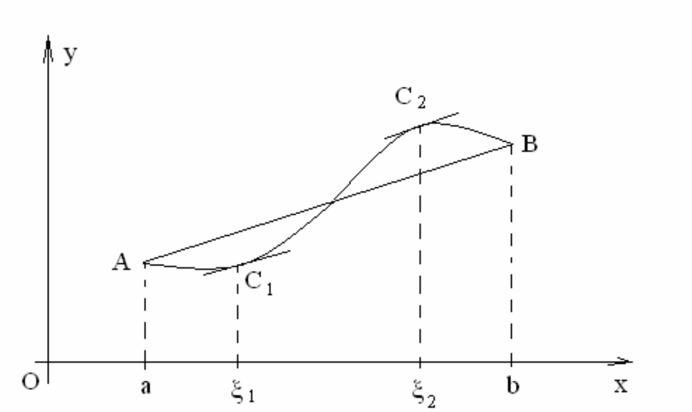


Figura 3.30

În formula

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\quad \xi\in(a,b)$$

sau

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b) \qquad (62)$$

numărul necunoscut $\xi$ poate fi reprezentat în forma

$$\xi=a+\theta(b-a),\ \ \theta\in(0,1)$$
$$f(b)-f(a)=f'\big(a+\theta(b-a)\big)(b-a),\quad \theta\in(0,1) \qquad (63)$$

Înlocuind *a* şi *b* cu *x* şi $x+\Delta x$ respectiv, obţinem

$$\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\quad \theta\in(0,1)$$

Această expresie reprezintă o relaţie *exactă* între creşterea argumentului şi creşterea funcţiei, în timp ce diferenţiala:

$$\Delta y=\Delta f(x)\approx f'(x)\Delta x$$

este o relaţie *aproximativă*, a cărei eroare relativă tinde la zero pentru $\Delta x\to 0$. În relaţia exactă însă, numărul θ este în general necunoscut.

**Exemple:**

1) Pentru funcţia $f(x)=x-x^3$ testaţi teorema Lagrange pe intervalul $[-2,+1]$ şi determinaţi valoarea lui $\xi$.

Funcţia $f(x)=x-x^3$ este elementară deci continuă şi derivabilă pe $[-2,1]$. Cu Teorema Lagrange, exista $\xi\in(-2,1)$ care verifica relatia (62). Determinăm pe ξ.

$$f(1)-f(-2)=(1-(-2))f'(\xi)$$

$$0-6=3\left(1-3\xi^2\right) \qquad -2=1-3\xi^2 \qquad -3=-3\xi^2 \qquad \xi^2=1 \qquad \xi=-1$$

2) Cu ajutorul teoremei Lagrange arătați că:

$$\left|arctg\ x_2 - arctg\ x_1\right| \le \left|x_2 - x_1\right|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Considerăm funcția $f(x)=arctg\ x$. Aceasta verifică ipotezele din teorema Lagrange pe orice interval $[x_1,x_2]\in\mathbb{R}$. Atunci, exista $\xi\in(x_1,x_2)$ care verifica:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \quad \xi\in(x_1,x_2)$$

$$arctg\ x_2 - arctg\ x_1 = \frac{1}{1+\xi^2}(x_2-x_1), \quad \xi\in(x_1,x_2)$$

$$\left|arctg\ x_2 - arctg\ x_1\right| = \frac{1}{1+\xi^2}\left|x_2-x_1\right|$$

Deoarece $\quad \dfrac{1}{1+\xi^2}\le 1, \quad \forall \xi\in\mathbb{R}$

$$\left|arctg\ x_2 - arctg\ x_1\right| \le \left|x_2-x_1\right|$$

**Teorema 3: (Cauchy)**

Dacă funcțiile $f(x)$ şi $\varphi(x)$

1. sunt continue pe intervalul închis $[a,b]$
2. sunt derivabile pe intervalul deschis $(a,b)$
3. $\varphi'(x)\ne 0$ pe $(a,b)$

atunci există cel puțin un punct $\xi\in(a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \tag{64}$$

*Observație*: Teorema Lagrange este un caz particular al teoremei Cauchy pentru $\varphi(x)=x$.

**Exemplu:**
Pentru funcțiile $f(x)=x^2+2$ şi $\varphi(x)=x^3-1$, testați teorema Cauchy pe intervalul $[1,2]$ şi determinați valoarea lui $\xi$.

Funcțiile $f(x)=x^2+2$ şi $\varphi(x)=x^3-1$ sunt elementare deci continue şi derivabile pe $[1,2]$. Cu TC exista $\xi\in(1,2)$ care verifica relatia (64). Determinăm pe ξ.

$$\frac{f(2)-f(1)}{\varphi(2)-\varphi(1)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

$$\frac{6-3}{7-0}=\frac{2\xi}{3\xi^2} \qquad \frac{3}{7}=\frac{2}{3\xi} \qquad \Rightarrow \quad \xi=\frac{14}{9}$$

*Remarcă*: Teoremele Rolle, Lagrange şi Cauchy afirmă existența unor puncte de mijloc $\xi\in(a,b)$ în care formulele menționate sunt valabile. Din acest motiv, acestea se numesc teoreme de medie.

## *3.14 Regula L'Hospital*

**Teorema 1:** (Regula L'Hospital pentru nedeterminarea $\frac{0}{0}$ şi $\frac{\infty}{\infty}$)

Fie funcțiile $f(x)$ şi $\varphi(x)$ definite pe o vecinătate $(a-\delta,a+\delta)$ a punctului *a* cu o posibilă excepție în *a*. Dacă au loc:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ sau $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$
2) $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sunt derivabile pe $(a-\delta,a+\delta)$ cu o posibilă excepție în *a*
3) $\varphi'(x)\neq 0$ pe $(a-\delta,a+\delta)$
4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$

atunci: $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A \tag{65}$$

Această relație reprezintă regula L'Hospital care permite, în condițiile menționate, înlocuirea limitei unui raport de funcții cu limita raportului derivatelor acestora, limită care uneori este mai uşor de calculat.

**Exemplu:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$$

**Observații:**

1) Dacă condițiile din teoremă sunt satisfăcute pe $(a-\delta,a)$ sau $(a,a+\delta)$, atunci regula L'Hospital este aplicabilă la calculul limitelor laterale.

2) Este posibil ca limita raportului derivatelor să nu existe în timp ce limita raportului funcțiilor respective să existe. De exemplu,

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \qquad \varphi(x) = x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) \text{ nu există}$$

3) Uneori regula L'Hospital poate fi aplicată în mod repetat la calcularea limitei $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. De exemplu, dacă $f(x)$ şi $\varphi(x)$ şi derivatele lor $f'(x)$ şi $\varphi'(x)$ toate satisfac ipotezele teoremei 1, putem aplica regula L'Hospital şi la calcularea limitei $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

**Exemplu:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

4) Teorema 1 poate fi aplicată şi pentru $a = \infty$.

Regula L'Hospital se foloseşte *şi la calcularea următoarelor nedeterminări*:

a) Evaluarea nederminării $0\cdot\infty$ Fie $F = f\cdot\varphi$ cu $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a}\varphi(x) = \infty$. Dacă calculăm limita $\lim_{x\to a}\left[f(x)\varphi(x)\right]$ avem o nedeterminare de tipul $0\cdot\infty$ Scriind produsul $F = f\cdot\varphi$ în forma:

$$F = \frac{f}{\frac{1}{\varphi}}$$

obținem nedeterminarea $\frac{0}{0}$, iar în forma

$$F = \frac{\varphi}{\frac{1}{f}}$$

obținem cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$ abordat anterior.

**Exemplu:**
$$\lim_{x\to 0, x>0}\left(x\ln x\right)=\lim_{x\to 0, x>0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0, x>0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

b) Evaluarea nederminării $\infty-\infty$ Fie $\Phi=f-\varphi$ cu $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=\infty$, $\lim_{x\to a}\varphi\left(x\right)=\infty$. Dacă calculăm limita $\lim_{x\to a}\left[f\left(x\right)-\varphi\left(x\right)\right]$ avem o nedeterminare de tipul $\infty-\infty$. Scriind funcția $\Phi$ în forma:

$$\Phi=f-\varphi=\frac{1}{\frac{1}{f}}-\frac{1}{\frac{1}{\varphi}}=\frac{\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{\varphi}}$$

obținem cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$ abordat anterior.

**Exemplu:**
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\frac{x-1}{x}}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{\left(x-1\right)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\left(x-1\right)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

c) $\lim_{x\to a}\left[f\left(x\right)\right]^{\varphi(x)}$ în situațiile:

i) $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=0$, $\lim_{x\to a}\varphi\left(x\right)=0$ $\quad 0^0$

ii) $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=1$, $\lim_{x\to a}\varphi\left(x\right)=\infty$ $\quad 1^\infty$

iii) $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=\infty$, $\lim_{x\to a}\varphi\left(x\right)=0$ $\quad \infty^0$

Pentru a rezolva aceste nedeterminări se recomandă calcularea limitei logaritmului natural din funcția inițială, adică

$$y=f^{\varphi} \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to a}\ln y=\lim_{x\to a}\varphi\ln f$$

Această nouă nedeterminare este de tipul discutat la punctul a) adică $0\cdot\infty$. Dacă

$$\lim_{x\to a}\ln y=A \quad \text{atunci} \quad \lim_{x\to a} y=e^A$$

**Exemple:**

1. $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x^x \quad , \quad x>0$

$y = x^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = x \ln x$

$$\lim_{x\to 0, x>0} \ln y = \lim_{x\to 0, x>0} x\ln x = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0, x>0} y = e^0 = 1$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0, x>0} y = e^1 = e$$

**Exemple: (**pentru $a = \infty$ **)**

$$1) \ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

$$2) \ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to +\infty}\frac{n!}{e^x} = 0$$

Se observă că exponențiala creşte mai repede decât funcția putere la infinit.

**Observație:** Uneori Regula L'Hospital nu poate fi aplicată.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad \text{etc.} \quad \text{Dar, } \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

**Definiții**

O funcție $f(x)$ este *crescătoare* pe $[a,b]$ dacă $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

$f(x)$ este *descrescătoare pe* $[a,b]$ dacă $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$.

O funcție $f(x)$ este *monotonă* pe $[a,b]$ dacă $f(x)$ este numai crescătoare sau strict crescătoare, sau numai descrescătoare sau strict descrescătoare pe $[a,b]$.

**Teorema 1:** Fie $f(x)$ o funcție continuă pe $[a,b]$ care are derivată $f'(x)$ pe $(a,b)$. Funcția este crescătoare pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă $f'(x) \ge 0$, $\forall x \in (a,b)$.

**Teorema 2:** Fie $f(x)$ o funcție continuă pe $[a,b]$ care are derivată $f'(x)$ pe $(a,b)$. Funcția este descrescătoare pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă $f'(x) \le 0$, $\forall x \in (a,b)$.

**Observații:**

- Dacă $f'(x)$ nu-şi modifică semnul pe un interval, atunci funcția este monotonă pe acel interval.
- Dacă $f'(x) > 0$ pe $(a,b) \Rightarrow f(x)$ este strict crescătoare pe $(a,b)$.
- Dacă $f(x)$ este strict crescătoare pe $[a,b]$, $\not\Rightarrow f'(x) > 0$ pe $(a,b)$.

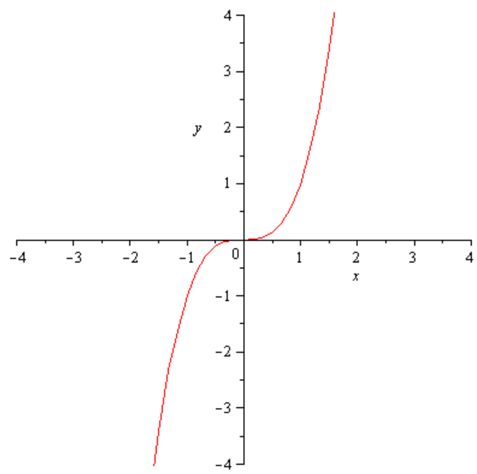


Figura 3.31 $f(x) = x^3$

**Exemplu:**

$f(x) = x^3$ este strict crescătoare pe $[-1,+1]$. Totuşi derivata sa $f'(x) = 3x^2$ este nulă în $x = 0$.

**Funcție strict crescătoare sau strict descrescătoare într-un punct**

**Definiție:** O funcție $f(x)$ este strict crescătoare în $x = x_0$ dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a lui $x_0$ astfel încât $f(x) < f(x_0)$, $\forall x < x_0$ şi $f(x) > f(x_0)$, $\forall x > x_0$.

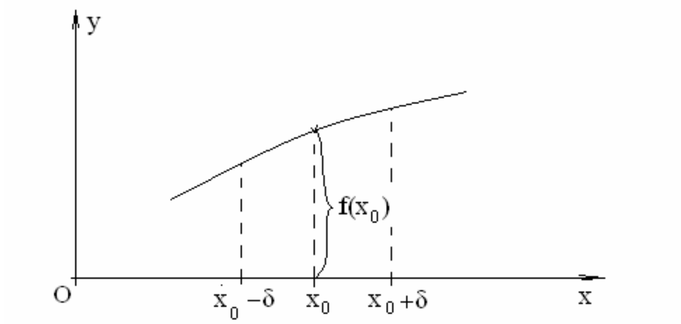


Figura 3.32

Analog, o funcție $f(x)$ este strict descrescătoare în $x = x_0$ dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a lui $x_0$ astfel încât $f(x) > f(x_0)$, $\forall x < x_0$ şi $f(x) < f(x_0)$, $\forall x > x_0$.

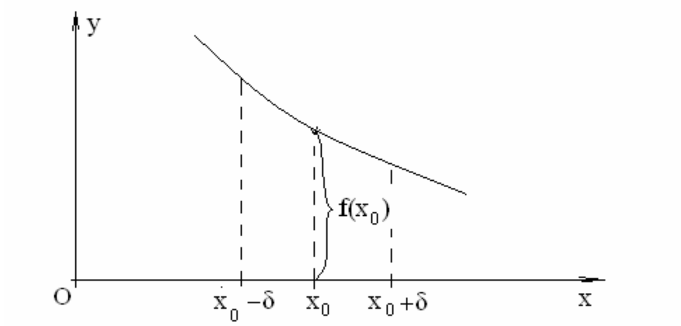


Figura 3.33

**Teorema 3:** Fie $f(x)$ o funcție care are derivată $f'(x_0)$ în punctul $x_0$ . Dacă $f'(x_0) > 0$, atunci funcția este strict crescătoare în $x_0$ şi dacă $f'(x_0) < 0$ atunci funcția este strict descrescătoare în $x_0$. (condiții suficiente nu neapărat necesare)

**Exemple:** **1)**

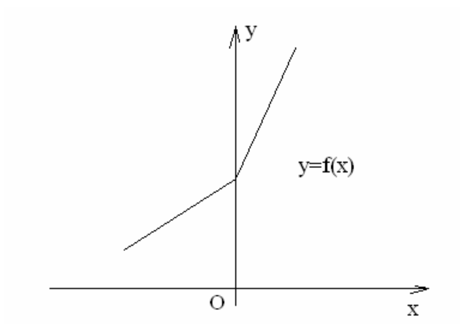


Figura 3.34

Funcția este strict crescătoare în $x_0 = 0$, şi totuşi derivata nu există în acest punct.

**2)** $f(x) = x^3$ Funcția este strict crescătoare în $x_0 = 0$, şi totuşi derivata este nulă în acest punct. (vezi figura 3.31)

*3.16 Punctele de extrem ale unei funcții*

**Definiții** Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate a punctului $x_0$ .
Spunem că funcția are un *maxim local* în $x_0$ dacă există $\delta > 0$ astfel încât

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \leq 0 , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$f(x_0)$ este maximul funcției pe vecinătate.

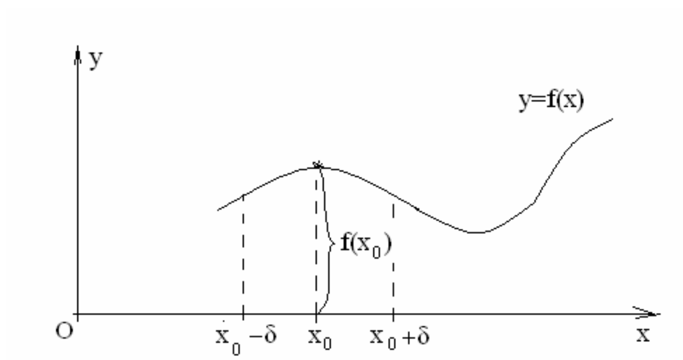


Figura 3.35

Spunem că funcția are un *minim local* în $x_0$ dacă există $\delta > 0$ astfel încât

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \geq 0 , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

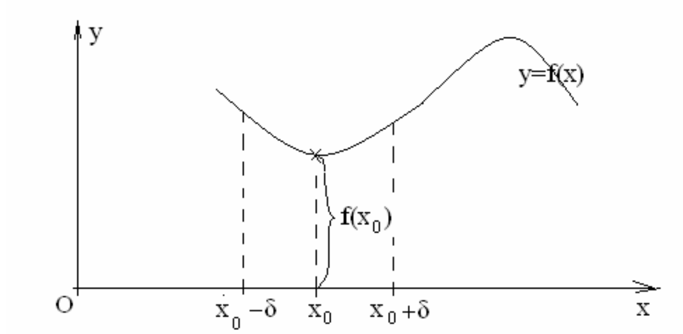


Figura 3.36

Maximul local şi minimul local al unei funcţii se numesc *extreme locale* ale funcţiei.

**Observație:** In aceste definiții nu s-a presupus continuitatea funcției în $x_0$.
**Exemplu:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

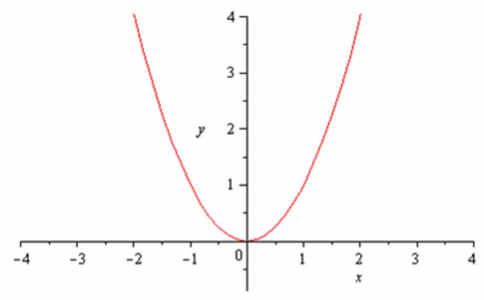


Figura 3.37

Funcția nu este continuă în $x_0 = 0$ dar are un maxim local în $x_0 = 0$. Intr-adevăr, există $\delta > 0$, $\delta = 1$ astfel încât $f(x) - f(0) = f(x) - 1 \leq 0 \;\; \forall \; x \in (-1, +1)$.

**Teorema 1:** (condiție necesară de extrem) O funcție $f(x)$ poate avea un extrem local numai în puncte în care derivata sa $f'(x)$ este fie nulă fie nu există.

**Interpretare geometrică**

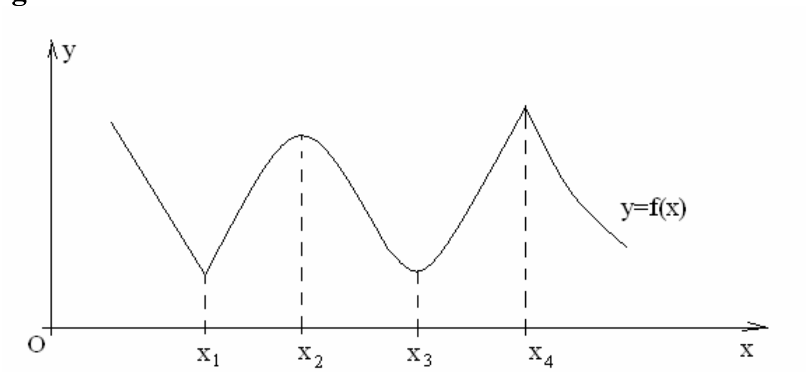


Figura 3.38

Funcția din grafic are extreme locale în punctele $x_1$, $x_2$, $x_3$ şi $x_4$. Derivata sa $f'(x)$ nu există în $x_1$ şi $x_4$ şi este nulă în $x_2$ şi $x_3$.

**Definiții:**

*Punctele critice* pentru o funcție sunt punctele în care sunt satisfăcute condițiile necesare de extrem. Acestea sunt rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ și punctele în care $f'(x)$ nu există.

*Punctele staționare* pentru o funcție sunt punctele în care $f'(x) = 0$.

**Observație:** Teorema 1 furnizează doar condiții necesare de extrem. Nu orice punct critic pentru funcție este punct de extrem.

**Exemplu:** $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 = 0 \;\; x = 0 \text{ punct critic}$$

Totuşi funcția nu are extrem în $x_0 = 0$ deoarece $f(0) = 0$ și $f(x) < 0 \;\; \forall x < 0$ și $f(x) > 0$ $\forall x > 0$ ceea ce înseamnă că funcția este strict crescatoare în $x_0 = 0$. (vezi figura 3.31)

Dăm în continuare două teoreme care furnizează condiții suficiente pentru maxim sau minim al unei funcții într-un punct.

**Teorema 2:** Fie funcția $f(x)$ continuă în $x_0$ şi fie $x = x_0$ un punct critic pentru funcția $f(x)$, adică fie $f'(x_0) = 0$ fie $f'(x_0)$ nu există. Presupunem că $\exists\delta > 0$ astfel încât $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ şi $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ adică derivata schimbă semnul de la pozitiv la negativ în $x_0$ . In aceste condiții funcția are maxim în $x_0$.

**Teorema 3:** Fie funcția $f(x)$ continuă în $x_0$ şi fie $x = x_0$ un punct critic pentru funcția $f(x)$, adică fie $f'(x_0) = 0$ fie $f'(x_0)$ nu există. Presupunem că $\exists\delta > 0$ astfel încât $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ şi $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ adică derivata schimbă semnul de la negativ la pozitiv în $x_0$ . In aceste condiții funcția are minim în $x_0$.

**Observație:** Ipoteza de continuitate a funcției în $x_0$ este importantă în teoremele 2 şi 3.
**Exemplu:**

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

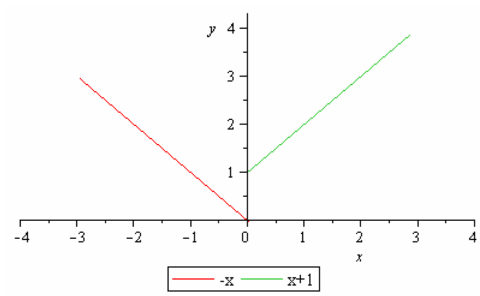


Figura 3.39

$f'(x)$ nu există în $x_0$. Derivata schimbă semnul în $x_0 = 0$, totuşi funcția nu are extrem în $x_0 = 0$ deoarece nu există o vecinătate a lui $x_0 = 0$, în care $f(0) = 1$ să fie maximul sau minimul funcției.
Explicația constă în lipsa continuității funcției în $x_0 = 0$.

**Procedeu de determinare a punctelor de extrem**

a) Calcularea derivatei $f'(x)$ şi a rădăcinilor ecuației $f'(x) = 0$.
b) Determinarea punctelor în care $f'(x)$ nu există. Aceste puncte împreună cu rădăcinile lui $f'(x) = 0$ sunt punctele critice ale funcției.
c) Determinarea semnului lui $f'(x)$ la stânga şi la dreapta fiecărui punct critic.

Atunci, funcția are *maxim* în punctul critic $x_0$ dacă $f'(x)$ îşi schimbă semnul de la pozitiv la negativ când $x$ trece prin punctul critic de la stânga la dreapta. Funcția are *minim* în punctul critic $x_0$ dacă $f'(x)$ îşi schimbă semnul de la negativ la pozitiv când $x$ trece prin punctul critic de la stânga la dreapta. Dacă $f'(x)$ nu-şi modifică semnul când $x$ trece prin punctul critic $x_0$, funcția nu are nici maxim nici minim în $x_0$.

**Exemple:**

1) $y = x^2 e^{-x}$

a) $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2-x)x$

b) $y' = 0 \Rightarrow$ punctele critice $x = 0$, $x = 2$.

c) semnul derivatei

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | ---------------------------- | 0 + + + + + + + + + + | 0 | -------------------------- |

$f'(x) < 0$ la stânga lui $x = 0$ şi $f'(x) > 0$ la dreapta lui $x = 0 \Rightarrow x = 0$ punct de minim

$f'(x) > 0$ la stânga lui $x = 2$ şi $f'(x) < 0$ la dreapta lui $x = 2 \Rightarrow x = 2$ punct de maxim

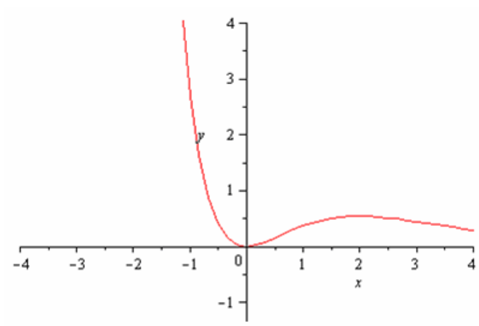


Figura 3.40 $f(x) = x^2 e^{-x}$

2) $y = x^{2/3}$

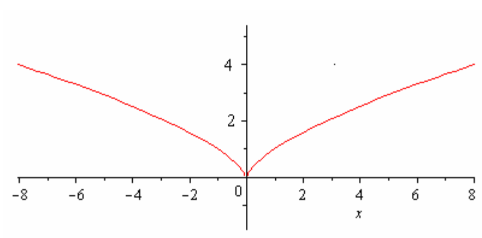


Figura 3.41 $f(x) = x^{2/3}$

a) $y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $y' = 0$ nu are rădăcini , $y'$ nu există în $x = 0$ deoarece $y'_s(0) = -\infty$ şi $y'_d(0) = +\infty$

Funcția are un singur punct critic $x = 0$.

c) semnul derivatei

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |

| $f'(x)$ | ---------------------------------------- +++++++++++++++++++ |
|---|---|

$f'(x)<0$ la stânga lui $x=0$ şi $f'(x)>0$ la dreapta lui $x=0$ $\Rightarrow$ $x=0$ punct de minim

3) $y=x^3$

a) $y'=3x^2$
b) $y'=0$ $\Rightarrow$ puncte critice $x=0$
c) $f'(x)=3x^2>0$ $\forall x\neq 0$ $\Rightarrow$ derivata este pozitivă şi la stânga şi la dreapta lui $x=0$ $\Rightarrow$ funcţia nu are extrem.

| x | $-\infty$ 0 $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | ++++++++++++++++0++++++++++++++++ |

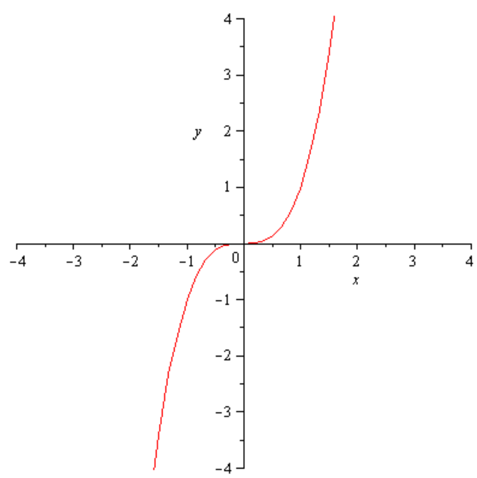


Figura 3.42 $f(x)=x^3$

**Derivata secundă în investigarea punctelor de extrem**

O condiţie suficientă de extrem este dată de teorema următoare.
**Teorema 4:** Fie $f(x)$ o funcţie care are prima şi a doua derivată în $x_0$ astfel încât $f'(x_0)=0$ şi $f''(x_0)\neq 0$. Atunci, funcţia are în $x_0$ un maxim dacă $f''(x_0)<0$ şi un minim dacă $f''(x_0)>0$.

**Procedeu de investigare a punctelor de extrem:**
a) determinarea punctelor critice
b) calcularea derivatei secunde $f''(x)$ într-un punct critic $x_0$ şi al semnului derivatei secunde, dacă aceasta există. Dacă $f''(x_0)<0$, atunci funcţia are maxim în $x_0$ şi dacă $f''(x_0)>0$ funcţia are minim în $x_0$.

Dacă $f''(x)$ este fie nulă fie nu există, atunci putem decide asupra punctului de extrem cu prima derivată.

**Exemplu:** $y = e^{-x^2}$

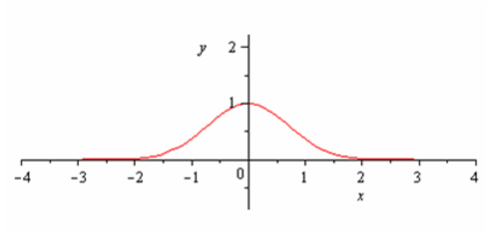


Figura 3.43 $f(x) = e^{-x^2}$

$y' = -2xe^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad x = 0$ punct critic

$y'' = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \qquad y''(0) = -2 < 0$

Atunci, funcția are maxim în $x = 0$.

**Exercițiu:**

Determinați intervalele de monotonie şi punctele de extrem pentru funcția:

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

a) $f'(x) = 3x^2 - 3 \quad f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 3(x^2 - 1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1 \;\; x_2 = +1$

b) Nu există alte puncte critice

c)

| x | $-\infty$ -1 +1 $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | + + + + + + +0 − − − − − − − −0 + + + + + + + + + |

Intervalele de monotonie şi punctele de extrem sunt:

$(-\infty, -1)$ crescătoare

$x_1 = -1$ punct de maxim

$(-1, +1)$ descrescătoare

$x_2 = +1$ punct de minim

$(+1, +\infty)$ crescătoare

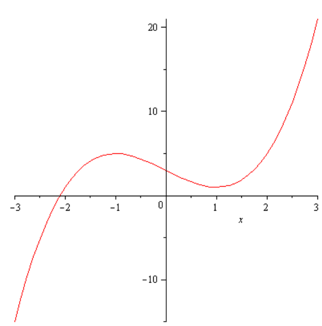


Figura 3.44 $f(x) = x^3 - 3x + 3$

Fie o curbă definită de funcția $y = f(x)$ şi fie $f'(x_0)$ derivata finită a funcției în punctul $x_0$ astfel, curba admite tangentă în $M_0(x_0, f(x_0))$, tangentă care nu este paralelă cu axa *Oy*.

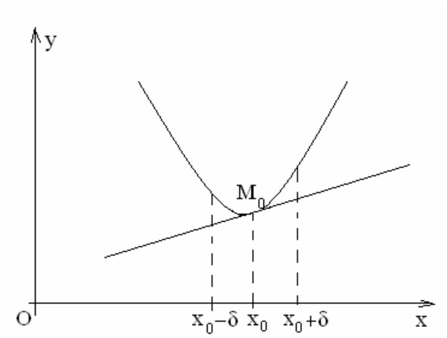


Figura 3.45

**Definiții:**

- O curbă este *convexă* într-un punct $M_0$ dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a punctului $x_0$ astfel încât toate punctele curbei cu abscisele conținute în $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ să se afle deasupra tangentei la curbă în punctul $M_0$ (figura 3.45).

- O curbă este *concavă* într-un punct $M_0$ dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a punctului $x_0$ astfel încât toate punctele curbei cu abscisele conținute în $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ să se afle sub tangenta la curbă în punctul $M_0$ (figura 3.46).

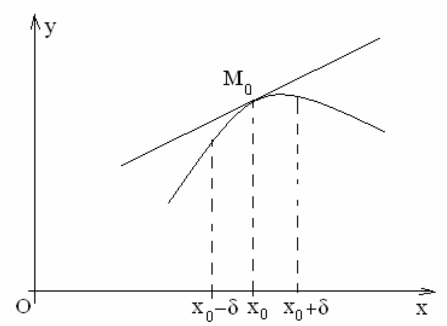


Figura 3.46

- Fie $y = f(x)$ o funcție diferențiabilă pe $(a,b)$. Spunem că graficul lui $y = f(x)$ este *convex* (*concav*) pe $(a,b)$ dacă graficul se află deasupra (dedesubt) de tangenta la curba $y = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$.
- Punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct de inflexiune* al curbei $y = f(x)$ dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a punctului $x_0$ astfel încât curba este concavă $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ şi convexă $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ sau vice versa. (punctul în care convexitatea curbei se modifică)

**Observație:** $M_0(x_0, f(x_0))$ este *punct de inflexiune* dacă la stânga şi la dreapta punctului curba se află în semiplane diferite față de tangenta la curbă în $M_0$.

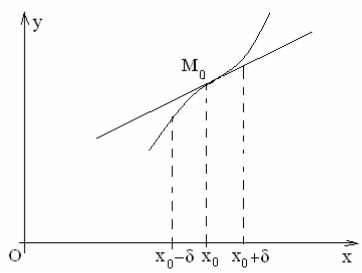


Figura 3.47

**Procedeu analitic de investigare a convexității şi a punctelor de inflexiune**

Considerăm un punct de pe curba $y = f(x)$ şi un punct de pe tangenta la curba $y = f(x)$ în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$. Presupunem că aceste puncte au aceeaşi abscisă $x$ şi fie $y$ ordonata punctului ales pe curbă şi $Y$ ordonata punctului ales pe tangentă. Evident, dacă $y - Y > 0$, $\forall x \neq x_0$ dintr-o vecinătate a punctului $x_0$, curba este convexă în $M_0$ şi dacă $y - Y < 0$, $\forall x \neq x_0$ dintr-o vecinătate a punctului $x_0$, curba este concavă în $M_0$.

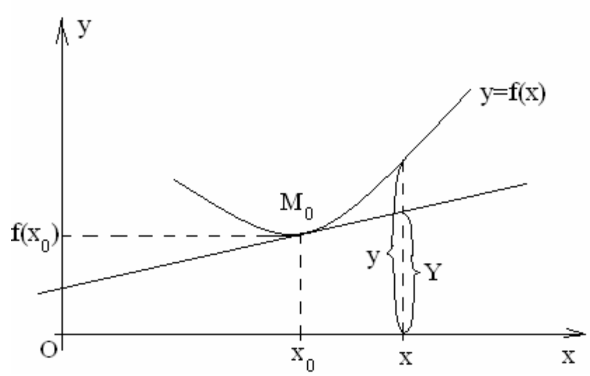


Figura 3.48

Pentru a determina convexitatea curbei în $M_0$ este suficient să investigăm semnul diferenței $y - Y$ pe o vecinătate a punctului $x_0$.

Ecuația tangentei este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad y - Y = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] =$$

$$= [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0)$$

Notăm: $h = x - x_0$

$$\Rightarrow \quad y - Y = \left[ f(x_0 + h) - f(x_0) \right] - f'(x_0) \cdot h$$

Aplicăm teorema Lagrange pe $\left[ x_0, x_0 + h \right]$ în ultima relație:

$$y - Y = f'(x_0 + \theta \cdot h)h - f'(x_0)h = \left[ f'(x_0 + \theta \cdot h) - f'(x_0) \right] h$$

unde $\theta = \theta(h)$ şi $0 < \theta < 1$.

Presupunem că funcția admite derivată secundă în $x_0$ şi pe o vecinătate a lui $x_0$. Cum prin definiție,

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$$

şi considerând $\Delta x = \theta \cdot h$

$$f''(x_0) = \lim_{\theta h \to 0} \frac{f'(x_0 + \theta \cdot h) - f'(x_0)}{\theta \cdot h}$$

cu teorema 1 de reprezentare din paragraful 1.8 Operații cu limite, putem scrie:

$$\frac{f'(x_0 + \theta \cdot h) - f'(x_0)}{\theta \cdot h} = f''(x_0) + \alpha(\theta h)$$

$$f'(x_0 + \theta \cdot h) - f'(x_0) = f''(x_0)\theta \cdot h + \alpha(\theta \cdot h)\theta \cdot h$$

unde $\alpha(\theta \cdot h) \to 0$ pentru $h \to 0$.

In concluzie,

$$y - Y = \left[ f''(x_0) + \alpha(\theta \cdot h) \right] \theta \cdot h^2$$

Dacă $f''(x_0) \neq 0$ şi cum $\alpha(\theta \cdot h)$ este un infinitezimal pentru $h \to 0$, există $\delta > 0$ a. î. $f''(x_0) + \alpha(\theta \cdot h)$ are acelaşi semn cu $f''(x_0)$ pe $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Mai mult, $\theta \cdot h^2 > 0$.

Dacă $f''(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; y - Y > 0$ pentru $x$ suficient de aproape de $x_0$. Curba este convexă în $M_0(x_0, f(x_0))$.

Dacă $f''(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; y - Y < 0$ pentru $x$ suficient de aproape de $x_0$. Curba este concavă în $M_0(x_0, f(x_0))$.

Condițiile suficiente pentru convexitate pot fi schițate în mod intuitiv astfel:

$$f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \text{ strict crescătoare}$$

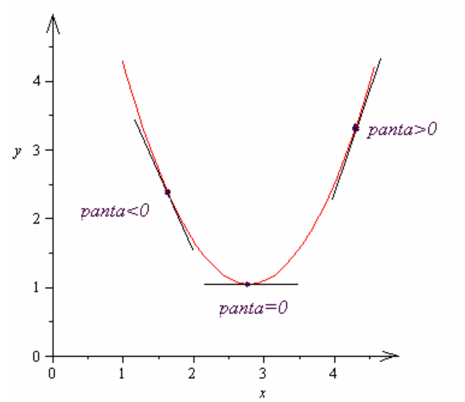


Figura 3.49 Funcția este convexă. Panta creşte de la negativă la pozitivă cu *x*

$$f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \text{ strict descrescătoare}$$

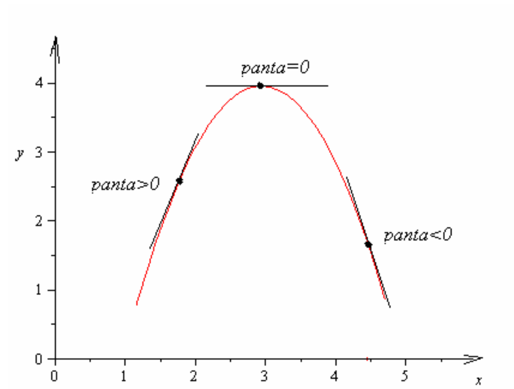


Figura 3.50 Funcția este concavă. Panta scade de la pozitivă la negativă cu *x*

**Condiții necesare pentru punct de inflexiune**: $M_0(x_0, f(x_0))$ poate fi punct de inflexiune pentru curba $y = f(x)$ doar dacă $f''(x_0) = 0$ sau dacă $f''(x_0)$ nu există. Punctele în care $f''(x) = 0$ sau $f''(x)$ nu există se numesc *puncte critice de speța a doua.*

Această condiție nu este suficientă.

**Exemplu:** $f(x) = x^4$

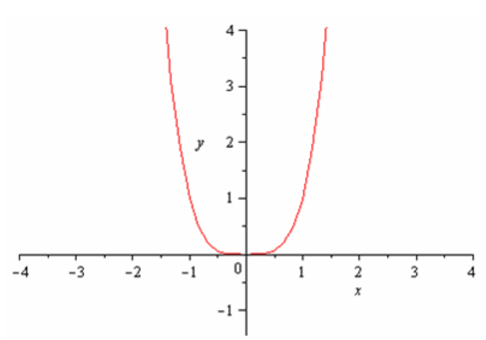


Figura 3.51 $f(x) = x^4$

$f''(x) = 12x^2 \qquad f''(0) = 0$

Totuşi punctul $x_0 = 0$ nu este punct de inflexiune pentru funcție. In acest punct curba este convexă.

**Condiții suficiente pentru punct de inflexiune**:

Fie $y = f(x)$ o funcție care are derivată secundă continuă pe o vecinătate a punctului $x_0$ cu o posibilă excepție în $x_0$. Atunci, punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este punct de inflexiune al curbei $y = f(x)$ dacă $f''(x_0) = 0$ sau $f''(x_0)$ nu există şi derivata secundă îşi schimbă semnul în $x_0$.

**Exemple:**

1. Determinați intervalele de convexitate şi punctele de inflexiune pentru funcția: $f(x) = 3x - x^3$

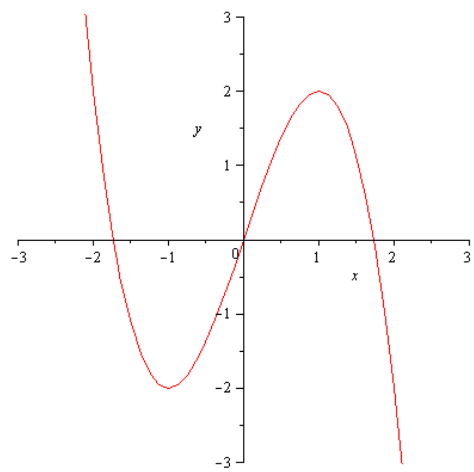


Figura 3.52 $f(x) = 3x - x^3$

$$f(x) = 3x - x^3 \qquad f'(x) = 3 - 3x^2 \qquad f''(x) = -6x$$

Derivata secundă $f''(x)$ se anulează în punctul $x = 0$ şi semnul derivatei secunde se schimbă în $x = 0 \Rightarrow x = 0$ punct de inflexiune.

| **x** | $-\infty$ 0 $+\infty$ |
|---|---|
| $f''(x)$ | + + + + + + + + + + + + + 0 − − − − − − − − − − − − − − |

**2.**

$$f(x) = x^{1/3} \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

Derivata secundă $f''(x)$ nu se anulează în nici un punct şi în $x = 0$ derivata secundă nu există. Investigăm semnul derivatei secunde pe o vecinătate a lui $x = 0$.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $++++++++++++++$ | $\vert$ | $--------------$ |

Curba este convexă la stânga lui zero şi concavă la dreapta lui zero, deci punctul $x=0$ este punct de inflexiune.

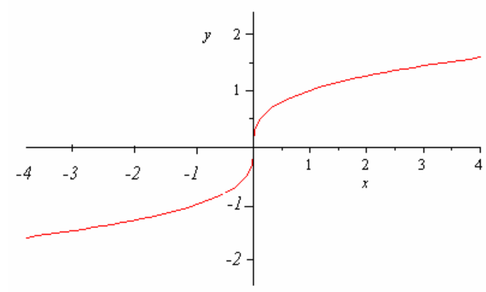


Figura 3.53 $f(x)=x^{1/3}$

**2**. Determinați intervalele de convexitate şi punctele de inflexiune pentru curba gaussiană:

$$f(x)=e^{-x^2}$$

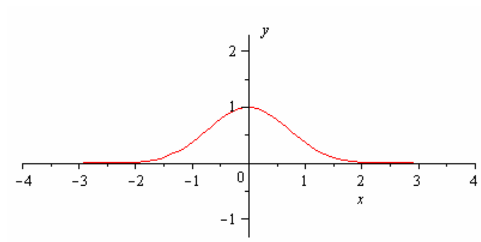


Figura 3.54 $f(x)=e^{-x^2}$

$$f(x)=e^{-x^2} \qquad f'(x)=-2xe^{-x^2}$$

$$f''(x)=-2e^{-x^2}-2xe^{-x^2}(-2x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}$$

| x | $-\infty$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $++++++++++$ | 0 | $----------$ | 0 | $++++++++++$ | |

Două puncte de inflexiune: $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$.